

Classificazione degli esercizi: F : Fondamentale C : Consigliato A : Approfondimento T : Teorico

1. SISTEMI E MATRICI: Algoritmo di Gauss

- F 101. Usando l'algoritmo di Gauss dire se hanno soluzioni reali e, in caso affermativo, risolvere i seguenti sistemi (il numero delle incognite è scritto a lato della graffa):

• Nei sistemi c. e f., scrivere le soluzioni in tutti i modi possibili, cioè con tutte le possibili scelte delle incognite non pivotali.

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ 3 \begin{cases} -3x + y - 3z = -1 \end{cases} \end{cases} & \text{b. } \begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - 3y + z = 0 \\ 4 \begin{cases} -x + y + t = 1 \end{cases} \end{cases} & \text{c. } \begin{cases} y - z + 2t = 1 \\ 2y - 2z = 0 \\ 4 \begin{cases} -y + z + 2z = 1 \end{cases} \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{d. } \begin{cases} 5y - z = -1 \\ x - 3y = 1 \\ 3 \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases} \end{cases} & \text{e. } \begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - y = 0 \\ z + t = 6 \\ 5 \begin{cases} t + u = 7 \end{cases} \end{cases} & \text{f. } \begin{cases} z + 2t = 1 \\ x + 2y + t = 2 \\ 4 \begin{cases} 2x + 4y - z = 3 \end{cases} \end{cases} \end{array}$$

- F 102. Mediante l'algoritmo gaussiano, stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ hanno soluzioni i sistemi lineari seguenti e, in caso affermativo dire quante sono:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 3 \begin{cases} x + 2y - 2z = k \end{cases} \end{cases} & \text{b. } \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - 3y = 0 \\ 3 \begin{cases} 2x - y + z = k^2 \end{cases} \end{cases} & \text{c. } \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y - z = 1 \\ 3 \begin{cases} x + k^2y + 2z = k + k^2 \end{cases} \end{cases} \end{array}$$

- F 103. Per ognuno dei tre sistemi lineari a lato nelle incognite x, y, z, t dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$, assegnati mediante la loro matrice completa:

- Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ il sistema è ridotto e in caso contrario determinare un sistema ridotto equivalente al dato.
- Dire, per ogni $k \in \mathbb{R}$ se il sistema ha soluzioni e quante.
- Determinare, quando possibile, tutte le soluzioni.

$$\text{a. } \left(\begin{array}{cccc|c} k^2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & k^2 - 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k + 1 & k^2 - 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{b. } \left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 2 & 1 & 0 \\ k & 1 & k + 3 & k + 3 & 1 \\ k & 1 & 2 & k^2 & 1 + k \\ 0 & 0 & k + 1 & k + 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{c. } \left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & k - 1 & k^2 - 4 & k & 1 \end{array} \right)$$

- F 104. Mediante la riduzione gaussiana, stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ hanno soluzioni i sistemi lineari seguenti e, in caso affermativo dire quante sono:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \begin{cases} kx - y = 1 \\ 2 \begin{cases} x - 4ky = 2 \end{cases} \end{cases} & \text{b. } \begin{cases} kx + y - z = 1 \\ 3 \begin{cases} kx - y + kz = -1 \end{cases} \end{cases} & \text{c. } \begin{cases} kx + 2ky = k \\ 2 \begin{cases} kx + y = 1 - k \end{cases} \end{cases} \end{array}$$

- C 105. Altri sistemi da studiare mediante la riduzione gaussiana o altre serie di operazioni elementari:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \begin{cases} kx + y = -1 \\ (1 + k)x + y = k \\ 2 \begin{cases} (3 - k)x = 2k - 1 \end{cases} \end{cases} & \text{b. } \begin{cases} kx + y = 1 \\ 2x + (k + 1)y + z = 1 \\ 3 \begin{cases} kx + 3y + z = 4 \end{cases} \end{cases} & \text{c. } \begin{cases} kx - y + (k + 1)z = 0 \\ -x + ky = 1 \\ (k - 1)y + 2z = 1 \\ 3 \begin{cases} x - y + (k - 1)z = -k \end{cases} \end{cases} \end{array}$$

- C 106. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ hanno soluzioni diverse dalla banale e quante soluzioni hanno i sistemi omogenei seguenti:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \begin{cases} kx + y = 0 \\ x + z = 0 \\ 3 \begin{cases} x + ky - 2z = 0 \end{cases} \end{cases} & \text{b. } \begin{cases} kx + y + z + t = 0 \\ x - y + t = 0 \\ 2x + z + t = 0 \\ 4 \begin{cases} kx + 3y + 2z = 0 \end{cases} \end{cases} & \text{c. } \begin{cases} x - ky + z + t - 2u + v + w = 0 \\ kx - y + z + t - 2u + v + w = 0 \\ 7 \end{cases} \end{array}$$

- A 107. Per ogni coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ dire quante soluzioni ha il sistema a lato, dipendente da $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} ab & 1 & 0 & 1 \\ 0 & b + 1 & 0 & 1 \\ 0 & b + 1 & a(b - 1) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

Determinare un $a \in \mathbb{R}$ per il quale il sistema ha soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$ e un $a \in \mathbb{R}$ per il quale il sistema non ha soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$.

1. SISTEMI E MATRICI: Matrici

- F 111. Completare la tabella seguente dicendo quali prodotti tra le matrici seguenti sono possibili. In caso affermativo eseguirli.

		2 ^o fattore					
1 ^o fat- tore	A	B	C	D	E	F	
	no	no					
	sì	sì					

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$F = (0 \ 1 \ -1)$$

- F 112. Siano A, B, C matrici quadrate dello stesso ordine. Dire quali di queste affermazioni sono vere (e perché) e quali false (mostrando un controesempio).

- $A \cdot B = B \cdot A$
- Se $A \cdot B = 0$, allora $(A = 0 \text{ oppure } B = 0)$
- Se $A \cdot B = B$, allora $A = I$
- $A + B + C = C + B + A$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- Se $A \cdot B = A \cdot C$, allora $B = C$
- Se $A + B = A + C$, allora $B = C$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A$
- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $A^2 \cdot B^2 = (A \cdot B)^2$
- Se $A = A^2$, allora $A = 0$ oppure $A = I$
- Se $A^2 = 0$, allora $A = 0$
- Se $A^2 = I$, allora A è invertibile
- $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
- $A^2 - I = (A + I)(A - I)$

- F 113. Come l'esercizio precedente supponendo inoltre che esistano A^{-1} e B^{-1} :

- $A \cdot B$ è invertibile
- $A + B$ è invertibile
- Se $A \cdot B = A \cdot C$, allora $B = C$
- $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- $A^{-1} \cdot B \cdot A = B$
- $(A^{-1}BA)^5 = A^{-5}B^5A^5$
- $(A^{-1}BA)^5 = A^{-1}B^5A$
- $A \cdot B^{-1} \neq 0$
- Se $AB = C$, allora $B = CA^{-1}$
- Se $A^2 = I$, allora $A = \pm I$

- F 114. Siano A, B matrici reali 4×4 . Dire in quali casi è possibile dare condizioni su A e B affinché le equazioni matriciali seguenti abbiano sicuramente soluzione X e, in questo caso scrivere esplicitamente la soluzione.

- $AX = B$
- $AX + X = B$
- $AX + BX = C$
- $AXA + AXB + B = I$
- $AX + XB = I$
- $AXB + X = B$

- A 115. In $M_{22}(\mathbb{R})$: determinare tutte le matrici A tali che $A^2 = 0$.

- A 116. In $M_{22}(\mathbb{R})$: trovare una matrice $A \neq I, 0$ tale che $A^2 = A$ (Suggerimento: cercare A diagonale).

- T 117. Siano $A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$. Dimostrare che:

- Se $A \cdot B = 0$ e $B \neq 0$ allora A non è invertibile.
- Se A non è invertibile, esiste una matrice B non nulla tale che $A \cdot B = 0$.

- F 118. Calcolare l'inversa di ciascuna delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- F 119. Siano A, B matrici reali $n \times n$, A invertibile. Dire quali di queste affermazioni sono vere (e perché) e quali false (mostrando un controesempio).

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
- $\det(A^{-1} \cdot B \cdot A) = \det(B)$
- $\det(A^2) = (\det(A))^2$
- $\det(-A) = -\det(A)$

- F 120. Calcolare il determinante di ciascuna delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 9 & 9 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 12 & 13 & 96 \\ 1 & 12 & 12 & 13 & 87 \\ 3 & -3 & 9 & 0 & 81 \\ 7 & 8 & -2 & 9 & 65 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

1. SISTEMI E MATRICI: Sistemi lineari e caratteristica

- F 131. Discutere il numero di soluzioni dei sistemi lineari seguenti, assegnati mediante la loro matrice completa, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$. Si consiglia di usare, quando è conveniente, anche metodi diversi dall'algoritmo di Gauss.

a. $\left(\begin{array}{cc|c} k & 1 & -1 \\ 2 & 1+k & 2 \\ 2-k^2 & 1 & k+2 \end{array} \right)$ b. $\left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & 4 & -(1+k) & 1 \\ k^2 & k+1 & -k & 1 \\ -k & 1-3k & k^2 & 1 \end{array} \right)$ c. $\left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ k-1 & k & 2 & 2k \\ 4 & 0 & k-2 & 0 \end{array} \right)$

- C 132. Determinare, usando fin quando possibile la strategia della pivotizzazione parziale, per quali $k \in \mathbb{R}$ ha soluzioni e quante il sistema lineare 4×4 nelle incognite x, y, z, t .
- $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

- C 133. Discutere, usando ogni volta il metodo che si ritiene più opportuno, il numero di soluzioni dei sistemi lineari seguenti al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

a. $\begin{cases} x+y+kz = 2k-1 \\ x+ky+z = k \\ kx+y+z = 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} (k^2-k+1)x-2y = 1 \\ x-2y+(k^2-k)z = k \end{cases}$ c. $\begin{cases} 2x+ky = 1 \\ y = k \\ 2x+(k-1)y = -1 \\ kx+3y = k+1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} kx-y+z = -k \\ -x+ky-z = 1 \\ (k-2)x+(2k-1)y-z = k^2 \end{cases}$ e. $\begin{cases} y+z+t = 1 \\ kx+z+kt = 2 \\ x-y+2kz = 0 \\ x+2z+t = 1 \end{cases}$ f. $\begin{cases} kx+(2k+1)y+kz = 1 \\ x+y-z = 0 \\ (k+1)y+2kz = k \\ kx+ky-kz = k \end{cases}$

- A 134. Discutere, usando opportunamente i metodi noti, il numero di soluzioni dei sistemi lineari seguenti al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ e schematizzare la situazione in un piano cartesiano di coordinate a, b .

a. $\begin{cases} x+2y-2z = 1 \\ x-y-z = b \\ -4x+ay+4z = 2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x+ay = 1 \\ -x+2y = 0 \\ 2x+by = 1 \end{cases}$ c. $\begin{cases} ax+by-z = 1 \\ -x+by = 1 \\ 2x+by-2z = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} ax+y+z = a \\ x+2y+z = 0 \\ bx+az = a \\ (a-1)x-y = a \end{cases}$ e. $\begin{cases} ax+y+bz = b \\ ax+y+z = 2 \\ by+z = 0 \end{cases}$

- F 141. Discutere la caratteristica delle due matrici al variare di $k \in \mathbb{R}$ e dire per quali k la 4^a colonna è combinazione lineare delle altre tre e per quali k la combinazione è unica.

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 & 3 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ k & 0 & k & -k \\ -k & 2 & 1 & 3k \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & k+2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & k+1 \\ k+1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & k+1 & 2 \end{pmatrix}$$

- F 142. Per ciascuna delle 5 colonne C_i della matrice A dire se C_i è combinazione lineare delle rimanenti (se sì dire qual è, se no dire perché no).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Premessa: Uso dei simboli $[,]$ e $[\pm]$.

Questi simboli di uso corrente possono significare la congiunzione logica “e” o la congiunzione logica “o” a seconda delle circostanze. Per esempio:

- La scrittura $k = 0, 1$ significa: $k = 0$ oppure $k = 1$.
- La scrittura $k \neq 0, 1$ significa: $k \neq 0$ e $k \neq 1$.
- La scrittura $k = \pm 1$ significa: $k = -1$ oppure $k = 1$.
- La scrittura $k \neq \pm 1$ significa: $k \neq -1$ e $k \neq 1$.

101. a. Scriviamo la matrice, usiamo come pivot per la prima incognita il numero incorniciato e riduciamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 3R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{array} \right)$$

L'ultima equazione è proporzionale alla seconda e può essere eliminata. Il sistema è ridotto, ha due pivot e quindi ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale z .

Per determinarle, riduciamo totalmente la matrice:

$$R_2 \rightarrow -1/2 R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \end{array} \right) \quad R_1 \rightarrow R_1 - R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \end{array} \right)$$

$$\text{Il sistema è: } \begin{cases} x + z/2 = 1/2 \\ y - (3/2)z = 1/2 \end{cases} \text{ da cui le soluzioni: } \left(\frac{1-z}{2}, \frac{1+3z}{2}, z \right) (z \in \mathbb{R})$$

101. b. Scriviamo la matrice, usiamo come pivot per la prima incognita il numero incorniciato e riduciamo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 + (1/2)R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3/2} & 3/2 \end{array} \right)$$

Il sistema è ridotto, ha i 3 pivot incorniciati e quindi ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale z .

Riduciamo totalmente iniziando con $R_3 \rightarrow 2/3 R_3$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 + R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-4} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow (-1/4)R_2 \\ R_1 \rightarrow R_1 - R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \right)$$

Pertanto le soluzioni sono: $\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2}, z, 1 \right)$

101. c. La matrice dei coefficienti è una matrice 3×4 e, dato che l'incognita x ha tutti i coefficienti nulli, la riduciamo usando come primo pivot a_{22} :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right) \text{Eliminando l'ultima ri-}$$

ga, proporzionale alla seconda, il sistema è ridotto con due pivot ed ha quindi ∞^2 soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali x e z . Si ricavano subito $t = 1/2$ e la y in funzione di z . Le soluzioni sono $(x, z, z, 1/2)$

Evidentemente l'incognita t dev'essere pivotale e, dato che si ha la relazione $y = z$, allora y e z non possono essere contemporaneamente non pivotali. Quindi l'unico altro modo di scrivere le soluzioni del sistema è quello di scegliere come incognite non pivotali x e y e scrivere quindi le soluzioni come $(x, y, y, 1/2)$.

101. d. Scriviamo la matrice del sistema; per ridurla occorre innanzitutto uno scambio di righe perché a_{11} è nullo e non può essere pivot. Possiamo eseguire $R_1 \leftrightarrow R_2$ e poi continuare:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) R_1 \leftrightarrow R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \quad R_4 \rightarrow R_4 - 3R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

La seconda e la terza riga sono identiche, la quarta è proporzionale alla seconda, *ma solo per i coefficienti* e non per il termine noto, quindi il sistema non ha soluzioni. D'altra parte con $R_4 \rightarrow R_4 - 2R_2$ si otterrebbe l'equazione $0 = -2$.

101. e. La matrice del sistema si riduce con una sola operazione elementare:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

La matrice è ridotta con 4 pivot e il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale u . Le soluzioni si ricavano subito e sono: $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, u-1, 7-u, u\right)$

101. f. Per ridurre la matrice occorrono uno scambio di righe e un'altra operazione elementare:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ \updownarrow \\ R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Eliminando l'ultima equazione che è proporzionale alla seconda, il sistema è ridotto, ha due pivot e quindi ha ∞^2 soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali y e t . Le soluzioni si possono quindi scrivere come: $(2-2y-t, y, 1-2t, t)$.

È possibile usare ogni coppia di incognite, come incognite non pivotali tranne la coppia z, t , dato che si ha la relazione $z = 1-2t$. Le soluzioni si possono scrivere quindi in altri 4 modi usando le altre possibili coppie di incognite non pivotali:

$$\begin{array}{ll} \left(-2y + \frac{3+z}{2}, y, z, \frac{1-z}{2}\right) & \text{con } y, z \\ \left(x, \frac{2-x-t}{2}, 1-2t, t\right) & \text{con } x, t \\ \left(x, \frac{3+z}{4} - \frac{x}{2}, z, \frac{1-z}{2}\right) & \text{con } x, z \\ (x, y, -3+2x+4y, 2-x-2y) & \text{con } x, y \end{array}$$

102. a. Riduciamo la matrice mediante l'algoritmo gaussiano standard, cosa possibile in quanto nessuno dei coefficienti dipende da k :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & k \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - (1/2)R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - (1/2)R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & k-1/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{array}\right)$$

Risulta subito chiaro che, se $k \neq 1$ il sistema non ha soluzioni, mentre, se $k = 1$, il sistema ha due pivot e quindi ∞^1 soluzioni.

102. b. Riduciamo la matrice mediante l'algoritmo standard di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & k^2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & k^2-2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & k^2-1 \end{array}\right)$$

La matrice è ridotta con 3 pivot, qualunque valore assuma il parametro k , quindi il sistema ha sempre una e una sola soluzione.

102. c. Riduciamo la matrice mediante l'algoritmo standard di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & k^2 & 2 & k+k^2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & k^2-2 & 1 & k+k^2-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_3 \rightarrow R_3 - (k^2-1)R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k+1 \end{array}\right)$$

Se $k^2 - 1 \neq 0$, se cioè $k \neq \pm 1$, la matrice è ridotta con 3 pivot e il sistema ha quindi una e una sola soluzione.

Se $k = 1$, l'ultima riga è $(0 \ 0 \ 0 \mid 2)$, quindi il sistema non ha soluzioni.

Se $k = -1$, l'ultima riga è $(0 \ 0 \ 0 \mid 0)$, quindi il sistema è ridotto con due pivot e ha quindi ∞^1 soluzioni.

103. a. Se $k \neq 0, 1, -1$, allora $k, k^2 - 1, k + 1$ sono pivot e il sistema è chiaramente ridotto.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad \left| \quad \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right| \quad \left| \quad \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

e non è ridotta. e non è ridotta. ed è ridotta.

In conclusione il sistema è ridotto per ogni $k \neq 0, 1$.

Se $k \neq 0, 1, -1$ il sistema è ridotto, non ha un'equazione del tipo $0 = 1$ e ha tre pivot non nulli: $k^2, k^2 - 1, k + 1$, per cui ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale t e si trovano facilmente per sostituzione a partire dall'ultima equazione:

$$\left(\frac{1+t-2kt}{k^2} + \frac{1+(1-k)t}{k^2(k^2-1)}, \frac{-1+(k-1)t}{k^2-1}, (1-k)t, t \right)$$

Se $k = 0$, riducendo con $R_2 \rightarrow R_2 + R_1$ e $R_3 \rightarrow R_3 + R_2$ si ottiene la matrice a lato. Il sistema è ora ridotto, non ha un'equazione del tipo $0 = 1$ e ha due pivot quindi ha ∞^2 soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali x e t e sono: $(x, 1+t, t, t)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Se $k = 1$, le due ultime equazioni del sistema sono: $\{z = -1; 2z = 0\}$. Il sistema è chiaramente incompatibile e non ha soluzioni.

Se $k = -1$ il sistema è ridotto, ha due pivot, non ha un'equazione del tipo $0 = 1$ per cui ha ∞^2 soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali y e t e sono $(-y - t - 1, y, -1, t)$

Conclusione: Se $k \neq 0, 1, -1$ ∞^1 soluzioni
 Se $k = 0$ o $k = -1$ ∞^2 soluzioni
 Se $k = 1$ nessuna soluzione

103. b. Riduciamo la matrice completa del sistema mediante l'algoritmo di Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 2 & 1 & 0 \\ k & 1 & k+3 & k+3 & 1 \\ k & 1 & 2 & k^2 & 1+k \\ 0 & 0 & k+1 & k+2 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-1 & 1+k \\ 0 & 0 & k+1 & k+2 & 1 \end{array} \right)$$

Se eliminiamo R_4 che coincide con R_2 , il sistema è ridotto purché $k \neq 0, k+1 \neq 0, k^2-1 \neq 0$, cioè $k \neq 0, 1, -1$.

Per $k \neq 0, 1, -1$ il sistema ha tre equazioni significative e quindi ∞^1 soluzioni che si possono trovare con le seguenti operazioni:

$R_3 \rightarrow R_3/(k+1)$ (possibile perché $k \neq -1$), da cui $t = 1/(k-1)$. Sostituendo questo valore in R_2 si ottiene: $z = -3/(k^2-1)$. L'incognita y è non pivotale, per cui rimane come parametro libero. Sostituendo i valori trovati di y, z, t in R_1 si ottiene infine: $x = \frac{-(k^2-1)y+5-k}{k(k^2-1)}$.

Quindi le soluzioni per $k \neq 0, 1, -1$ sono: $\left(\frac{-(k^2-1)y+5-k}{k(k^2-1)}, y, \frac{-3}{k^2-1}, \frac{1}{k-1} \right)$

Esaminiamo ora i casi particolari:

Se $k = 0$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$ È chiaro che il sistema è ridotto con x incognita non pivotale per cui ci sono ∞^1 soluzioni che si ricavano facilmente: $(x, -5, 3, -1)$.

Se $k = 1$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$ Il sistema è ridotto e, dato che l'ultima equazione è $0 \cdot t = 2$, allora non ha soluzioni.

Se $k = -1$: $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ Il sistema è ridotto e ha solo due righe significative, pertanto ha ∞^2 soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali y, z e sono: $(-y-2z-1, y, z, 1)$

103. c. Evidentemente, se $k - 1 \neq 0$, il sistema non è ridotto. Mentre se $k = 1$ il sistema lo è.

Un'operazione elementare che si può eseguire per qualunque $k \in \mathbb{R}$ è $R_3 \rightarrow R_3 - (k - 1)R_2$. La matrice completa del sistema è in questo caso quella a lato.

Se i due numeri $k, k^2 - 4$ sono diversi da 0, cioè se $k \neq 0, 2, -2$, la matrice è ridotta con tre pivot: $k, 1, k^2 - 4$.

Quindi per $k \neq 0, 2, -2$ (anche per $k = 1$) il sistema ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale t . Le soluzioni si ricavano facilmente dal sistema ridotto:

$$\begin{cases} kx + y + 2t = 1 \\ y + 2t = 0 \\ (k^2 - 4)z + (2 - k)t = 1 \end{cases} \quad \left(\frac{1}{k}, -2t, \frac{1 - (2 - k)t}{k^2 - 4}, t \right)$$

Sostituendo uno alla volta i tre valori esclusi $k = 0, 2, -2$, si vede subito che il sistema è ridotto anche per $k = 2$ e per $k = -2$, ma non per $k = 0$.

Se $k = 2$ il sistema non ha soluzioni perché l'ultima riga è $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \mid 1)$

Se $k = -2$ la matrice è quella a lato. È ridotta, ha tre pivot e quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale z .

Le soluzioni sono immediate e sono: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, z, \frac{1}{4}\right)$

Sostituiamo ora $k = 0$ e continuiamo la riduzione:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Il sistema è ora ridotto ed evidentemente non ha soluzioni.

In conclusione: Per $k = 0, 2$ non ha soluzioni, per gli altri k ne ha ∞^1 .

104. a. Scriviamo la matrice. Per ridurla conviene innanzitutto scambiare le due righe in modo da avere un pivot non dipendente da k .

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & -1 & 1 \\ 1 & -4k & 2 \end{array} \right) R_1 \leftrightarrow R_2 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4k & 2 \\ k & -1 & 1 \end{array} \right) R_2 \rightarrow R_2 - kR_1 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4k & 2 \\ 0 & 4k^2 - 1 & 1 - 2k \end{array} \right)$$

Se $4k^2 - 1 \neq 0$, se cioè $k \neq \pm 1/2$, allora la matrice è ridotta e ha due pivot, quindi il sistema ha una soluzione.

Se $k = 1/2$ l'ultima riga è $(0 \ 0 \mid 0)$ e quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale y .

Se $k = -1/2$ l'ultima riga è $(0 \ 0 \mid 2)$ e quindi il sistema non ha soluzioni.

104. b. Scriviamo la matrice. L'operazione $R_2 \rightarrow R_2 - R_1$ si può sempre fare, anche se $k = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 1 \\ k & -1 & k & -1 \end{array} \right) R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & k+1 & -2 \end{array} \right)$$

Se $k \neq 0$ la matrice è ridotta con due pivot e il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale z .

Se $k = 0$ la matrice non è ridotta, ma la si riduce subito con $R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1$. L'ultima riga diventa $(0 \ 0 \ -1 \mid 2)$, quindi la matrice è ridotta con due pivot. Il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni dipendenti però dall'incognita non pivotale x .

In conclusione il sistema ha sempre ∞^1 soluzioni.

104. c. Scriviamo la matrice. L'operazione $R_2 \rightarrow R_2 - R_1$ si può sempre fare, anche se $k = 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & 2k & k \\ k & 1 & 1 - k \end{array} \right) R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \left(\begin{array}{cc|c} k & 2k & k \\ 0 & 1 - 2k & 1 - 2k \end{array} \right)$$

Se $k \neq 0, 1/2$ la matrice è ridotta con due pivot e il sistema ha quindi una soluzione.

Se $k = 0$ il sistema si riduce all'unica equazione $y = 1$ e ha quindi le ∞^1 soluzioni $(x, 1)$.

Se $k = 1/2$ l'ultima equazione è non significativa, il sistema si riduce all'unica equazione $(1/2)x + y = 1/2$ e ha quindi ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale y .

In conclusione il sistema ha ∞^1 soluzioni se $k = 0, 1/2$, altrimenti ne ha una.

105. a. Dato che tutti i coefficienti dell'incognita x dipendono da k , conviene scambiare l'ordine delle incognite in modo da semplificare l'algoritmo gaussiano.

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & 1 & -1 \\ 1+k & 1 & k \\ 3-k & 0 & 2k-1 \end{array} \right) \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & -1 \\ 1 & 1+k & k \\ 0 & 3-k & 2k-1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - (3-k)R_2 \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & k^2-4 \end{array} \right)$$

La matrice è ridotta con 2 pivot, indipendenti da k , ma a causa dell'ultima equazione, ha soluzioni (ne ha una sola) solo se $k = \pm 2$.

Osserviamo che, dovendola trovare, occorre tener conto che la prima incognita è ora la y e la seconda è la x .

105. b. Anche qui, dato che tutti i coefficienti dell'incognita x dipendono da k , può convenire scambiare l'incognita x con la z . Occorrerà poi scambiare due righe per avere un pivot non nullo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 0 & 1 \\ 2 & k+1 & 1 & 1 \\ k & 3 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & k+1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & k & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 3 & k & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 2-k & k-2 & 3 \end{array} \right)$$

Mediante l'operazione elementare $R_3 \rightarrow R_3 - (2-k)R_2$ la matrice diventa quella lato. Dato che l'elemento a_{33} si annulla per $k = 2, -1$, allora:

Se $k \neq 2, -1$ la matrice è ridotta con tre pivot quindi il sistema ha una soluzione.

Se $k = 2$, l'ultima riga diventa $(0 \ 0 \ 0 \mid 3)$, e quindi il sistema non ha soluzioni.

Se $k = -1$, l'ultima riga diventa $(0 \ 0 \ 0 \mid 0)$, la matrice è ridotta con due pivot e quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale x (e non z , ricordiamo che c'è stato uno scambio di colonne). Conclusione:

Se $k \neq 2, -1$ 1 soluzione Se $k = 2$ nessuna soluzione Se $k = -1$ ∞^1 soluzioni

105. c. Per ridurre la matrice conviene innanzitutto scambiare R_1 con R_2 in modo da avere un pivot non dipendente da k .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & k+1 & 0 \\ -1 & k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & k-1 & -k \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & k & 0 & 1 \\ k & -1 & k+1 & 0 \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & k-1 & -k \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 + kR_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & k & 0 & 1 \\ 0 & -1+k^2 & k+1 & k \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 & 1-k \end{array} \right)$$

Ora conviene eseguire $R_2 \leftrightarrow R_3$ in modo da semplificare la successiva operazione elementare.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 0 & -1+k^2 & k+1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 & 1-k \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 - (k+1)R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -k-1 & -1 \\ 0 & 0 & k-3 & -k \end{array} \right)$$

A questo punto può non convenire più ridurre del tutto la matrice, ma confrontare invece le ultime due equazioni che si scrivono (se $k \neq -1, 3$): $\left\{ z = \frac{1}{k+1}; z = \frac{-k}{k-3} \right\}$. Perché

ci siano soluzioni quindi è necessario che $\frac{1}{k+1} = \frac{-k}{k-3}$, cioè che $k^2 + 2k - 3 = 0$ ovvero $k = -3, 1$. Se k non è uno di questi due valori, il sistema è comunque senza soluzioni (anche se $k = -1$ o $k = 3$, come si verifica subito). Restano da esaminare i due casi $k = -3, 1$:

Se $k = 1$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente ∞^1 soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

Se $k = -3$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente una soluzione.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{array} \right)$$

Riassumendo: Se $k \neq 1, -3$ non c'è nessuna soluzione, se $k = 1$ ci sono ∞^1 soluzioni, se $k = -3$ c'è una soluzione.

106. a. Basta ridurre la matrice dei coefficienti, iniziando con uno scambio di righe per evitare che il pivot dipenda da k .

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 0 \\ 1 & k & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - kR_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & k & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - kR_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & -3 + k^2 \end{pmatrix}$$

I pivot sono due se $k^2 \neq 3$ e sono tre in caso contrario, quindi:

Se $k = \pm\sqrt{3}$ ci sono ∞^1 soluzioni non banali, altrimenti c'è solo la soluzione banale.

- b. Riduciamo iniziando con uno scambio di righe per evitare che il pivot dipenda da k .

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ k & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 \updownarrow \\ R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ k & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - kR_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - kR_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+k & 1 & 1-k \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3+k & 2 & -k \end{pmatrix}$$

È possibile proseguire la riduzione, ma si può anche notare che $R_4 = R_2 + R_3$, per cui R_4 può essere eliminata. Dato che ci sono meno di quattro pivot, allora c'è sempre almeno un'incognita non pivotale, quindi il sistema ha sempre almeno ∞^1 soluzioni e quindi anche soluzioni non banali. Per sapere anche quante sono, scambiamo R_2 con R_3 . Si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1+k & 1 & 1-k \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - \frac{1+k}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & (1-k)/2 & (3-k)/2 \end{pmatrix}$$

Se $k \neq 1$ allora ci sono tre pivot, se $k = 1$ anche, quindi il sistema ha sempre ∞^1 soluzioni.

- c. Il sistema ha sempre soluzioni non banali perché non può avere più di due pivot e quindi ci sono almeno 5 incognite non pivotali. Per sapere quante sono riduciamo la matrice con $R_2 \rightarrow R_2 - kR_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ k & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - kR_1} \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1+k^2 & 1-k & 1-k & -2+2k & 1-k & 1-k \end{pmatrix}$$

Se $k^2 \neq 1$, allora ci sono 2 pivot.

Se $k = -1$, ci sono sempre 2 pivot.

Se $k = 1$, la seconda riga è nulla e c'è un'unica pivot.

In conclusione: se $k = 1$ ci sono ∞^6 soluzioni, se $k \neq 1$ ce ne sono ∞^5 .

107. Riduciamo la matrice completa con $R_3 \rightarrow R_3 - R_2$: $\left(\begin{array}{cccc|c} ab & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & b+1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a(b-1) & 0 & b-a \end{array} \right)$

Quindi se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e $b \neq 1$ e $b \neq -1$, il sistema è ridotto con tre pivot e ha una soluzione.

Esaminiamo il caso $a = 0$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & b+1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right)$

A causa dell'ultima equazione il sistema può aver soluzioni solo se $b = 0$. Ma, se $b = 0$, sono incompatibili le prime due. Quindi per $a = 0$ il sistema non ha soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$.

Esaminiamo ora il caso $b = 0$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 0 & -a \end{array} \right)$. Se $a = 1$, le prime due equazioni sono

identiche. Eliminandone una, il sistema è ridotto, con due pivot, quindi ha ∞^2 soluzioni. Se invece $a \neq 1$ le prime due equazioni sono incompatibili e il sistema non ha soluzioni.

Esaminiamo ora il caso $b = 1$: $\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{array} \right)$

Se $a \neq 0$, il sistema è ridotto, ma, a causa dell'ultima equazione, non ha soluzioni, tranne che nel caso $a = 1$, per cui è ridotto con due pivot e ha quindi ∞^2 soluzioni.

Se $a = 0$, non è ridotto, ma, come abbiamo già visto, non ha soluzioni.

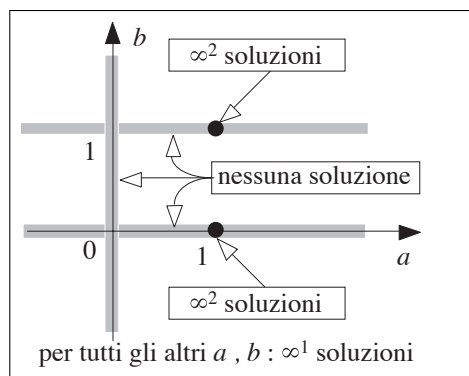
Esaminiamo ora il caso $b = -1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -a & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -2a & 0 & -1-a \end{array} \right)$$

Se $a \neq 0$, con $R_2 \leftrightarrow R_3$ diventa ridotta con tre pivot e il sistema ha perciò ∞^1 soluzioni.

Se $a = 0$, come abbiamo già visto, il sistema non ha soluzioni.

La situazione può essere schematizzata nel disegno al lato nel piano cartesiano $[a, b]$, in cui per ogni coppia di valori (a, b) è segnata la situazione.



Per quanto riguarda l'ultima domanda, come si vede:

- Se $a = 0$ il sistema non ha soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$.
- Se $a = 1$ il sistema ha sempre soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$.

E questi sono gli unici valori di a che soddisfino i criteri richiesti.

111.

	A	B	C	D	E	F
A	no	no	sì	sì	no	no
B	sì	sì	no	no	sì	no
C	no	no	sì	sì	no	no
D	no	no	no	no	no	no
E	no	no	no	no	no	sì
F	sì	sì	no	no	sì	no

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 13 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 13 & 5 & -8 & 1 \end{pmatrix} \quad B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} \quad C \cdot C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C \cdot D = \begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 7 & 9 \\ 9 & 13 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E \cdot F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$F \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad F \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad F \cdot E = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}$$

112. a. Falso. Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b. Falso. Controesempio: A e B come in a.

c. Falso. Controesempio: Se $A \cdot B = B$, allora $A \cdot B - B = 0$ che si può scrivere $A \cdot B - I \cdot B = 0$ cioè $(A - I) \cdot B = 0$. Basta quindi determinare due matrici non nulle il cui prodotto sia 0. Per esempio quelle di a.

$$\text{Scegliamo quindi } A - I = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ cioè } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Allora $A \cdot B = B$ e ovviamente A non è la matrice identica.

d. Vero. Come è noto, la somma è commutativa.

e. Vero. È la distributività del prodotto rispetto alla somma.

f. Falso. Controesempio: A e B come in a. e $C = 0$.

g. Vero. Basta aggiungere $-A$ ad entrambi i membri dell'equazione.

h. Vero. È una semplice verifica immediata.

i. Vero. Infatti: $A \cdot A^2 = A \cdot (A \cdot A) = (A \cdot A) \cdot A = A^2 \cdot A$.

j. Falso. Controesempio: A e B come in a., dato che $(A + B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$ e $A \cdot B \neq B \cdot A$.

k. Falso. Dato che $(A \cdot B)^2 = A \cdot B \cdot A \cdot B = A \cdot (B \cdot A) \cdot B$, mentre $A^2 B^2 = A \cdot A \cdot B \cdot B = A \cdot (A \cdot B) \cdot B$. Occorre quindi scegliere due matrici A e B tali che $A \cdot B \neq B \cdot A$. Le due matrici del caso a, però non vanno bene, perché $A \cdot B = 0$ e quindi si ha l'identità. Però scambiandole e scegliendo quindi le due matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ si ha, come si verifica eseguendo i prodotti, un controesempio.

l. Falso. Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- m. Falso. Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- n. Vero. Infatti, in questo caso A è l'inversa di sé stessa.
- o. Falso. Controesempio: A e B come in a. , dato che $(A+B) \cdot (A-B) = A^2 - A \cdot B + B \cdot A + B^2$ e $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- p. Vero. Infatti $(A+I) \cdot (A-I) = A^2 - A \cdot I + I \cdot A + I^2$ e, diversamente dal caso precedente, A e I commutano.
113. a. Vero. Infatti: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
- b. Falso. Controesempio: $A = I$ e $B = -I$.
- c. Vero. Se infatti $A \cdot B = A \cdot C$, allora $A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot A \cdot C$ da cui $B = C$.
- d. Falso. Per esempio:
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 Allora: $(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- e. Falso. Controesempio: A e B come in d.
- f. Falso. Si ha:

$$(A^{-1}BA)^5 = \overbrace{(A^{-1}BA) \cdots (A^{-1}BA)}^{5 \text{ volte}} = A^{-1}B(A \cdot A^{-1})B(A \cdot A^{-1}) \cdots BA = A^{-1}BB \cdots BA = A^{-1}B^5A$$

 Se fosse $(A^{-1}BA)^5 = A^{-5}B^5A^5$ si avrebbe quindi $A^{-1}B^5A = A^{-5}B^5A^5$. Moltiplicando a sinistra per A^5 e a destra per A^{-1} si ottiene:
 $A^5 \cdot A^{-1}B^5 \cdot A \cdot A^{-1} = A^5 \cdot A^{-5} \cdot B^5 \cdot A^5 \cdot A^{-1}$ da cui $A^4 \cdot B^5 = B^5A^4$.
 Per avere un controesempio, bastano quindi due matrici A e B tali che A^4 e B^5 non commutino, per esempio A e B come in d.
- g. Vero. Per la dimostrazione confronta f.
- h. Vero. Infatti A e B^{-1} sono invertibili e il prodotto di matrici invertibili è invertibile.
- i. Falso. Come controesempio scegliamo A e B come in d. e poniamo $C = A \cdot B$. Allora si ha che $B = A^{-1} \cdot C$, mentre $C \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot A^{-1}$ che è diversa da B .
- j. Falso. Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
114. a. Se A è invertibile, si possono moltiplicare entrambi i membri dell'equazione a sinistra per A^{-1} e si ottiene:
 $A^{-1}AX = A^{-1}B$, da cui $X = A^{-1} \cdot B$
 Se A non è invertibile non si può dire niente sulla risolubilità o meno dell'equazione, senza conoscere A e B .
- b. Raccogliamo X a destra del primo membro: $(A+I) \cdot X = B$. Se $A+I$ è invertibile, si può moltiplicare l'equazione a sinistra per $(A+I)^{-1}$ e si ottiene: $X = (A+I)^{-1}B$
 Se $A+I$ non è invertibile non si può dire niente sulla risolubilità o meno dell'equazione, senza conoscere A e B .
- c. Raccogliamo X a destra del primo membro: $(A+B) \cdot X = C$. Se $A+B$ è invertibile, si può moltiplicare l'equazione a sinistra per $(A+B)^{-1}$ e si ottiene: $X = (A+B)^{-1}C$
 Se $A+B$ non è invertibile non si può dire niente sulla risolubilità o meno dell'equazione, senza conoscere A, B e C .
- d. Portiamo B a secondo membro e raccogliamo A a sinistra del primo membro:
 $A \cdot (XA + XB) = I - B$.
 Possiamo ancora raccogliere X a sinistra dell'espressione in parentesi e ottenere
 $A \cdot X \cdot (A+B) = I - B$.
 Se A e $A+B$ sono invertibili, si può moltiplicare l'equazione a sinistra per A^{-1} e a destra per $(A+B)^{-1}$ e ottenere $X = A^{-1}(I-B)(A+B)^{-1}$.
 Se A non è invertibile o $A+B$ non è invertibile non si può dire niente sulla risolubilità o meno dell'equazione, senza conoscere A e B .

- e. Sapendo che $A \cdot X + X \cdot B = C$, qualunque tentativo di moltiplicare a destra o a sinistra per A^{-1} o B^{-1} o $(A + B)^{-1}$ non riesce a isolare la matrice X a primo membro, per cui non è possibile dare matricialmente una espressione elementare per X senza conoscere A e B , né dare condizioni affinché l'equazione abbia soluzioni.
- f. Anche qui qualunque tentativo di isolare la matrice X a primo membro, fallisce, per cui non è possibile dare matricialmente un'espressione elementare per X senza conoscere A e B .
115. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, allora $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$. La matrice è nulla se, simultaneamente $\{a^2 + bc = 0; ab + bd = 0; ac + dc = 0; bc + d^2 = 0\}$.
 Conviene, innanzitutto esaminare la seconda equazione: $(a + d)b = 0$ dalla quale si deducono due possibilità:
- $b = 0$, nel qual caso dalle altre si trova subito $a = 0$ e $d = 0$ (nessuna condizione su c).
 Quindi le matrici del tipo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ sono tra quelle cercate.
 - $a + d = 0$, nel qual caso dalle altre si trova solo $a^2 + bc = 0$. Quindi anche le matrici del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ con $a^2 + bc = 0$ sono tra quelle cercate.
- In definitiva, tenendo presente che tra le matrici del secondo tipo rientrano anche quelle del primo tipo, si conclude sinteticamente che:
 Le matrici cercate sono tutte e sole quelle del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ con $a^2 + bc = 0$.
116. Per esempio $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
117. a. Se esistesse A^{-1} si avrebbe $A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot 0$ da cui $B = 0$.
- b. Il sistema omogeneo $A \cdot x = 0$ ha almeno una soluzione non nulla b , dato che $\rho(A) < n$.
 Poniamo quindi $B = (b \mid b \mid \dots \mid b)$. Allora $B \neq 0$ e $A \cdot B = 0$.
118. A Calcoliamo A^{-1} riducendo A e contemporaneamente I mediante l'algoritmo di Gauss.
- $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3]{R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3, R_1 \rightarrow R_1 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$
- $$R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$
- B La matrice B è a blocchi: basta invertire i singoli blocchi con l'algoritmo standard.
- $$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & -5/12 & 1/2 & 5/12 \\ 0 & 0 & 5/24 & -1/4 & 7/24 \end{pmatrix}$$
- C La matrice C è quasi diagonale. La si riduce a I dividendo ogni riga per l'elemento della diagonale. Per completare la riduzione occorre $R_1 \rightarrow R_1 - 5R_5$. Le stesse operazioni su I forniscono subito l'inversa.
- $$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$
- D La matrice è antidiagonale. Per ridurla occorre scambiare l'ordine delle righe e dividere ogni riga per il pivot. L'inversa è una matrice antidiagonale però con gli elementi scambiati e invertiti.
- $$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- E Matrice anti-a blocchi. Generalizzazione del caso precedente: si invertono e si scambiano i singoli blocchi
- $$E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & 5/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -4/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
119. a. Vera. È semplicemente il teorema di Binet.

- b. Falsa. Controesempio: $A = I$ e $B = I$. Allora $\det(A + B) = \det(2I) = 2^n$, mentre $\det(A) + \det(B) = \det(I) + \det(I) = 2$. Se $n \neq 1$ sono diversi.
- c. Vera. Infatti $1 = \det(I) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$ e quindi $1 = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$.
- d. Vera. Infatti $\det(A^{-1} \cdot B \cdot A) = \det(A^{-1}) \cdot \det(B) \cdot \det(A) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(B)$ (è possibile lo scambio perché ora si tratta di numeri e non di matrici). Dato che $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ (vedi problema precedente), si ottiene $\det(B)$.
- e. Vera. Infatti $\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) = (\det(A))^2$.
- f. Falsa. Infatti $-A$ si ottiene moltiplicando ciascuna delle n righe di A per -1 , quindi il suo determinante è il determinante di A moltiplicato per $(-1)^n$. Quindi, se n è pari e $\det(A) \neq 0$, allora $\det(A) = \det(-A)$ e quindi sono differenti. Se però n è dispari l'affermazione è vera.

120. A Si può osservare che $C_1 + C_3 = 2C_2$; questo implica che $\det(A) = 0$

B Sviluppiamo successivamente lungo R_3, R_2, R_3, C_1 :

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 7 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 7 \cdot 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 7 \cdot 5 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 7 \cdot 5 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot 2 = 280$$

C La matrice è a blocchi: il determinante è il prodotto dei determinanti dei singoli blocchi.

Dato che il secondo blocco ha determinante nullo, allora $\det(C) = 0$.

D La matrice è triangolare superiore a blocchi: gli elementi sopra i tre blocchi non intervengono nel calcolo del determinante, quindi:

$$\det(D) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 1 \cdot 1 = -2$$

E Basta sottrarre R_2 da R_1 e proseguire:

$$\begin{aligned} \det(E) &= \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 12 & 12 & 13 & 87 \\ 3 & -3 & 9 & 0 & 81 \\ 7 & 8 & -2 & 9 & 65 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} = 9 \det \begin{pmatrix} 1 & 12 & 12 & 13 \\ 3 & -3 & 9 & 0 \\ 7 & 8 & -2 & 9 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Cerchiamo di} \\ \text{azzerare l'ulti-} \\ \text{ma riga:} \end{array} \quad \begin{array}{l} C_1 \rightarrow C_1 - C_4 \\ C_2 \rightarrow C_2 + C_4 \\ C_3 \rightarrow C_3 - 3C_4 \end{array} \\ &= 9 \cdot \det \begin{pmatrix} -12 & 25 & -27 & 13 \\ 3 & -3 & 9 & 0 \\ -2 & 17 & -29 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 9 \cdot \det \begin{pmatrix} -12 & 25 & -27 \\ 3 & -3 & 9 \\ -2 & 17 & -29 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Cerchiamo di} \\ \text{azzerare la se-} \\ \text{conda riga:} \end{array} \quad \begin{array}{l} C_3 \rightarrow C_3 - 3C_1 \\ C_2 \rightarrow C_2 + C_1 \end{array} \\ &= 9 \cdot \det \begin{pmatrix} -12 & 13 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 15 & -23 \end{pmatrix} = 9 \cdot (-3) \cdot ((-12) \cdot (-23) - 9 \cdot (-2)) = 11718 \end{aligned}$$

131. a. Dato che la matrice completa è quadrata, conviene innanzitutto calcolarne il determinante, facilitandoci il compito tramite qualche operazione elementare sulle righe e sulle colonne.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 2 & 1+k & 2 \\ 2-k^2 & 1 & k+2 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & 1+k & 3+k \\ 2-k^2 & 1 & 3+k \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ k^2 & k & 0 \\ 2-k^2 & 1 & 3+k \end{pmatrix} = \\ &\quad C_3 \rightarrow C_3 + C_2 \quad R_2 \rightarrow R_2 - R_3 \\ &= (3+k) \det \begin{pmatrix} k & 1 \\ k^2 & k \end{pmatrix} = 0. \text{ Quindi il determinante è nullo qualunque sia } k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

In conclusione la matrice completa ha sempre caratteristica minore di 3; occorre quindi esaminare la caratteristica della matrice dei coefficienti:

La sottomatrice formata da R_1, R_2, C_1, C_2 ha determinante $\det \begin{pmatrix} k & 1 \\ 2 & 1+k \end{pmatrix} = k^2 + k - 2$ che si annulla per $k = 1, -2$. Quindi

Se $k \neq 1, -2$, allora $\varrho(A) = 2$ e di conseguenza anche $\varrho(A|b) = 2$ e quindi il sistema ha una soluzione.

Se $k = 1$ o $k = -2$, le ultime due righe sono rispettivamente $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$ e $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$.
Quindi in entrambi i casi il sistema non ha soluzioni.

131. b. Calcoliamo la caratteristica della matrice dei coefficienti iniziando col calcolo del suo determinante.

$$\det \begin{pmatrix} k+1 & 4 & -(1+k) \\ k^2 & k+1 & -k \\ -k & 1-3k & k^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} k+1 & 4 & 0 \\ k^2 & k+1 & k^2-k \\ -k & 1-3k & k^2-k \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} k+1 & 4 & 0 \\ k^2+k & 4k & 0 \\ -k & 1-3k & k^2-k \end{pmatrix}$$

$C_3 \rightarrow C_3 + C_1$ $R_2 \rightarrow R_2 - R_3$

Il determinante è 0 per ogni k . Quindi $\varrho(A) \leq 2$ per ogni k .

Può convenire ora calcolare il determinante di una sottomatrice 3×3 della matrice completa per esempio di quello costituito con C_1, C_2, C_4

$$\det \begin{pmatrix} k+1 & 4 & 1 \\ k^2 & k+1 & 1 \\ -k & 1-3k & 1 \end{pmatrix} = k + 2k^2 - 3k^3 \text{ ed è nullo per } k = 0, 1, -1/3.$$

Se $k \neq 0, 1, -1/3$, la matrice completa ha quindi caratteristica 3, mentre quella dei coefficienti ha caratteristica ≤ 2 , per cui il sistema non ha soluzioni.

Se $k = 0$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente ∞^1 soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se $k = 1$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema non ha evidentemente soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Se $k = -1/3$ occorre ridurre la matrice dei coefficienti:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2/3 & 4 & -2/3 & 1 \\ 1/9 & 2/3 & 1/3 & 1 \\ 1/3 & 2 & 1/9 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - (1/6)R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - (1/2)R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2/3 & 4 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 4/9 & 5/6 \\ 0 & 0 & 4/9 & 1/2 \end{array}\right)$$

Quindi anche per $k = -1/3$, il sistema non ha soluzioni.

Conclusione: Se $k = 0$, il sistema ha ∞^1 soluzioni, se $k \neq 0$, non ne ha.

131. c. Conviene innanzitutto calcolare il determinante della matrice completa, sviluppandolo lungo l'ultima colonna (quella dei termini noti):

$$\det \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ k-1 & k & 2 & 2k \\ 4 & 0 & k-2 & 0 \end{pmatrix} = 2k \cdot \det \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & k-2 \end{pmatrix} = 2k(2k^2 - 6k)$$

Il determinante si annulla quindi per $k = 0, 3$. Per valori diversi da $k = 0$ e $k = 3$, quindi $\varrho(A|b) = 4$, mentre $\varrho(A) \leq 3$ e il sistema non ha soluzioni.

Se $k = 0$, il sistema è omogeneo e, mediante semplici operazioni elementari, si vede che ha tre pivot, quindi l'unica soluzione banale.

Se $k = 3$, sempre mediante semplici operazioni elementari, si vede che compare un'equazione incompatibile, per cui il sistema non ha soluzioni.

Conclusione: Se $k = 0$, il sistema ha una soluzione, se $k \neq 0$, non ne ha.

132. Come pivot per la prima colonna va bene 3, quindi iniziamo la riduzione eseguendo le operazioni elementari $R_3 \rightarrow R_3 - (1/3)R_1$ e $R_4 \rightarrow R_4 - (2/3)R_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & k-1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & k-2/3 & k \end{array}\right) \begin{array}{l} 4 \text{ va bene come pivot per la seconda colonna quindi:} \\ R_3 \rightarrow R_3 - (1/4)R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k-7/12 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & k-2/3 & k \end{array}\right)$$

A questo punto la riduzione mediante massimo pivot non è più possibile (dipende da a) né conveniente, per cui calcoliamo $\det(A)$ (A matrice dei coefficienti):

$\det(A) = 3 \cdot 4 \cdot ((k-7/12)(k-2/3) - 5/36) = 12k^2 - 15k + 3$. Pertanto se $k \neq 1$ e $k \neq 1/4$, allora $\det(A) \neq 0$, il sistema è di Cramer e ammette una e una sola soluzione.

$$\text{Se } k = 1: \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5/12 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{array} \right) R_4 \rightarrow R_4 - (5/4)R_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5/12 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Il sistema è ridotto, ha tre incognite pivotali e quindi ∞^1 soluzioni.

$$\text{Se } k = 1/4: \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/3 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & -5/12 & 1/4 \end{array} \right) R_4 \rightarrow R_4 + R_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/3 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{array} \right).$$

Il sistema è ridotto e evidentemente non ha soluzioni.

Conclusione: Se $k = 1$: ∞^1 soluzioni.

Se $k = 1/4$: nessuna soluzione.

In tutti gli altri casi una e una sola soluzione.

133. a. Riduciamo la matrice completa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2k-1 \\ 1 & k & 1 & k \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2k-1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1+k-2k^2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2k-1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 1-k \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & 2-2k^2 \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \quad R_3 \rightarrow R_3 + R_2$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - kR_1$$

Gli elementi della diagonale si annullano per $k = 1$ e per $k = -2$. Quindi:

Se $k \neq 1, -2$, la matrice è ridotta con tre pivot e il sistema ha una soluzione.

Se $k = 1$, le ultime due righe sono nulle e quindi il sistema ha un pivot e ∞^2 soluzioni.

Se $k = -2$, l'ultima riga è $(0 \ 0 \ 0 \mid -6)$, quindi il sistema non ha soluzioni.

133. b. Il minore incorniciato della matrice dei coefficienti $\left(\begin{array}{cc|c} k^2 - k + 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & k^2 - k \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} 1 \\ k \end{array} \right)$ è nullo per $k = 0, 1$. Quindi:

Se $k \neq 0, 1$, allora $\rho(A) = 2$ e di conseguenza anche $\rho(A|b) = 2$ e quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Se $k = 0$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema non ha evidentemente soluzioni.

Se $k = 1$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente ∞^2 soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

133. c. Scriviamo la matrice e iniziamo l'algoritmo gaussiano:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & k \\ 2 & k-1 & -1 & -1 \\ k & 3 & k+1 & k+1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - (k/2)R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & k \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ k & 3 - k^2/2 & k + 1 - k/2 & k + 1 - k/2 \end{array} \right)$$

La seconda e la terza equazione si possono scrivere come $\{y = k; y = 2\}$, quindi:

Se $k \neq 2$ il sistema non ha soluzioni.

Se $k = 2$, le tre ultime equazioni sono proporzionali e quindi il sistema ha una soluzione.

133. d. Guardando la matrice completa del sistema, si vede che è più semplice, creare degli zeri nella terza colonna invece che nella prima, mediante operazioni elementari. Per questo non è neanche necessario scambiare le colonne:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 1 & -k \\ -1 & k & -1 & 1 \\ k-2 & 2k-1 & -1 & k^2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 1 & -k \\ k-1 & k-1 & 0 & 1-k \\ 2k-2 & 2k-2 & 0 & k^2-k \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 1 & -k \\ k-1 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & k^2+k-2 \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \quad R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + R_1$$

Se $k \neq -2, 1$, il sistema non ha soluzioni, perché il termine noto $k^2 + k - 2 \neq 0$.

Se $k = -2$, le matrici completa e incompleta hanno caratteristica 2 perché è non nullo il minore inquadato, quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & \boxed{-1} & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Se $k = 1$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente ∞^2 soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

133. e. Usiamo come primo pivot quello incorniciato di R_3 che non dipende da k :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 & k & 2 \\ \boxed{1} & -1 & 2k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ \updownarrow \\ R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2k & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - kR_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 - 2k^2 & k & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 - 2k & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Scambiamo ora due righe per usare il pivot inquadato che non dipende da k .

$$\begin{array}{l} R_2 \\ \downarrow \\ R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 - 2k^2 & k & 2 \\ 0 & 1 & 2 - 2k & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 - kR_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - 2k^2 - k & 0 & 2 - k \\ 0 & 0 & 1 - 2k & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Le due ultime equazioni sono $\begin{cases} (1 - 2k^2 - k)z = 2 - k \\ (1 - 2k)z = 0 \end{cases}$

Il coefficiente $1 - 2k^2 - k$ si annulla per $k = -1, 1/2$ e il coefficiente $1 - 2k$ per $k = 1/2$.

Se $k \neq -1, 1/2$, allora le due ultime equazioni sono $\left\{ z = \frac{2 - k}{1 - 2k^2 - k}; z = 0 \right\}$, quindi occorre che sia $k = 2$, altrimenti non ci sono soluzioni.

Se $k = 2$, le ultime due righe sono $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right)$, la matrice è ridotta e il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Se $k = -1$, la terza riga è $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \mid 1)$, quindi il sistema non ha soluzioni.

Se $k = 1/2$, la terza riga è $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \mid 3/2)$, quindi il sistema non ha soluzioni.

Conclusione: Se $k = 2$, il sistema ha ∞^1 soluzioni, se $k \neq 2$, non ne ha.

133. f. Effettuiamo qualche operazione elementare sulle righe della matrice completa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 2k+1 & k & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k+1 & 2k & k \\ k & k & -k & k \end{array} \right) R_4 \rightarrow R_4 - R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} k & 2k+1 & k & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k+1 & 2k & k \\ 0 & -k-1 & -2k & k-1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ \updownarrow \\ R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ k & 2k+1 & k & 1 \\ 0 & k+1 & 2k & k \\ 0 & -k-1 & -2k & k-1 \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - kR_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k+1 & 2k & 1 \\ 0 & k+1 & 2k & k \\ 0 & -k-1 & -2k & k-1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k+1 & 2k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{array} \right)$$

Quindi perché il sistema abbia soluzioni occorre che $k = 0$ e contemporaneamente $k - 1 = 0$.

Questo non è possibile, quindi:

Il sistema non ha soluzioni per alcun $k \in \mathbb{R}$

134. a. Si può iniziare con l'algoritmo gaussiano:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & b \\ -4 & a & 4 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 4R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & b-1 \\ 0 & a+8 & -4 & 6 \end{array} \right)$$

A questo punto è possibile calcolare il determinante della matrice dei coefficienti che è $4 - a$.

Di conseguenza, se $a \neq 4$, il sistema è di Cramer e ha un'unica soluzione, qualunque sia b .

Se $a = 4$, riduciamo ulteriormente la matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & b-1 \\ 0 & 12 & -4 & 6 \end{array} \right) R_3 \rightarrow R_3 + 4R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 4b+2 \end{array} \right)$$

Quindi il sistema ha soluzioni e ne ha ∞^1 , solo se $b = -1/2$.

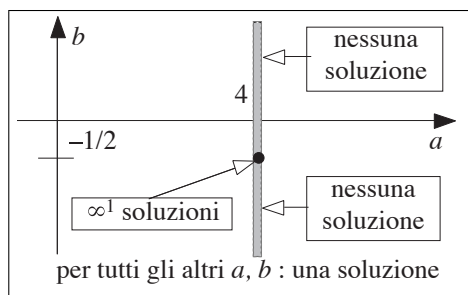
In conclusione:

Se $a \neq 4$: una soluzione.

Se $a = 4$ e $b \neq -1/2$: nessuna soluzione.

Se $a = 4$ e $b = -1/2$: ∞^1 soluzioni.

La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.



134. b. Iniziamo l'algoritmo gaussiano:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & b & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & a+2 & 1 \\ 0 & b-2a & -1 \end{array} \right)$$

A questo punto conviene calcolare il determinante della matrice completa.

Si ha: $\det(A|b) = a - b - 2$.

Se questo determinante è diverso da 0, cosa che accade se $b \neq a - 2$, allora il sistema non ha soluzioni, perché $\rho(A|b) = 3$, mentre $\rho(A) \leq 2$.

Vediamo ora cosa succede se $b = a - 2$. Sostituendo b , la terza equazione è proporzionale alla seconda e può essere trascurata, quindi la matrice del sistema è $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & a+2 & 1 \end{array} \right)$.

È quindi chiaro che se $a \neq -2$, la matrice è ridotta e il sistema ha una soluzione, mentre, se $a = -2$ (e quindi $b = -4$), l'ultima equazione è incompatibile.

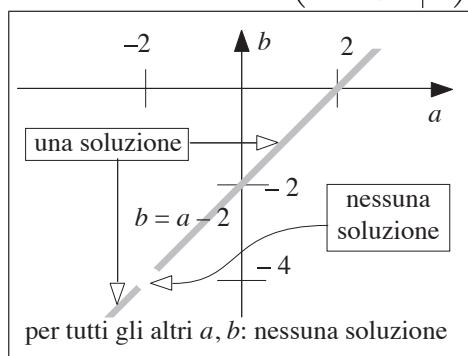
In conclusione:

Se $b \neq a - 2$: nessuna soluzione.

Se $b = a - 2$ e $a \neq -2$: una soluzione.

Se $a = -2$ e $b = -4$: nessuna soluzione.

La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.



134. c. Conviene creare degli zeri nella seconda colonna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & -1 & 1 \\ -1 & b & 0 & 1 \\ 2 & b & -2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & -1 & 1 \\ -1-a & 0 & 1 & 0 \\ 2-a & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

A questo punto conviene calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

Si ha: $\det(A) = b \cdot (2a - 1)$.

Se questo determinante è diverso da 0, cosa che accade se $a \neq 1/2$ e $b \neq 0$, allora il sistema ha una soluzione, perché è un sistema di Cramer.

Se $a = 1/2$, l'ultima riga può essere trascurata e la matrice ha caratteristica 2 per ogni b , perché è non nullo il minore inquadro, quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Se $b = 0$, la matrice dei coefficienti ha caratteristica sempre 2 perché è non nullo il minore inquadro.

L'unico minore significativo di ordine 3 della matrice completa (quello formato da C_1, C_3, C_4) ha determinante $2a - 1$.

Pertanto, se $a \neq 1/2$ (e sempre $b = 0$), allora $\rho(A|b) = 3$ e il sistema non ha soluzioni, mentre se $a = 1/2$ ne ha ∞^1 , come già visto sopra.

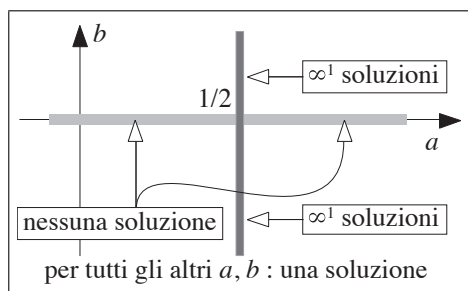
In conclusione:

Se $a \neq 1/2$ e $b \neq 0$: una soluzione.

Se $a = 1/2$: ∞^1 soluzioni per ogni b .

Se $a \neq 1/2$ e $b = 0$: nessuna soluzione.

La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.



134. d. Conviene creare degli zeri nella colonna C_2 che non dipende da parametri:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ b & 0 & a & a \\ a-1 & -1 & 0 & a \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1-2a & 0 & -1 & -2a \\ b & 0 & a & a \\ 2a-1 & 0 & 1 & 2a \end{array} \right)$$

L'ultima riga può essere trascurata in quanto proporzionale alla seconda. Il determinante della matrice dei coefficienti è $a - 2a^2 + b$, quindi:

Se $b \neq 2a^2 - a$ il sistema ha una soluzione, perché è un sistema di Cramer.

Se $b = 2a^2 - a$ sostituiamo b (dato che è difficile esplicitare a dall'equazione $b = 2a^2 - a$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1-2a & 0 & -1 & -2a \\ 2a^2-a & 0 & a & a \end{array} \right) \text{ Il minore inquadro è diverso da 0, quindi } \varrho(A) = 2.$$

Per calcolare $\varrho(A|b)$ si può considerare l'unica sottomatrice di $(A|b)$ (oltre A) che lo contiene, quella formata da C_2, C_3, C_4 . Il suo determinante è $-a + 2a^2$ ed è nullo per $a = 0, 1/2$. In questi due casi, per il teorema di Kronecker, $\varrho(A|b) = 2$, altrimenti è 3.

In conclusione:

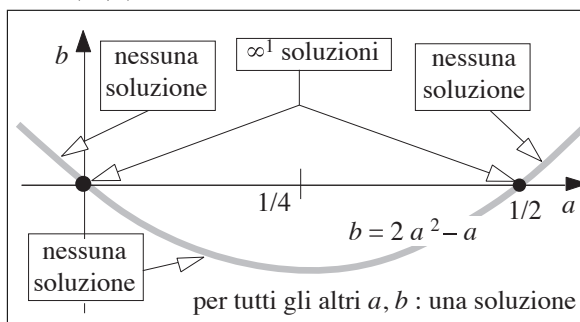
Se $b \neq 2a^2 - a$: una soluzione.

Se $b = 2a^2 - a$ e $a \neq 0, 1/2$: nessuna soluzione.

Se $a = 0$ e $b = 0$: ∞^1 soluzioni.

Se $a = 1/2$ e $b = 0$: ∞^1 soluzioni.

Notiamo che $b = 2a^2 - a$ è la parabola di vertice $(1/4, -1/8)$ passante per $(0, 0)$ e $(1/2, 0)$. La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.



134. e. Eseguiamo un'operazione elementare:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & b & b \\ a & 1 & 1 & 2 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array} \right) R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & b & b \\ 0 & 0 & 1-b & 2-b \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è $a \cdot b \cdot (b-1)$, quindi se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e $b \neq 1$, allora il sistema ha una soluzione, perché è un sistema di Cramer.

Esaminiamo quindi i tre casi particolari:

Se $a = 0$, calcoliamo il determinante dell'unica sottomatrice 3×3 significativa della matrice completa: Quindi, se $b \neq -2, 1$, $\varrho(A|b) = 3$, mentre $\varrho(A) = 2$, quindi il sistema non ha soluzioni.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b & b \\ 0 & 1-b & 2-b \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix} = b^2 + b - 2$$

Se $b = -2$ (sempre $a = 0$): $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array} \right)$ e il

sistema ha ∞^1 soluzioni. Il caso $b = 1$ (e $a = 0$) può venire esaminato nel sottocaso $b = 1$.

Se $b = 0$ la matrice è quella a lato ed il sistema non ha soluzioni, qualunque sia a .

Se $b = 1$ la matrice è quella a lato ed il sistema non ha soluzioni, qualunque sia a .

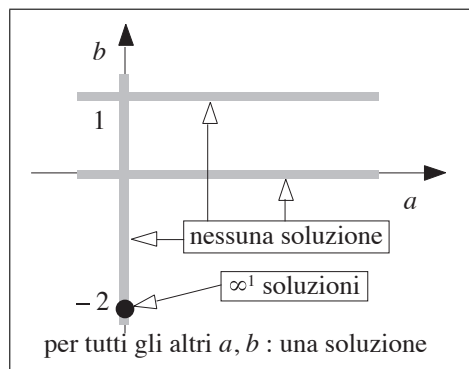
In conclusione:

Se $a \neq 0, b \neq 0, b \neq 1$: una soluzione.

Se $a = 0$ e $b = -2$: ∞^1 soluzioni.

Se $a = 0$ e $b \neq -2$: nessuna soluzione.

Se $b = 0$ o $b = 1$: nessuna soluzione.



La situazione può essere schematizzata nel disegno sopra.

141.A. Riduciamo finché è possibile la matrice:

$$\begin{pmatrix} k & 2 & 3 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ k & 0 & k & -k \\ -k & 2 & 1 & 3k \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} k & 2 & 3 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & -2 & k-3 & -k-1 \\ 0 & 4 & 4 & 3k+1 \end{pmatrix}$$

A questo punto conviene calcolare il determinante di A :

$\det(A) = k(3k^3 - 4k^2 - k + 2)$. Il determinante si annulla per $k = 0$ e per k soddisfacente l'equazione di terzo grado $3k^3 - 4k^2 - k + 2 = 0$.

Per tentativi, si scopre che $k = 1$ è una radice del polinomio $3k^3 - 4k^2 - k + 2 = 0$.

Dividendo $3k^3 - 4k^2 - k + 2 = 0$ per $k - 1$, si trova il quoziente $3k^2 - k - 2$ che si annulla per $k = 1, -2/3$. Quindi il determinante di A è nullo per $k = 0, 1, -2/3$. Di conseguenza:

Se $k \neq 0, 1, -2/3$, $\varrho(A) = 4$, perché l'unico minore di ordine 4 è non nullo.

Esaminiamo $k = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ La matrice ha tre righe proporzionali. Eliminando le ultime due si ottiene una matrice ridotta con due righe significative, quindi:

Se $k = 1$, $\varrho(A) = 2$.

Esaminiamo $k = -2/3$: $\begin{pmatrix} -2/3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2/3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -11/3 & -1/3 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ La matrice ha almeno un minore di ordine 3 non nullo, per esempio il determinante della matrice incorniciata, quindi:

Se $k = -2/3$, $\varrho(A) = 3$.

Per quanto riguarda la quarta colonna:

Se $k \neq 0, 1, -2/3$ la matrice non ha alcuna colonna che sia combinazione lineare delle altre. Per $k = 1$, c'è almeno un minore non nullo di ordine 2, per esempio quello incorniciato sopra, costituito da colonne che non comprendono la quarta.

Anche per $k = -2/3$, c'è un minore non nullo di ordine 3, costituito da colonne che non comprendono la quarta, per esempio quello già considerato in precedenza. Quindi:

Se $k = 1, -2/3$ la 4^a colonna è combinazione lineare delle altre colonne, altrimenti no.

141.B. Calcoliamo il determinante di B previa qualche operazione elementare:

$$\begin{pmatrix} 0 & k+2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & k+1 \\ k+1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & k+1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 + (k+1)R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & k+2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 2 & k & (k+1)^2 \\ 0 & 2 & k & 1-k \end{pmatrix} \begin{matrix} R_4 \rightarrow R_4 - R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & k+2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 2 & k & (k+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & -k^2-3k \end{pmatrix}$$

Ora il determinante è immediato sviluppando successivamente lungo la prima colonna e l'ultima riga ed è: $(-k^2 - 3k)(k+2)k$. Il determinante è nullo per $k = 0, -2, -3$, quindi:

Se $k \neq 0, -2, -3$, la caratteristica è 4, perché l'unico minore di ordine 4 è non nullo.

Esaminiamo $k = 0$: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Eliminando l'ultima riga che è nulla e la terza riga che è uguale alla prima si ottiene una matrice con un minore di ordine due non nullo, quindi:

Se $k = 0$, $\varrho(B) = 2$.

Esaminiamo $k = -2$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ La matrice ha almeno un minore di ordine 3 non nullo, per esempio il determinante della matrice incorniciata, quindi:

Se $k = -2$, $\varrho(B) = 3$.

Esaminiamo $k = -3$:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Se $k = -3$, $\rho(B) = 3$.

Per quanto riguarda la quarta colonna:

Se $k \neq 0, -2, -3$ la matrice non ha alcuna colonna che sia combinazione lineare delle altre.

Per $k = 0$, c'è almeno un minore non nullo di ordine 2, per esempio quello incorniciato sopra, costituito da colonne che non comprendono la quarta.

Per $k = -2$, si nota subito che $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, quindi non c'è alcun minore non nullo di ordine 3 costituito da colonne che non comprendono la quarta, che pertanto non è combinazione lineare delle altre.

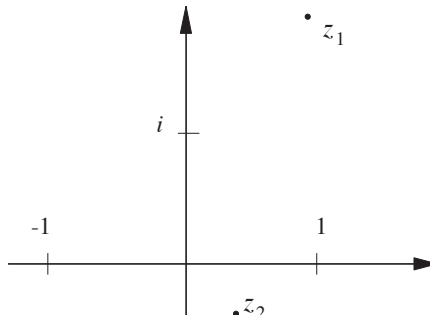
Per $k = -3$, c'è un minore non nullo di ordine 3, costituito da colonne che non comprendono la quarta, per esempio quello già considerato in precedenza.

Quindi:

Se $k = 0, -3$ la 4ª colonna è combinazione lineare delle altre colonne, altrimenti no.

142. Guardiamo i minori 3×3 della matrice: Il primo (C_1, C_2, C_3) ha determinante zero, per cui una delle colonne è combinazione lineare delle altre. Basta risolvere il sistema
$$\begin{cases} a &= 4 \\ a - b &= 1 \end{cases}$$
 (ottenuto da $aC_1 + bC_2 = C_3$) per scoprire che $4C_1 + 3C_2 = C_3$ e quindi C_1, C_2, C_3 sono ciascuna combinazione lineare delle altre due. Svolgendo un conto analogo su C_1, C_2, C_4 si scopre che $3C_1 + 2C_2 = C_4$. Il determinante di C_1, C_2, C_5 è diverso da zero, pertanto C_5 non è combinazione lineare di C_1 e C_2 e quindi neanche di tutte le altre, perché, se lo fosse, dalle relazioni tra C_1, C_2, C_3, C_4 si dedurrebbe che C_5 è combinazione lineare di C_1 e C_2 .

2. COMPLESSI: Numeri complessi

- F 201. Nel piano di Argand-Gauss disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$.
- $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 2 \text{ e } |z| < 4\}$
 - $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1 + i)| < 3\}$
 - $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z) \text{ e } |z - i| = 2\}$
 - $\{z \in \mathbb{C} : z^3 \in \mathbb{R}\}$
- C 202. Altri sottoinsiemi di $\mathbb{C}$ da disegnare nel piano di Argand-Gauss.
- $\{z \in \mathbb{C} : iz^3 \in \mathbb{R}\}$
 - $\{z \in \mathbb{C} : i + \bar{z} \in \mathbb{R}\}$
 - $\{z \in \mathbb{C} : (1 + \bar{z})/|z| = 1\}$
 - $\{z \in \mathbb{C} : |z + 2\bar{z}| < 9\}$
 - $\{z \in \mathbb{C} : |z + 2 - i| < |z - 1 + 3i|\}$
 - $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \text{ e } \operatorname{Arg}(z^4) = \operatorname{Arg}(-z)\}$
 - $\{z \in \mathbb{C} : z^6 = ib \text{ per un } b \in \mathbb{R}, b < 0\}$
 - $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 4 \text{ e } \operatorname{Re}(z) \geq 0 \text{ e } \operatorname{Arg}(z^6) = \operatorname{Arg}(iz^2)\}$
- F 203. Determinare parte reale, parte immaginaria, modulo e un argomento dei seguenti numeri complessi e disegnarli nel piano di Gauss.
- $-1 + \sqrt{3}i$
 - $\frac{1+i}{-3+2i}$
 - $-\frac{1}{\sqrt{2}}$
 - $\frac{(1+i)^5}{(1+\sqrt{3}i)^6}$
 - $\frac{i}{(1+2i)^2}$
 - $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{40}$
- C 204. Altri numeri complessi da disegnare nel piano di Gauss, dopo aver determinato parte reale, parte immaginaria, modulo e un argomento.
- $\frac{(\sqrt{3}+i)^{605}}{2^{600}(1-i)^{7i^{33}}}$
 - $(1 - \sqrt{3}i)^9 - (1+i)^6$
 - $e^{1726\pi i/3}$
 - e^{1+i}
 - $\sin(\pi/5) - i \cos(\pi/5)$
- F 205. In $\mathbb{C}$, sono dati graficamente, cioè mediante disegno nel piano di Argand-Gauss, il numero z_1 di modulo 2 e il numero z_2 di modulo $1/2$.
- Disegnare, mediante operazioni grafiche, i numeri $\bar{z}_1, -z_1, z_1^{-1}$ e le soluzioni dell'equazione $x^6 = z_1$.
 - Disegnare, mediante operazioni grafiche, i numeri $\bar{z}_2, -z_2, z_2^{-1}$ e le soluzioni dell'equazione $x^6 = z_2$.
 - Disegnare infine anche il prodotto $z_1 \cdot z_2$.
- 
- T 206. Sia $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$
- Siano z_1 e z_2 le radici quadrate di z . Provare che $z_1 \cdot \bar{z}_2$ è sempre un numero reale.
 - Siano z_3, z_4 le altre due radici cubiche di z^3 (oltre z). Provare che si ha : $z_3 \cdot z_4 = z^2$
- A 207. a. Sia $z_0 = (\sqrt{3}+i)/2$. Determinare il minimo $n \in \mathbb{N}$ per cui z_0 sia radice dell'equazione $z^n = 1$.
b. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{C}$ l'equazione $z^{10} = a$ ha almeno una soluzione puramente immaginaria.
- F 208. Determinare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ delle seguenti equazioni e disegnarle nel piano di Argand-Gauss.
- $z^3 = i$
 - $z^3 = -1 + i$
 - $z^3 = -1 + 2i$
 - $(z+i)^3 = i$
 - $z^3 = (1+i)^3$
 - $z^4 = iz^2$
 - $z^5 = z$
 - $z^2 = 8i$
 - $iz^2 + 2z - (2+i) = 0$
 - $e^z = 1$
 - $e^z = -1$

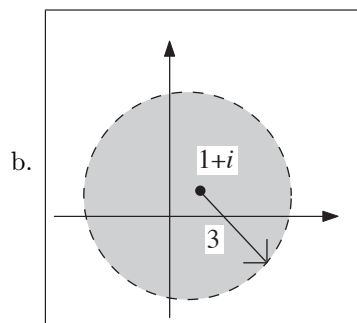
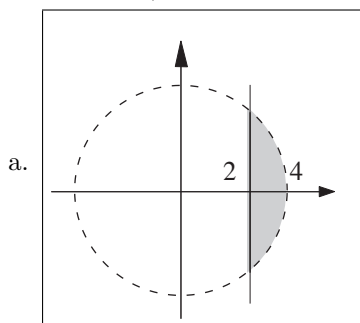
- C 209. Determinare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ delle seguenti equazioni e disegnarle nel piano di Argand-Gauss.

a. $iz^2 - 2z + \sqrt{3} = 0$	b. $iz^3 = \frac{(\sqrt{3} + i)^6}{1 + i}$	c. $e^z = 0$
d. $e^z = (\sqrt{2}/2)(1 + i)$	e. $e^z = 1 + i$	f. $ez^2 = 1$
g. $ez^2 + 2z + 1 = 1$	h. $\sin(z) = 0$	i. $\cos(z) = 2$

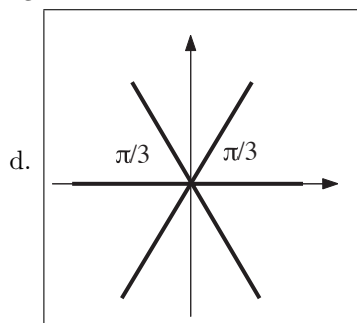
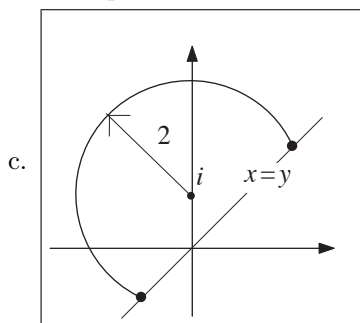
2. COMPLESSI: Polinomi

- F 211. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado 2 avente 4 e $5/7$ come radici.
- F 212. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tale che : $P(1) = P(2) = 0$, $P(0) = 1$ e $\deg(P) = 2$.
- T 213. Dimostrare che se P e Q sono due polinomi e $\deg(P) = n$ e $\deg(Q) = m$, allora:
 $\deg(P + Q) \leq \max(m, n)$ $\deg(P \cdot Q) = n + m$.
- T 214. Sia $z \in \mathbb{C}$ e siano $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ le sue radici n -esime ($n \geq 2$). Provare che:
 $z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} = 0$
- F 215. Verificare che 1 è radice di $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$ e trovare le altre due radici.
- F 216. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado minimo avente come radici $1 + i$ e i e tale che $P(1) = 3$.
- F 217. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado minimo avente come radici $1 + i$ e i e tale che $P(1) = 3$.
- C 218. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado 3 avente $1 + i$ come radice e scomporlo in fattori di grado minimo a coefficienti reali.
- C 219. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado 3 tale che $P(1 + i) = 0$, $P(i) = 1$. Perché non ne esiste uno di grado 2 ?
- A 220. Scomporre in fattori a coefficienti reali di grado minimo i polinomi seguenti:
a. $P_1(x) = x^4 + 1$ b. $P_2(x) = x^2 + 2x + 4$
c. $P_3(x) = x^5 - 1$ d. $P_4(x) = x^6 - x^2$
- A 221. Dire quanti fattori a coefficienti reali ha il polinomio $x^{27} - 3$.
- T 222. Sia $P(x) \in \mathbb{C}[x]$. Dimostrare che se tutte le radici di $P(x)$ hanno molteplicità due, allora $P(x)$ è il quadrato di un altro polinomio di $\mathbb{C}[x]$. Dire quale ulteriore ipotesi occorre per provare la stessa cosa in $\mathbb{R}[x]$.
- C 223. a. Può un polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ a coefficienti non tutti reali avere una radice reale ?
b. Può un polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ a coefficienti non tutti reali avere radici tutte reali ?
c. Può un polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ avere due radici coniugate con diversa molteplicità ?
d. Può un numero complesso non reale avere una radice n -esima reale ?
- F 224. Constatato che 1 è radice di $x^{11} - 5x^{10} + 10x^9 - 10x^8 + 5x^7 - x^6 + x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x$, determinarne la molteplicità.
- C 225. Sia $P(x) = x^{31} - 2x^5 + ax + b \in \mathbb{C}[x]$. Determinare $a, b \in \mathbb{C}$ tali che i sia radice di $P(x)$ almeno con molteplicità 2.

201. a. I numeri complessi z con $\operatorname{Re}(z) \geq 2$ sono quelli a destra della retta verticale (retta compresa). Quelli con modulo minore di 4 sono all'interno della circonferenza di centro 0 e raggio 4 (circonferenza esclusa). Quindi l'insieme è quello in grigio, arco (ed estremi dell'arco) escluso, ma segmento (senza estremi) compreso.
- b. I numeri complessi z tali che $|z - (1 + i)| < 3$ sono quelli che nel piano hanno distanza da $1 + i$ minore di 3, quindi sono quelli all'interno della circonferenza di centro $1 + i$ e raggio 3 (circonferenza esclusa).

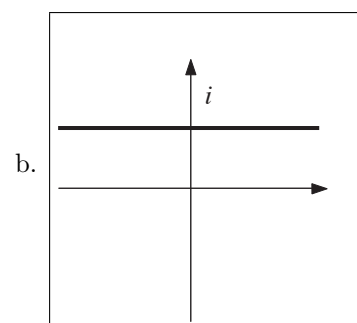
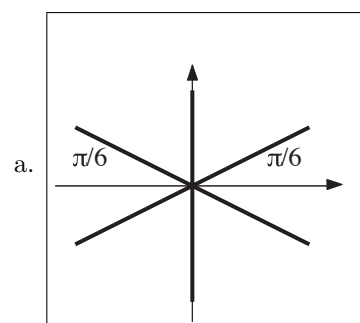


- c. I numeri complessi z con $\operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z)$ sono quelli al di sopra della bisettrice principale (retta compresa). Quelli tali che $|z - i| = 2$ sono sulla circonferenza di centro i e raggio 2. Quindi l'insieme è l'arco di circonferenza segnato (estremi compresi).
- d. Sia θ un argomento di z . Perché z^3 sia reale occorre che $\operatorname{Arg}(z^3) = k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{R}$. Ma $\operatorname{Arg}(z^3) = 3\theta$, quindi $\theta = k\pi/3$ con $k \in \mathbb{R}$. Si hanno perciò i numeri di argomento $0, \pi/3, 2\pi/3, \dots$, cioè sei semirette. Dato che poi anche 0 appartiene all'insieme, le sei semirette sono in pratica l'unione delle tre rette in grassetto.



202. a. Sia θ un argomento di z . Perché iz^3 sia reale occorre che $\operatorname{Arg}(iz^3) = k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{R}$, ma $\operatorname{Arg}(iz^3) = \operatorname{Arg}(i) + 3\theta = \pi/2 + 3\theta$, quindi si deve avere $k\pi = \pi/2 + 3\theta$ cioè $\theta = (k\pi - \pi/2)/3$ con $k \in \mathbb{R}$. Si hanno perciò i numeri di argomento $-\pi/6, \pi/6, \pi/2, \dots$, cioè sei semirette. Dato che poi anche 0 appartiene all'insieme, le sei semirette sono in pratica l'unione delle tre rette in grassetto.

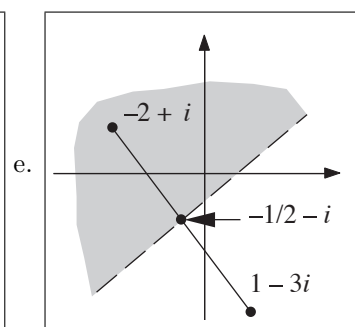
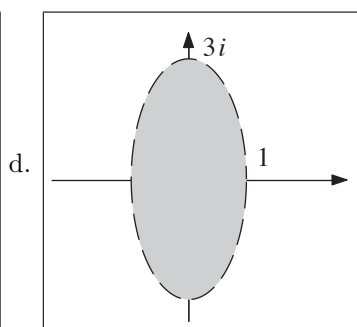
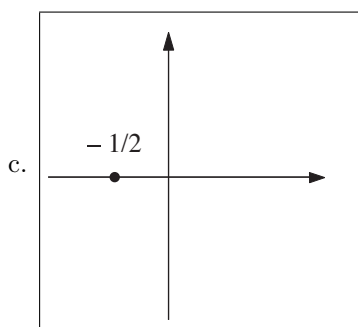
202. b. Poniamo $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Se $i + \bar{z} \in \mathbb{R}$, allora $i + a - ib \in \mathbb{R}$, cioè $a + (1 - b)i \in \mathbb{R}$. Di conseguenza si deve avere $b = 1$. L'insieme è quindi una retta.



202. c. Poniamo $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) e scriviamo $(1 + \bar{z}) = |z|$. Si ha: $1 + a - bi = \sqrt{a^2 + b^2}$, cioè $a + 1 + \sqrt{a^2 + b^2} + bi = 0$. Allora $b = 0$ e $a + 1 + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$, cioè $a + 1 + |a| = 0$. Per $a > 0$ si trova $a = -1/2$, per $a < 0$ non si trova niente, quindi l'insieme è costituito dal solo numero $z = -1/2 + 0i = -1/2$

202. d. Poniamo $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). La disequaglianza $|z + 2\bar{z}| < 9$ diventa $|a + ib + 2a - 2ib| < 9$, cioè $|3a - ib| < 9$ o anche $\sqrt{9a^2 + b^2} < 9$ e $9a^2 + b^2 < 81$. Si tratta quindi dell'interno dell'ellisse $\frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{81} = 1$ che ha centro in 0 e semiassi di lunghezze rispettivamente 3 e 9. Il bordo è escluso perché la disequaglianza è stretta.

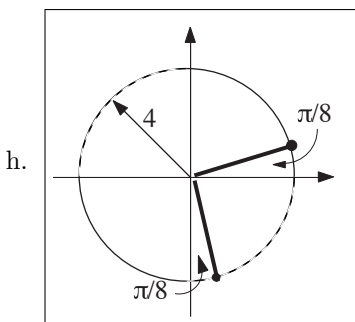
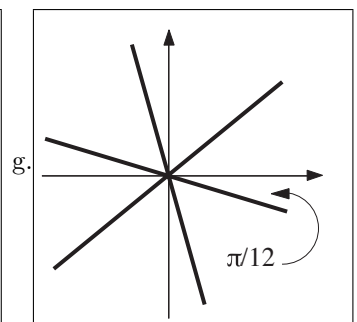
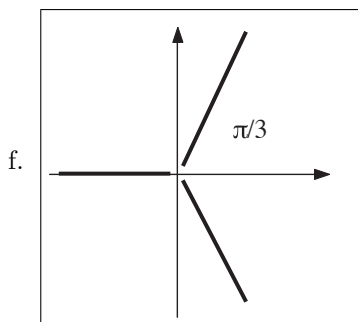
202. e. Sono i punti che hanno distanza da $-2 + i$ minore di quella da $1 - 3i$, quindi sono situati nel semipiano individuato dalla retta che è l'asse del segmento che ha come estremi i due numeri complessi. Il punto medio del segmento è $\frac{(-2 + i) + (1 - 3i)}{2} = -\frac{1}{2} - i$.



202. f. Sia θ un argomento di z . Allora $\text{Arg}(z^4) = 4\theta$ e $\text{Arg}(-z) = \theta + \pi$, quindi la condizione richiesta è che $4\theta = \theta + \pi + 2k\pi$ per $k \in \mathbb{R}$ (l'uguaglianza di argomenti è sempre a meno di multipli di $2k\pi$), da cui $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{3}$. Dando a k successivamente i valori 0, 1, 2, si ottengono $\theta = \pi/3, \pi, 5\pi/3$. Gli altri k forniscono argomenti equivalenti. In definitiva sono le tre semirette dei numeri coi tre argomenti. Lo 0 non appartiene all'insieme.

202. g. Sia θ un argomento di z . Allora $\text{Arg}(z^6) = 6\theta$ e il numero ib con $b < 0$ ha sempre argomento $-\pi/2$, quindi $6\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{R}$, da cui $\theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{6}$. In definitiva sono sei semirette. Dato che anche 0 fa parte dell'insieme, allora sono tre rette.

202. h. Sia θ un argomento di z . Allora un argomento di z^6 è 6θ , mentre un argomento di iz^2 è $\text{Arg}(i) + 2\theta = \pi/2 + 2\theta$. Affinché gli argomenti siano gli stessi, essi devono differire di $2k\pi$ ($k \in \mathbb{R}$), cioè $6\theta = \pi/2 + 2\theta + 2k\pi$, da cui $\theta = \pi/8 + k\pi/2$. Quindi i numeri z cercati hanno come possibili argomenti $\pi/8, 5\pi/8, 9\pi/8, 13\pi/8$ e sono situati su quattro semirette aventi come primo estremo 0. Dato che però si deve avere $\text{Re}(z) > 0$, escludiamo le semirette corrispondenti a $\theta = 5\pi/8, 9\pi/8$. Inoltre, poiché $|z| \leq 4$, restringiamo le semirette al disco di raggio 4 (bordo compreso). Escludiamo dall'insieme 0 che non ha argomento. In definitiva si hanno due segmenti (un estremo compreso, l'altro no).



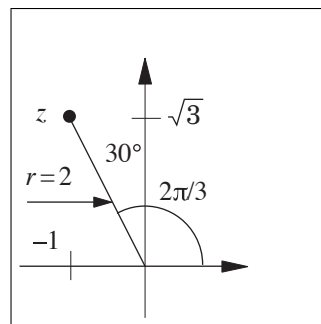
203. a. La parte reale e immaginaria sono -1 e $\sqrt{3}$. Il modulo è $\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$.

Per quanto riguarda l'argomento θ , si ha

$$\{\cos(\theta) = -1/2; \sin(\theta) = \sqrt{3}/2\} \text{ da cui } \theta = 2\pi/3.$$

Se si vuole calcolare l'argomento mediante l'arcotangente, occorre tenere conto che il numero è nel secondo quadrante e quindi: $\theta = \arctan(\sqrt{3}/(-1)) + \pi = 2\pi/3$

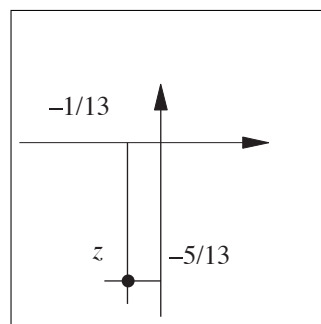
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= -1 & \operatorname{Im}(z) &= \sqrt{3} \\ |z| &= 2 & \theta &= 2\pi/3 \end{aligned}$$



$$203. \text{ b. Si ha: } \frac{1+i}{-3+2i} = \frac{(1+i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)} = \frac{-1-5i}{13}.$$

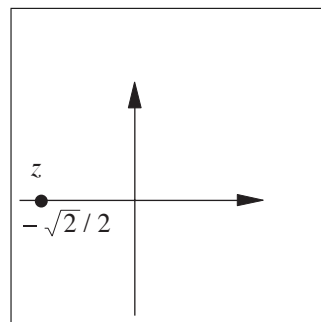
Da qui parte reale e parte immaginaria. Dato che il numero è nel terzo quadrante, un'argomento si può calcolare con l'arcotangente, togliendo però π .

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= -\frac{1}{13} & \operatorname{Im}(z) &= -\frac{5}{13} \\ |z| &= \sqrt{\frac{2}{13}} & \theta &= \arctan \frac{-5}{-1} - \pi \simeq -1.768 \simeq -101^\circ \end{aligned}$$



203. c. Il numero è reale negativo, quindi ha argomento π .

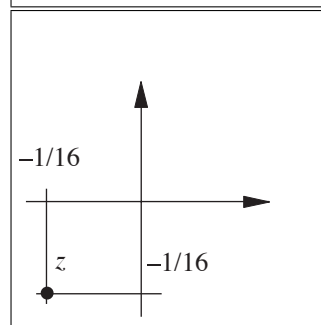
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} & \operatorname{Im}(z) &= 0 \\ |z| &= \frac{\sqrt{2}}{2} & \theta &= \pi \end{aligned}$$



203. d. $1+i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\pi/4$, mentre $1+\sqrt{3}i$ ha modulo 2 e argomento $\pi/3$.

Pertanto il numero in questione ha modulo $(\sqrt{2})^5/2^6$ e argomento $5(\pi/4) - 6(\pi/3) = -3\pi/4$ o anche l'equivalente $5\pi/4$. Quindi:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= -\frac{1}{16} & \operatorname{Im}(z) &= -\frac{1}{16} \\ |z| &= \frac{\sqrt{2}}{16} & \theta &= -\frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

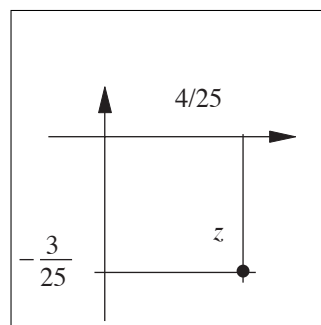


203. e. Conviene eseguire i calcoli algebricamente:

$$\frac{i}{(1+2i)^2} = \frac{i(1-2i)^2}{(1+2i)^2(1-2i)^2} = \frac{4-3i}{25}.$$

L'argomento può essere calcolato con l'arcotangente perché ci troviamo nel quarto quadrante.

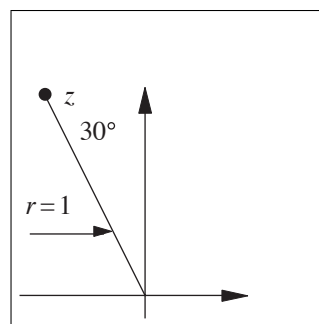
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= \frac{4}{25} & \operatorname{Im}(z) &= -\frac{3}{25} \\ |z| &= \frac{1}{5} & \theta &= \arctan(-4/3) \simeq -0.927 \simeq -53^\circ \end{aligned}$$



203. f. $1/2 - \sqrt{3}i/2$ ha modulo 1 e argomento $-\pi/3$.

La sua potenza 40-esima ha modulo 1 e argomento $-40\pi/3 = -39\pi/3 - \pi/3 = -13\pi - \pi/3 = -12\pi - 4\pi/3$ che è trigonometricamente equivalente a $-4\pi/3$ (dato che 12π è multiplo intero di 2π) e anche a $2\pi/3$. Perciò:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= -\frac{1}{2} & \operatorname{Im}(z) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ |z| &= 1 & \theta &= \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$



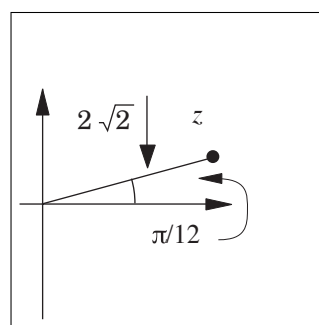
204. a. $\sqrt{3}+i$ ha modulo 2 e argomento $\pi/6$. Quindi $(\sqrt{3}+i)^{605}$ ha argomento $605\pi/6$ che è trigonometricamente equivalente a $5\pi/6$.

$1-i$ ha argomento $-\pi/4$. L'argomento di $(1-i)^7$ è quindi $-7\pi/4$.

$i^{33} = i^{32} \cdot i = i$ e ha argomento $\pi/2$.

L'argomento totale è $5\pi/6 + 7\pi/4 - \pi/2 = 25\pi/12$ trigonometricamente equivalente a $\pi/12$.

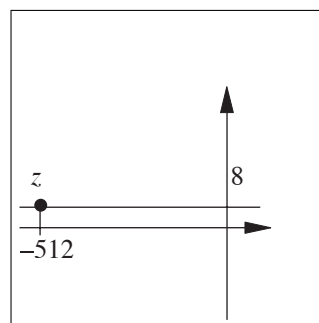
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) & \operatorname{Im}(z) &= 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ |z| &= 2\sqrt{2} & \theta &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$



204. b. Si ha:

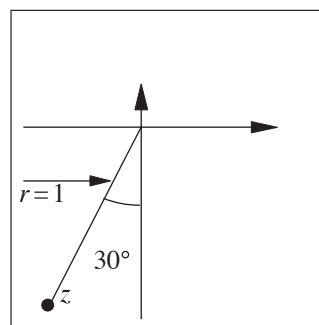
$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{3}i)^9 - (1 + i)^6 &= (2e^{-2\pi i/3})^9 - (\sqrt{2}e^{\pi i/4})^6 = \\ &= 2^9 e^{-3\pi i} - 2^3 e^{3\pi i/2} = -512 + 8i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= -512 & \operatorname{Im}(z) &= 8 \\ |z| &= \sqrt{262208} & \theta &= \arctan\left(-\frac{1}{64}\right) + \pi \end{aligned}$$



204. c. La divisione di 1726 per 3 ha quoto 575 e resto 1 da cui $1726 = 575 \cdot 3 + 1$ e $1726 \frac{\pi}{3} = 575 \cdot 3 \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 575\pi + \frac{\pi}{3}$ che è trigonometricamente equivalente a $-\pi + \pi/3$ cioè a $-2\pi/3$ (o a anche a $\pi + \pi/3 = 4\pi/3$). Quindi:

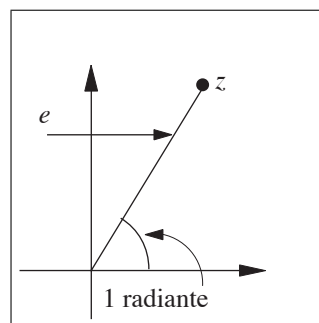
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= -\frac{1}{2} & \operatorname{Im}(z) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ |z| &= 1 & \theta &= -\frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$



204. d. Si scrive $e^{1+i} = e^1 \cdot e^i$ e questa è la forma esponenziale di un numero complesso avente come modulo e e come argomento il coefficiente di i nell'esponente di e , cioè 1 (radiante). Quindi:

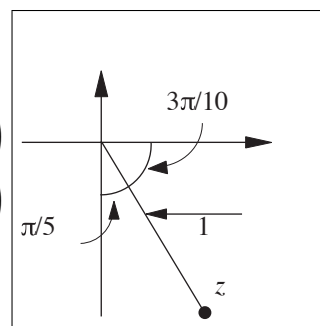
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= e \cdot \cos(1) & \operatorname{Im}(z) &= e \cdot \sin(1) \\ |z| &= e & \theta &= 1 \end{aligned}$$

(dove per 1 si intende sempre 1 radiante e cioè circa $57^\circ.17'...$)



204. e. Parte reale e parte immaginaria sono ovvie e il modulo è 1. Per quanto riguarda l'argomento θ , usando note formule trigonometriche:

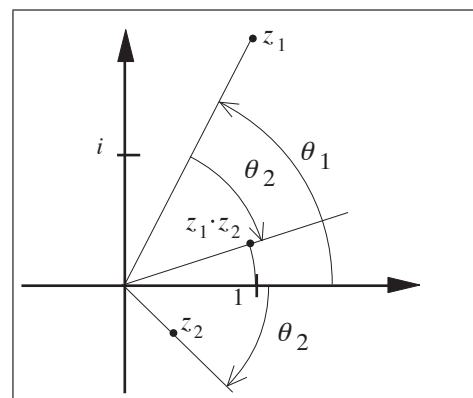
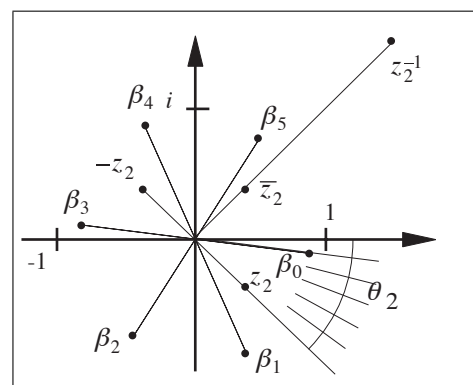
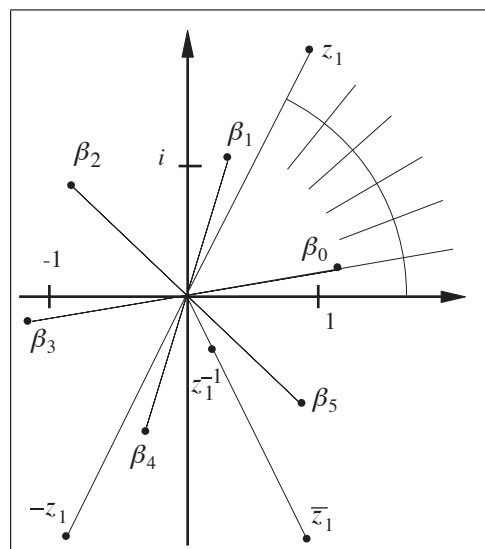
$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right) \\ \sin(\theta) &= -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right) \\ \operatorname{Re}(z) &= \sin(\pi/5) & \operatorname{Im}(z) &= \cos(\pi/5) \\ |z| &= 1 & \theta &= -\frac{3}{10}\pi\end{aligned}$$



205. Il problema va risolto in maniera grafica.

Valgono le seguenti considerazioni:

- a. Il numero $\bar{z}_1$ ha lo stesso modulo di z_1 , ma argomento opposto in segno. Quindi $\bar{z}_1$ è simmetrico di z_1 rispetto all'asse reale.
 - Il numero $-z_1$ ha lo stesso modulo di z_1 , ma argomento aumentato di π . Quindi $-z_1$ è simmetrico di z_1 rispetto all'origine.
 - Se $z_1 = re^{\theta i}$, allora $z_1^{-1} = r^{-1}e^{-\theta i}$, quindi z_1^{-1} ha lo stesso argomento di $\bar{z}_1$, ma il suo modulo è $1/2$.
 - Le radici seste di z_1 hanno argomento $\sqrt[6]{2}$ (di poco maggiore di 1). La prima radice β_0 si disegna dividendo per 6 l'argomento di z_1 . Le altre cinque si disegnano per simmetria, dato che dividono la circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt[6]{2}$ in 6 parti uguali.
- b. Per il numero z_2 valgono le stesse considerazioni fatte per z_1 .
 - Il numero $\bar{z}_2$ ha lo stesso modulo di z_2 , ma argomento opposto in segno. Quindi $\bar{z}_2$ è simmetrico di z_2 rispetto all'asse reale.
 - Il numero $-z_2$ ha lo stesso modulo di z_2 , ma argomento aumentato di π . Quindi $-z_2$ è simmetrico di z_2 rispetto all'origine.
 - Il numero z_2^{-1} ha lo stesso argomento di $\bar{z}_2$, ma il suo modulo è 2.
 - Le radici seste di z_2 hanno argomento $\sqrt[6]{1/2}$ che è di poco inferiore di 1. Come argomento di z_2 conviene prendere l'argomento *negativo* θ_2 . La prima radice β_0 si può trovare dividendo θ_2 per 6. Le altre cinque si disegnano per simmetria.
- c. Per disegnare $z_1 \cdot z_2$ occorre sommare gli argomenti di z_1 e di z_2 . Come sopra prendiamo l'argomento *negativo* θ_2 di z_2 che va quindi *sottratto* all'argomento *positivo* θ_1 di z_1 . Il modulo è il prodotto dei moduli, cioè 1.



206. a. Le radici quadrate di un numero complesso sono una opposta dell'altra e pertanto:
 $\text{Arg}(z_2) = \text{Arg}(z_1) + \pi$. Inoltre $\text{Arg}(\bar{z}_2) = -\text{Arg}(z_2)$. Pertanto:
 $\text{Arg}(z_1 \cdot \bar{z}_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(\bar{z}_2) = -\pi$. Avendo argomento $-\pi$, allora $z_1 \cdot \bar{z}_2$ è un numero reale negativo.

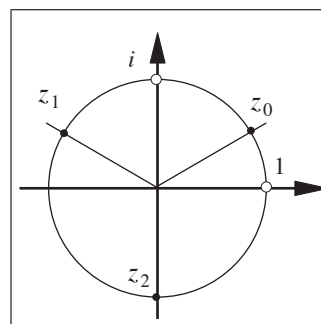
b. Sia θ un argomento di z . Allora z_1 e z_2 hanno lo stesso modulo r di z e argomenti che differiscono da quello di z per $2\pi/3$ e $-2\pi/3$, cioè $\theta + 2\pi/3$ e $\theta - 2\pi/3$. Quindi $z_1 \cdot z_2$ ha modulo r^2 e argomento $\theta + 2\pi/3 + \theta - 2\pi/3 = 2\theta$. Anche z^2 ha modulo r^2 e argomento 2θ , quindi coincidono.

207. a. Affinché $z_0 = (\sqrt{3} + i)/2$ sia radice di $z^n = 1$, occorre che $z_0^n = 1$. Ma $z_0 = e^{\pi i/6}$, quindi $z_0^n = e^{n\pi i/6}$. Perché sia 1 occorre che $n\pi i/6 = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{R}$). Come si vede subito, ciò accade per la prima volta per $n = 12$.

b. Se θ è un argomento di a . Le radici decime di a hanno parte reale $\cos \frac{\theta + 2k\pi}{10}$, quindi occorre che per almeno un k si abbia $\cos \frac{\theta + 2k\pi}{10} = 0$, cioè $\frac{\theta + 2k\pi}{10} = \pm \frac{\pi}{2}$ da cui $\theta = \pm 5\pi - 2k\pi$. Gli unici a con questi argomenti sono quelli reali negativi.

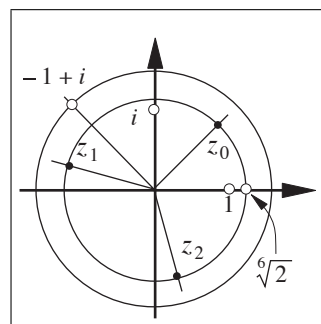
208. a. Scriviamo i in forma esponenziale: $i = 1 \cdot e^{(\pi/2)i}$. Le sue radici terze hanno modulo 1 e argomenti $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ con $k = 0, 1, 2$ e sono quindi:

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{\pi i/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ z_1 &= e^{5\pi i/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ z_2 &= e^{3\pi i/2} = -i \end{aligned}$$



208. b. Il numero $-1+i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $3\pi/4$, quindi le soluzioni sono $z_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot e^{(3\pi/12 + 2k\pi/3)i}$. Ponendo $k = 0, 1, 2$ si ottiene:

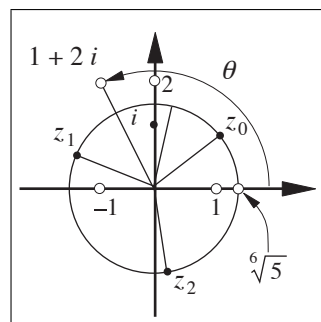
$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{2} \cdot e^{\pi i/4} \\ z_1 &= \sqrt[3]{2} \cdot e^{11\pi i/12} \\ z_2 &= \sqrt[3]{2} \cdot e^{19\pi i/12} \end{aligned}$$



208. c. Il numero $-1 + 2i$ ha modulo $\sqrt{5}$. L'argomento è un angolo non notevole che si può calcolare come $\theta = \arctan(-2) + \pi$, quindi le soluzioni sono

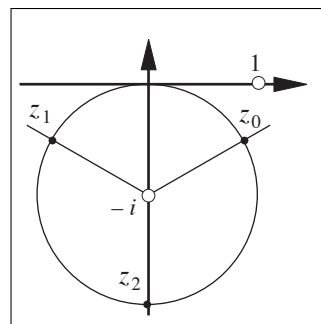
$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{5}} \cdot e^{(\theta/3 + 2k\pi/3)i} \quad \text{per } k = 0, 1, 2$$

Il disegno si può ottenere dividendo "in qualche modo" per 3 l'angolo θ e quindi ottenendo z_0 . Le altre due si ottengono per simmetria dato che dividono la circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt[3]{5} \simeq 1.3$ in 3 parti uguali.



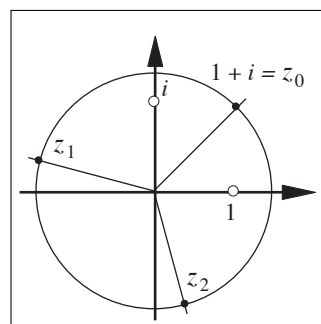
208. d. Si pone $u = z + i$ e si ottiene l'equazione $u^3 = i$, già risolta all'esercizio 08.a. Dato che $z = u - i$, le soluzioni sono quelle dell'equazione suddetta a cui è stato però sottratto i .

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \quad z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \quad z_2 = -2i$$



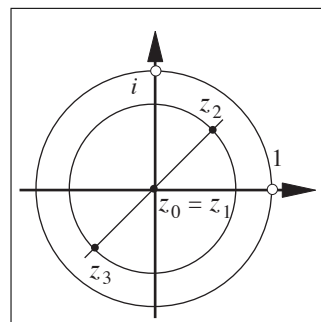
208. e. Il numero $1+i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\pi/4$, il numero $(1+i)^3$ ha quindi modulo $(\sqrt{2})^3$ e argomento $3\pi/4$. Le soluzioni dell'equazione hanno pertanto modulo $\sqrt{2}$ e argomento $3\pi/12 + 2k\pi/3$ per $k = 0, 1, 2$. Per $k = 0$ si ottiene ovviamente $1+i$. Le soluzioni sono:

$$z_0 = 1+i, \quad z_1 = \sqrt{2}e^{11\pi i/12}, \quad z_2 = \sqrt{2}e^{19\pi i/12}$$



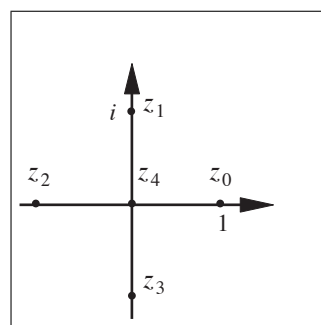
208. f. Si scrive $z^2(z^2 - i) = 0$. Quindi due radici del polinomio $z^4 - iz^2$ sono 0 le altre sono le radici quadrate di i che ha modulo 1 e argomento $\pi/2$ e sono quindi $\pm e^{\pi i/4}$. In conclusione si ha:

$$z_0 = z_1 = 0, \quad z_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$



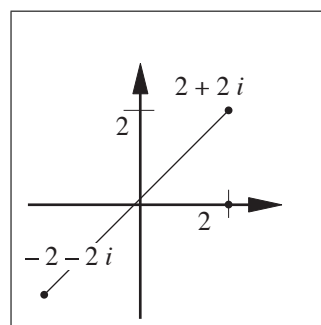
208. g. Si scrive $z(z^4 - 1) = 0$, quindi quattro delle soluzioni sono le radici quarte dell'unità che sono ± 1 e $\pm i$, la quinta soluzione è 0.

$$z_0 = 1, \quad z_1 = i, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = -i, \quad z_4 = 0$$



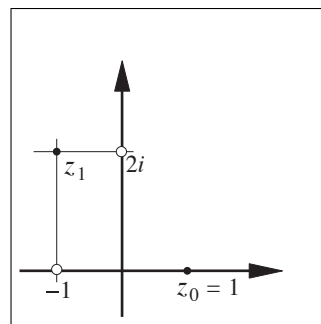
208. h. Dato che il numero $8i$ ha modulo 8 e argomento $\pi/2$, le sue radici quadrate hanno modulo $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e argomenti $\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{2}$ per $k = 0, 1$, cioè $\pi/4$ e $5\pi/4$ e sono quindi:

$$2\sqrt{2}e^{\pi i/4} = 2 + 2i, \quad 2\sqrt{2}e^{5\pi i/4} = -(2 + 2i)$$



208. i. Si usa la nota formula risolutiva dell'equazione di secondo grado $z_{1,2} = \frac{-b + \varepsilon_{1,2}}{2a}$, dove con $\varepsilon_{1,2}$ si intendono le due radici quadrate di $b^2 - 4ac$. In questo caso $b^2 - 4ac = 8i$ le cui radici quadrate sono $\pm(2 + 2i)$, come visto nel problema precedente. Le soluzioni dell'equazione sono pertanto:

$$z_0 = 1, \quad z_1 = 2i - 1$$

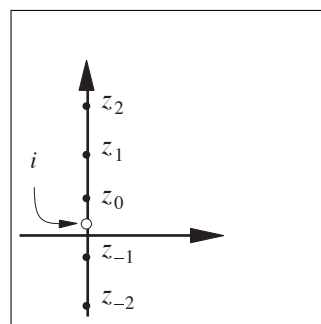


208. j. Dato che $1 = e^0$, l'equazione può essere scritta come $e^z = e^0$. Da cui $z = 0 + 2k\pi i$ ($k \in \mathbb{R}$) per la nota periodicità dell'esponenziale complesso.

Le soluzioni sono quindi infinite e sono $z_k = 2k\pi i$ ($k \in \mathbb{R}$).

Si ha $z_0 = 0$ e gli altri numeri sono puramente immaginari:

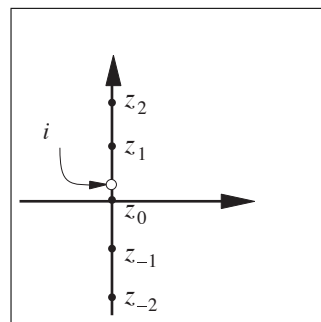
$$z_1 = 2\pi i \quad z_{-1} = -2\pi i \quad z_2 = 4\pi i \text{ etc.}$$



208. k. Dato che $-1 = e^{\pi i}$, l'equazione può essere scritta come $e^z = e^{\pi i}$. Da cui $z = \pi i + 2k\pi i$ ($k \in \mathbb{R}$) per la periodicità dell'esponenziale complesso.

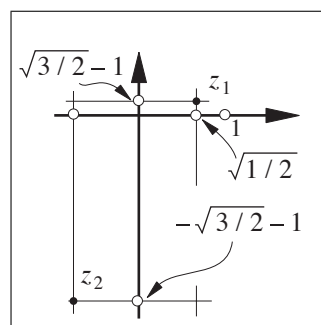
Le soluzioni sono quindi $z_k = (2k + 1)\pi i$ ($k \in \mathbb{R}$). Sono tutti numeri puramente immaginari:

$$z_0 = \pi i \quad z_1 = 3\pi i \quad z_{-1} = -\pi i \quad z_2 = 5\pi i \text{ etc.}$$



209. a. Si usa la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado $z_{1,2} = \frac{-b + \varepsilon_{1,2}}{2a}$, dove, con $\varepsilon_{1,2}$ si intendono le due radici quadrate di $b^2 - 4ac$. Si può calcolare che $b^2 - 4ac = 4 - 4\sqrt{3}i$ e che le sue radici quadrate sono $\pm(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$. Le soluzioni dell'equazione sono allora:

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{1/2} + (\pm\sqrt{3/2} - 1)i$$

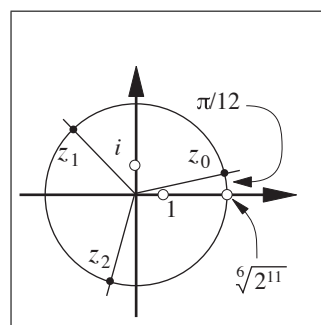


209. b. Scriviamo tutto in forma esponenziale:

$$\begin{aligned} z^3 &= \frac{(\sqrt{3} + i)^6}{(1 + i)i} = \frac{(2e^{\pi i/6})^6}{\sqrt{2}e^{\pi i/4} \cdot e^{\pi i/2}} = \\ &= \frac{2^6}{\sqrt{2}} e^{\pi - \pi/4 - \pi/2} = 2^{11/2} e^{\pi i/4} \end{aligned}$$

Quindi le soluzioni sono:

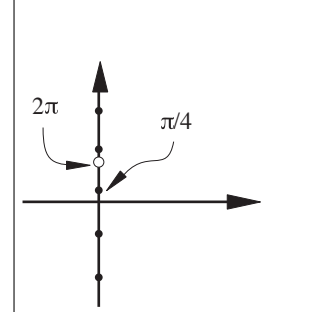
$$\begin{aligned} z_k &= 2^{11/6} \cdot e^{\pi i/12 + 2k\pi i/3} \\ k &= 0, 1, 2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} z_0 &= 2^{11/6} \cdot e^{\pi i/12} \\ z_1 &= 2^{11/6} \cdot e^{9\pi i/12} \\ z_2 &= 2^{11/6} \cdot e^{17\pi i/12} \end{aligned}$$



209. c. Scriviamo $e^z = 0$ come $e^{a+bi} = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Allora $e^a \cdot e^{bi} = 0$. Dato che $a \in \mathbb{R}$, allora, com'è noto, si ha sempre $e^a \neq 0$. Inoltre $e^{bi} = \cos(b) + i \sin(b)$ e non esiste $b \in \mathbb{R}$ che abbia seno e coseno entrambi nulli. Quindi anche e^{bi} è sempre diverso da 0. Quindi l'equazione non ha soluzioni.

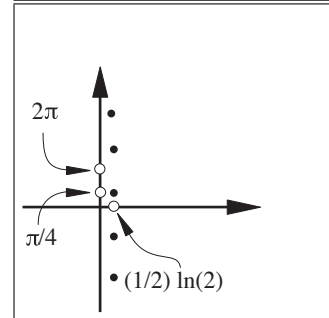
209. d. Si ha: $(\sqrt{2}/2)(1+i) = e^{\pi i/4}$, da cui $e^z = e^{\pi i/4}$.
Per la periodicità dell'esponenziale:

$$z_k = (\pi/4 + 2k\pi)i \quad (k \in \mathbb{R})$$



209. e. Si scrive $e^z = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$ o anche $e^z = e^{\ln(\sqrt{2}) + \pi i/4}$.
Le soluzioni sono le stesse della precedente equazione traslate di $\ln(\sqrt{2}) = 1/2 \ln(2)$

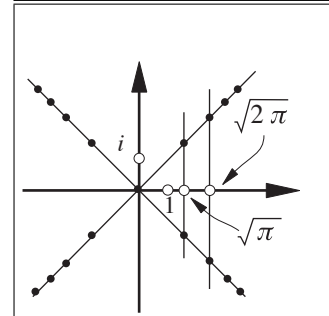
$$1/2 \ln(2) + (\pi/4 + 2k\pi)i \quad (k \in \mathbb{R}).$$



209. f. Si scrive $e^{z^2} = e^0$, da cui, per la periodicità dell'esponenziale, si ha $z^2 = 0 + 2k\pi i$ o $z^2 = 2k\pi i$. Bisogna distinguere tra $k > 0$ (per cui $2k\pi i$ ha argomento $\pi/2$ e modulo $2k\pi$) e $k < 0$ (per cui $2k\pi i$ ha argomento $3\pi/2$ e modulo $-2k\pi$). Le radici quadrate di i sono $\pm(1+i)/\sqrt{2}$, quelle di $-i$ sono $\pm(-1+i)/\sqrt{2}$. Le soluzioni sono perciò:

$$\pm\sqrt{k\pi}(1+i) \quad (k \in \mathbb{R}^+) \quad \pm\sqrt{-k\pi}(-1+i) \quad (k \in \mathbb{R}^-).$$

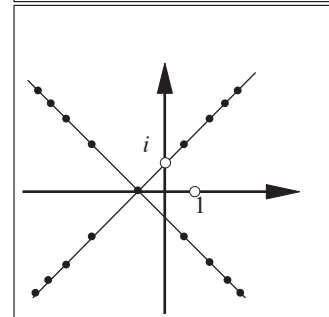
Inoltre (per $k = 0$) anche 0 è soluzione.



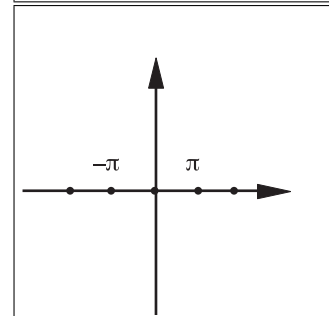
209. g. Si ha $z^2 + 2z + 1 = 2k\pi i$; la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado fornisce $z = -1 + \varepsilon_{1,2}$ dove $\varepsilon_{1,2}$ sono le radici quadrate di $2k\pi i$; il resto è come nell'equazione precedente. Le soluzioni sono pertanto le stesse della precedente equazione traslate di -1 :

$$-1 \pm \sqrt{k\pi}(1+i) \quad (k \in \mathbb{R}^+) \quad -1 \pm \sqrt{-k\pi}(1-i) \quad (k \in \mathbb{R}^-)$$

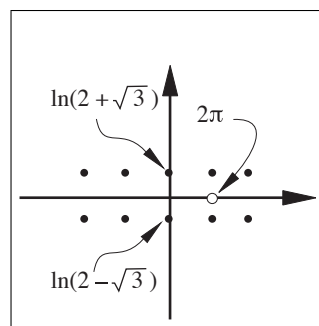
Anche -1 è soluzione.



209. h. L'equazione non ha ulteriori soluzioni complesse oltre alle ben note soluzioni reali: $k\pi$ ($k \in \mathbb{R}$).



209. i. $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ da cui $e^{iz} + e^{-iz} = 4$ $e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} = 4$
 $e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0$. Ponendo $y = e^{iz}$ e risolvendo l'equazione di secondo grado in y si trova $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$.
 I numeri $2 \pm \sqrt{3}$ sono reali e positivi, la loro forma esponenziale è $2 \pm \sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})e^0$, quindi $e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})e^0$
 o anche $e^{iz} = e^{\ln(2 \pm \sqrt{3})}$, da cui $iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i$
 $(k \in \mathbb{R})$.
 In definitiva, le soluzioni sono:
 $-i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{R}$).



211. Perché abbia le radici 4 e 5/7 deve essere multiplo di $x - 4$ e di $x - 5/7$. Per esempio $P(x) = (x - 4)(x - 5/7)$ soddisfa la richiesta.
212. Se $P(x)$ ha le radici 1 e 2 e grado due, allora deve avere come fattori i polinomi $x - 1$ e $x - 2$, quindi deve potersi scrivere come $P(x) = Q(x)(x - 1)(x - 2)$. Perché abbia grado 2, occorre che Q abbia grado 1, cioè che sia una costante a ; quindi $P(x) = a(x - 1)(x - 2)$. Sostituendo 0 a x si ottiene $1 = 2a$, quindi $P(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2)$
213. Siano $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ $Q(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$. Allora:
 Se $n > m$, $(P + Q)(x) = (a_0 + b_0) + \dots + a_nx^n$ e ha grado n .
 Se $m > n$, $(P + Q)(x) = (a_0 + b_0) + \dots + a_mx^m$ e ha grado m .
 Se $m = n$, $(P + Q)(x) = (a_0 + b_0) + \dots + (a_n + b_n)x^n$. Se $a_n + b_n \neq 0$ il grado è n , altrimenti è inferiore, in ogni caso $\deg(P + Q) \leq m$ e $\deg(P + Q) \leq n$, cioè $\deg(P + Q) \leq \max\{m, n\}$
 Si ha: $(P \cdot Q)(x) = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + a_nb_mx^{n+m}$, quindi $P \cdot Q$ ha grado $m + n$, dato che $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$.
214. Dato che il polinomio $x^n - z$ ha esattamente le radici $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$, allora lo si decompone come: $x^n - z = (x - z_0) \dots (x - z_{n-1})$.
 Nel secondo membro, il coefficiente di x^{n-1} , come si può calcolare, è $z_0 + \dots + z_{n-1}$, mentre nel primo membro il coefficiente di x^{n-1} è ovviamente 0 da cui l'uguaglianza cercata.
215. Dividiamo il polinomio per $x - 1$. Si trova come resto 0. Questo prova che 1 è radice. Il quoziente è il polinomio $2x^2 - 5x - 3$ che ha come radici 3 e $-1/2$. Queste sono dunque le altre due radici del polinomio.
216. Dato che $P(x)$ deve avere coefficienti reali, allora deve avere come radici anche $1 - i$ e $-i$. Avendo già quattro radici, ha grado quattro, il minimo possibile, ed è:
 $P(x) = a(x - 1 + i)(x - 1 - i)(x - i)(x + i)$ o meglio $P(x) = a(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 1)$ $a \in \mathbb{R}$
 Perché sia $P(1) = 3$ occorre $P(1) = a(1 - 2 + 2)(1 + 1) = 3$ da cui $a = 3/2$
 Allora: $P(x) = 3/2(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 1)$.
217. Dato che $P(x)$ ha coefficienti complessi, non è necessario che abbia come radici anche i coniugati di i e $1 + i$, quindi: $P(x) = a(x - 1 - i)(x - i)$ $a \in \mathbb{C}$
 Perché sia $P(1) = 3$ occorre che $P(1) = a(-i)(1 - i) = 3$ da cui:
 $a = \frac{3}{-1 - i} = \frac{3 \cdot (-1 + i)}{(-1 - i)(-1 + i)} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$
 Allora: $P(x) = (-3/2 + 3i/2)(x - 1 - i)(x - i)$.
218. Per avere coefficienti reali, il polinomio deve avere come radice anche $1 - i$ e per avere grado 3 deve avere anche una terza radice per esempio 1. Quindi possiamo prendere il polinomio $P(x) = (x - 1 + i)(x - 1 - i)(x - 1) = ((x - 1)^2 + 1)(x - 1) = (x^2 - 2x + 2)(x - 1)$.
219. Dovrà essere $P(x) = (x - 1 - i)(x - 1 + i)Q(x)$; inoltre $P(i) = (1 - 2i)Q(i) = 1$ da cui $Q(i) = (1/5) + (2/5)i$. Quindi $Q(x)$ non può avere grado 0, perché deve essere reale. Per esempio si può porre $Q(x) = (2/5)x + (1/5)$ per cui $P(x) = ((2/5)x + (1/5))(x^2 - 2x + 2)$.
220. Essendo i polinomi a coefficienti reali, deve essere possibile decomporli in fattori di grado 1 e di grado 2 con discriminante negativo:

- a. $x^4 + 1$ ha come radici le radici quarte di -1 che sono: $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ (a due a due coniugate), quindi si ha:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= \left(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(x + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(x + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= \left[\left(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2\right] \cdot \left[\left(x + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2\right] = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \end{aligned}$$

- b. $x^2 + 2x + 4$ è un polinomio di grado due con discriminante negativo, quindi non è ulteriormente scomponibile.

- c. $x^5 - 1$ ha come radici le radici quinte dell'unità che sono $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2$. Si ha perciò:

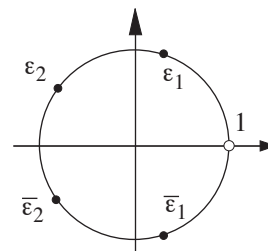
$$x^5 - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\bar{\varepsilon}_1)(x-\varepsilon_2)(x-\bar{\varepsilon}_2) \text{ quindi la decomposizione è } (x-1)(x^2 - (\varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_1)x + \varepsilon_1\bar{\varepsilon}_1)(x^2 - (\varepsilon_2 + \bar{\varepsilon}_2)x + \varepsilon_2\bar{\varepsilon}_2).$$

Dato che, come si calcola subito, si ha:

$$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/5) + i \sin(2\pi/5) \quad \varepsilon_2 = \cos(4\pi/5) + i \sin(4\pi/5)$$

allora la decomposizione in fattori reali è:

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^2 - 2x \cos(2\pi/5) + 1)(x^2 - 2x \cos(4\pi/5) + 1)$$



- d. Si ha: $x^6 - x^2 = x^2(x^4 - 1) = x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1)$. Il polinomio $x^2 + 1$ non è ulteriormente scomponibile, quindi:

$$x^6 - x^2 = x \cdot x(x-1)(x+1)(x^2 + 1)$$

221. Le radici ventisettesime di un numero reale positivo sono ventisette: una reale e ventisei a due a due complesse coniugate per cui $x^{27} - 3$ ha quattordici fattori reali: tredici di grado 2 e uno di grado 1.

222. Si ha $P(x) = a_0(x-x_1)^{2m_1} \cdots (x-x_n)^{2m_n}$ per cui $P(x)$ è il quadrato del polinomio $a(x-x_1)^{m_1} \cdots (x-x_n)^{m_n}$ (a una delle due radici quadrate di a_0). Se $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, l'ipotesi è che il coefficiente direttivo sia positivo. Non occorrono ipotesi sulle radici.

223. a. Sì, per esempio $P(x) = x - ix$.

- b. Sì, per esempio $P(x) = ix^2 - ix$.

- c. Sì, per esempio $P(x) = (x-i)(x+i)^2$.

- d. No, ogni potenza di un numero reale è reale.

224. Chiamiamo $P(x)$ il polinomio. Il numero 1 è radice di $P(x)$ perché si ha:

$$P(1) = 1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 + 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$$

Calcoliamo le derivate del polinomio e sostituiamo 1:

$$P'(x) = 11x^{10} - 50x^9 + 90x^8 - 80x^7 + 35x^6 - 6x^5 + 5x^4 - 16x^3 + 18x^2 - 8x + 1$$

$$P'(1) = 11 - 50 + 90 - 80 + 35 - 6 + 5 - 16 + 18 - 8 + 1 = 0$$

$$P''(x) = 110x^9 - 450x^8 + 720x^7 - 560x^6 + 210x^5 - 30x^4 + 20x^3 - 48x^2 + 36x - 8$$

$$P''(1) = 110 - 450 + 720 - 560 + 210 - 30 + 20 - 48 + 36 - 8 = 0$$

$$P'''(x) = 990x^8 - 3600x^7 + 5040x^6 - 3360x^5 + 1050x^4 - 120x^3 + 60x^2 - 96x + 36$$

$$P'''(1) = 990 - 3600 + 5040 - 3360 + 1050 - 120 + 60 - 96 + 36 = 0$$

$$P^{IV}(x) = 7920x^7 - 25200x^6 + 30240x^5 - 16800x^4 + 4200x^3 - 360x^2 + 120x - 96$$

$$P^{IV}(1) = 7920 - 25200 + 30240 - 16800 + 4200 - 360 + 120 - 96 = 24 \neq 0$$

Quindi la molteplicità è 4.

225. Affinché i sia radice di $P(x)$ occorre che $P(i) = 0$, cioè che: $i^{31} - 2i^5 + ai + b = 0$.

Affinché i abbia molteplicità almeno 2 occorre che $P'(i) = 0$.

Dato che $P'(x) = 31x^{30} - 10x^4 + a$, occorre che $31 \cdot i^{30} - 10 \cdot i^4 + a = 0$.

Ma $i^{31} = -i$, $i^5 = i$, $i^{30} = -1$ e $i^4 = 1$, quindi le due condizioni diventano:

$$\begin{cases} -3i + ai + b = 0 \\ -41 + a = 0 \end{cases} \quad \text{Si calcola subito che:} \quad \begin{cases} a = 41 \\ b = -38i \end{cases}$$

3. SPAZI VETTORIALI: Lineare indipendenza e generatori

- F 301. Negli spazi vettoriali $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{C}^3$ (rispettivamente $\mathbb{R}$ -spazio e $\mathbb{C}$ -spazio), dimostrare che sono linearmente dipendenti le seguenti terne di vettori e scrivere per ogni terna due combinazioni lineari nulle a coefficienti non tutti nulli dei tre vettori:
- | | | |
|---------------------------------------|--|-------------------|
| a. $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 2, 1)$ | b. $(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)$ | in $\mathbb{R}^3$ |
| c. $(1, 4, 5), (2, 3, -1), (0, 0, 0)$ | d. $(1, \pi, 0), (10^{45}, \pi, 2), (\pi, \pi^2, 0)$ | in $\mathbb{R}^3$ |
| e. $(1, i, 0), (i, -1, 0), (0, 0, i)$ | f. $(1, i, 1), (i, 1, -1), (1, 1, 0)$ | in $\mathbb{C}^3$ |
- F 302. a. Nell' $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, esprimere se possibile $(1, 2, 0)$ come combinazione lineare dei vettori $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)$ in due modi diversi.
 b. Sempre nell' $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, esprimere se possibile $(1, 1, 1)$ come combinazione lineare dei vettori $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$ in due modi diversi.
- F 303. Nell' $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Dati i vettori $(1, 2, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 2)$, dire quali dei quattro sono combinazione lineare dei rimanenti.
- F 304. Provare che sono linearmente indipendenti le seguenti successioni di vettori e completarle a base dello spazio vettoriale indicato.
- | | | | |
|--|----------------------|---|----------------------|
| a. $(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)$ in $\mathbb{R}^3$ | ($\mathbb{R}$ -sp.) | b. $(1, 1, 1), (2, 1, 0), (5, 0, 0)$ in $\mathbb{R}^3$ | ($\mathbb{R}$ -sp.) |
| c. $(0, 1, 1)$ in $\mathbb{R}^3$ | ($\mathbb{R}$ -sp.) | d. $(0, 1, 1), (0, 7, i)$ in $\mathbb{C}^3$ | ($\mathbb{C}$ -sp.) |
| e. $(i, 0), (0, i)$ in $\mathbb{C}^2$ | ($\mathbb{C}$ -sp.) | f. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ in $M_{22}(\mathbb{R})$ | ($\mathbb{R}$ -sp.) |
- F 305. Siano u, v vettori di un $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale V . Esprimere in due modi distinti u come combinazione lineare di $u + v, u - v, v$. Quanti modi esistono ?
- F 306. a. Dire perché i vettori $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 1, 2), v_3 = (1, 2, 3), v_4 = (-1, 2, 1)$ in $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti e scrivere tutte le relazioni di lineare dipendenza tra essi.
 b. Dire in che modo è possibile operare degli scarti tra i quattro vettori in modo che i restanti siano linearmente indipendenti.
- T 307. Siano u, v, w vettori di un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale V . Provare che:
- Se u, v, w sono vettori linearmente dipendenti e u, v sono linearmente indipendenti, allora w è combinazione lineare di u e v .
 - Mostrare con un controesempio che, se u, v, w sono vettori linearmente dipendenti e anche u, v sono linearmente dipendenti, non è detto che w sia combinazione lineare di u e v .
 - Se u, v, w sono linearmente indipendenti anche $u - v, u + v, v + w$ lo sono.
 - Se u, v, w sono linearmente dipendenti anche $u - v, u + v, v + w$ lo sono.
 - Se u, v, w generano V anche $u - v, u + v, v + w$ lo generano.
- T 308. Siano u e v vettori linearmente indipendenti in un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale V . Per quali $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ i vettori $au + bv, cu + dv$ sono linearmente indipendenti ?

3. SPAZI VETTORIALI: Sottospazi e dimensione

- F 310. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sotto-spazi vettoriali e in caso positivo determinarne una base.
- | | |
|--|-------------------|
| a. $V = \{(x, y) : xy = 0\}$ | in $\mathbb{R}^2$ |
| b. $V = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{Q}\}$ | in $\mathbb{R}^3$ |
| c. $V = \{(x, y, z) : x + 2y + z = 1\}$ | in $\mathbb{R}^3$ |
| d. $V = L\{(1, 1, 0), (0, 0, 0), (0, 2, 1)\}$ | in $\mathbb{R}^3$ |
| e. $V = \{(1, 1, 0), (0, 2, 1)\}$ | in $\mathbb{R}^3$ |
| f. $V = \{(x, y, z, t) : x = 3y = 3z - t\}$ | in $\mathbb{R}^4$ |
| g. $V = \{(a - b, a + 2b, 3b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ | in $\mathbb{R}^3$ |
| h. $V = \{(x, y) : x = iy\}$ | in $\mathbb{C}^2$ |

- i. $V = \{(x, y, z) : x^2 = y\}$ in $\mathbb{R}^3$
 j. $V = \{A : \det(A) = 0\}$ in $M_{22}(\mathbb{R})$
- A 311. Ricordiamo che nell' $\mathbb{R}$ -spazio $M_{nn}(\mathbb{R})$ si ha:
 a. A è simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j .
 b. A è antisimmetrica se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j .
 c. A è diagonale se $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$.
 d. A è triangolare superiore (inferiore) se $a_{ij} = 0$ per $i > j$ ($i < j$).
 Nell' $\mathbb{R}$ -spazio $M_{nn}(\mathbb{C})$ si ha:
 e. A è hermitiana se $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ (coniugato) per ogni i, j .
 Provare che le matrici simmetriche etc. costituiscono sottospazi. Per $n = 2$ e per $n = 3$ determinare basi dei sottospazi.
- F 312. Determinare due diverse basi per il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $(1, 1, 0), (1, 3, 2), (0, 1, 1)$.
- F 313. Dire perché è possibile completare i vettori $(1, 0, -1, 1), (2, 0, 1, -1)$ a base di $\mathbb{R}^4$ e farlo in almeno due modi differenti usando vettori della base canonica.
- C 314. Determinare una base e un sistema di generatori che non sia base per ciascuno dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:
 a. $V_1 = \{(x, y, z) : x + y = 2x - 3z = 0\}$ b. $V_2 = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 0\}$
- F 315. In $\mathbb{R}^4$ è dato il sottospazio $W = L\{(1, 2, 0, 0), (0, 1, 0, 1)\}$. Scrivere tutti i suoi vettori e dire se ce n'è uno appartenente anche al sottospazio $V_1 = \{(x, y, z, t) : x + 2y - z + 2t = 0\}$
- C 316. In $\mathbb{R}^4$. Sia $V = L\{(1, 2, 0, 1), (0, 0, 1, -2), (1, 2, 1, -1), (1, 1, 0, 0)\}$. Dire che dimensione ha V e quante basi per V si possono estrarre dal sistema di generatori dato.
- F 317. In $\mathbb{R}^3$. Sia Dire perché $\mathcal{B} : (1, 1, 0), (0, 2, 1), (0, 0, 2)$ è una base e scrivere $v_{\mathcal{B}}$ dove $v = (1, 2, 1)$. Esiste un vettore v tale che $v_{\mathcal{B}} = [1 \ 2 \ 3]^T$?
- F 318. In $\mathbb{R}^3$ sia W il sottospazio una cui base è $\mathcal{B} : (1, 2, 0), (0, 1, -1)$.
 a. Scrivere un'altra base $\mathcal{B}_1$ costituita da vettori non proporzionali a quelli della base $\mathcal{B}$.
 b. Dire quale tra i vettori $v = (1, 0, 2)$, $w = (0, 1, 2)$ appartiene a W e per questo vettore determinare la matrice delle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ e quella rispetto a $\mathcal{B}_1$.
 c. Scrivere una base $\mathcal{B}_2$ di W rispetto a cui il vettore trovato in b. abbia coordinate $[1 \ 0]^T$
- F 319. Sia $W = L\{(1, 2, 2, 0), (0, 2, 3, -1), (3, 2, 0, 2), (1, 1, 1, 1)\}$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$.
 a. Determinare $\dim(W)$, una base $\mathcal{B}$ per W e scrivere tutti i vettori di W .
 b. Dire quali tra i seguenti due vettori stanno in W : $w_1 = (1, 0, -1, 1)$, $w_2 = (2, 1, 1, 1)$
 c. Trovare (se esiste) un vettore $w \in W$ con le prime due componenti nulle.
 d. Calcolare la matrice delle coordinate di w rispetto a $\mathcal{B}$.
 e. Scrivere un'altra base $\mathcal{B}_1$ di W il cui primo vettore sia w .
- F 320. Sia $V = L\{(1, 2, 0, 1), (0, 1, -1, 1), (1, 0, 2, -1)\}$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Dire quali tra i seguenti due vettori stanno in V : $v_1 = (2, 1, 3, 1)$, $v_2 = (2, 1, 3, -1)$.
- C 321. In $\mathbb{R}^3$. Trovare una base $\mathcal{B}$ rispetto alla quale $v(1, 2, 1)$ abbia coordinate $[1 \ 1 \ 1]^T$ e $w = (0, 1, 1)$ abbia coordinate $[0 \ 1 \ 1]^T$.
- A 322. In $\mathbb{R}^4$. Provare che $V \subset W$ nei casi a. b. c. e che $V \not\subset W$ nel caso d.
 a. $V = L\{(0, 1, 1, 2), (0, 2, 0, 2)\}$ $W = \{(x, y, z, t) : x + y + z = t\}$
 b. $V = L\{(3, 0, 2, 1), (2, 2, 3, 1)\}$ $W = L\{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\}$
 c. $V = \{(x, y, z, t) : x + y + z = z - 2t = 0\}$ $W = L\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1), (3, -1, 2, 1)\}$
 d. $V = \{(x, y, z, t) : x + y + z = z - t = 0\}$ $W = L\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1), (3, -1, 2, 1)\}$
- C 323. In $M_{22}(\mathbb{R})$. Sia $V = \{A : A \cdot B = B \cdot A\}$ (B matrice fissata).
 a. Provare che V è sempre sottospazio.
 b. Trovarne una base nel caso in cui B sia la matrice a lato.
- A 324. Come il problema precedente, ma con $V = \{A : A \cdot B \text{ sia diagonale}\}$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

3. SPAZI VETTORIALI: Vettori geometrici

F 331. Dire quali di queste affermazioni sono vere:

- AB è un segmento orientato
- AB è un vettore (libero)
- AB rappresenta un vettore libero



F 332. Siano $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vettori geometrici. Dire quali di queste operazioni hanno senso e in caso positivo dire se il risultato è un vettore o uno scalare.

- | | | | | |
|---|--|--|--|--|
| a. $ \vec{w} \cdot \vec{v}$ | b. $ \vec{v} \vec{w} $ | c. $\frac{\vec{v}}{ \vec{w} }$ | d. $\frac{ \vec{v} }{\vec{w}}$ | e. $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$ |
| f. $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w}$ | g. $(\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$ | h. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$ | i. $\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$ | j. $\vec{v} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ |
| k. $\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$ | l. $\vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{w}$ | m. $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$ | | |

F 333. Calcolare $((1, 2, 0) \wedge (3, 2, 0)) \wedge (1, 1, 1)$ e $(1, 2, 0) \wedge ((3, 2, 0) \wedge (1, 1, 1))$

C 334. Sia $|\vec{v}| = 1$. Esiste un vettore $\vec{w}$ di modulo 2 tale che $\vec{v} \cdot \vec{w} = 5$?
Ed esiste $\vec{w}$ di modulo 2 tale che $\vec{v} \cdot \vec{w} = -1$?

T 335. Provare che se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ e $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$, allora $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = 8$.

T 336. Dimostrare che se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$ e $a \in \mathbb{R}$, allora:

- $(\vec{u} + a\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v}$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} \wedge \vec{w} = 0$

T 337. Siano $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \neq \vec{0}$ vettori e supponiamo che $\vec{u} \neq \vec{0}$ formi lo stesso angolo sia con $\vec{w}_1$ che con $\vec{w}_2$ e che $\vec{v} \neq \vec{0}$ abbia la stessa proprietà. Dimostrare che se $a\vec{u} + b\vec{v}$ è non nullo allora esso ha ancora la stessa proprietà.

Supponiamo d'ora in poi che nell' $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale V_3 sia fissata una base ortonormale destrorsa $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Indicheremo quindi i vettori con le loro coordinate rispetto a tale base. Per esempio con $(1, 2, -1)$ indicheremo il vettore $\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Salvo diverso avviso i seguenti problemi sono nello spazio V_3 .

In alcuni problemi lo spazio è V_2 con una base ortonormale $\vec{i}, \vec{j}$.

F 341. Provare che esistono due vettori di modulo 5 paralleli a $(1, 2, -1)$ e determinarli.

F 342. Determinare un vettore di modulo 1 ortogonale a $(1, 2, 3)$ e a $(1, 1, -1)$.

F 343. Dati i due vettori $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (2, -1, 2)$ e il sottospazio $W = L\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ da essi generato.

- Determinare un vettore $\vec{v} \in W$ di modulo 1, ortogonale a $\vec{j}$.
- Determinare il vettore $\vec{w} \in W$ di modulo 1, avente anche le seguenti due proprietà
 $\vec{w}$ sia ortogonale a $\vec{v}_1$ $\vec{w}$ formi un angolo acuto con $\vec{v}_2$
- Calcolare la matrice delle coordinate di $\vec{v}$ e di $\vec{w}$ rispetto alla base $\mathcal{B} : \vec{v}_1, \vec{v}_2$ di W .

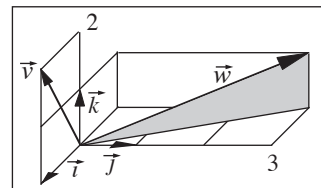
F 344. In V_3 sono assegnati i due vettori $\vec{v} = (1, 1, 0)$ e $\vec{w} = (0, -1, 2)$.

- Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ per $W = L\{\vec{v}, \vec{w}\}$.
- In W , determinare le coordinate di $\vec{v}$ e $\vec{w}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
- Completare i due vettori di $\mathcal{B}$ a base ortonormale $\mathcal{B}_1$ per V_3 .

- F 345. In V_3 sono dati i due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ rappresentati dai segmenti orientati disegnati.

Sia poi $W = L\{\vec{v}, \vec{w}\}$ il sottospazio vettoriale da essi generato.

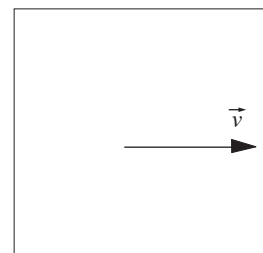
- Calcolare l'angolo θ tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
- Scrivere le coordinate di un vettore $\vec{u} \in W$ e ortogonale a $\vec{k}$.
- Completare $\vec{u}$ a base ortogonale di W .
- Completare $\vec{u}$ a base ortogonale di V_3 .



- F 346. In V_3 sono dati i tre vettori di modulo 1:

$$\vec{v}(-2, 2, 1)/3 \quad \vec{w}(1, 2, -2)/3 \quad \vec{u}(1, -4, 1)/\sqrt{18}$$

- Verificare che sono linearmente dipendenti.
- Calcolare i loro angoli reciproci.
- Usare i dati per effettuare uno schizzo della posizione dei tre vettori nello spazio di dimensione 2 da essi generato, rappresentato nel disegno dal quadrato.



- C 347. Determinare i vettori $\vec{v} \neq \vec{0}$ tali che $\vec{v} - \vec{i}$ sia ortogonale a $(1, 1, 2)$ e $\vec{v}$ sia ortogonale a $\vec{j}$.

- F 348. Provare che esistono due vettori $\vec{v}$ paralleli a $(1, -1, 1)$ tali che $\vec{v} - \vec{i}$ abbia modulo 3.

- C 349. Dire se sono destrorse o sinistrorse le seguenti basi di V_3 :

- $\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}$
- $\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}$
- $\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{j}$

- C 350. a. Proiettare il vettore $(1, 2, 1)$ sul vettore $(0, 3, 1)$.
b. Trovare un vettore multiplo di $(1, 2, 1)$ la cui proiezione su $(0, 3, 1)$ abbia modulo 1. Ne esiste uno solo?

- A 351. Siano $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, -1)$. Determinare $\vec{w}$ tale che simultaneamente:

- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ siano linearmente dipendenti.
- $\vec{w}$ sia ortogonale a $\vec{v}$.
- la proiezione di $\vec{w}$ su $\vec{u}$ abbia modulo 1.

- C 352. In V_2 : Determinare tutti i vettori che formano un angolo di $\pi/3$ col vettore $(-1, 2)$.

- C 353. Determinare tutti i vettori formanti un angolo di $\pi/4$ con $(0, -1, 1)$ e di $\pi/2$ con $(1, 0, -2)$.

- A 354. In V_2 : Siano $\vec{v} = (1, -3)$ e $\vec{w} = (2, 1)$:

- Determinare $\vec{u}_1$ ortogonale a $\vec{v}$ tale che la proiezione di $\vec{u}_1$ su $\vec{w}$ coincida con la proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{w}$.
- Determinare $\vec{u}_2$ di modulo 1 tale che la proiezione di $\vec{u}_2$ su $\vec{w}$ coincida con la proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{w}$.

- T 355. Siano $\vec{u}, \vec{v}$ vettori non nulli. Determinare tutti i vettori linearmente dipendenti con $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e formanti con essi angoli uguali.

- A 356. a. Dati i vettori $\vec{u}_1 = (1, 2, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, -1, 1)$, determinare la proiezione ortogonale del vettore $(1, 0, 0)$ sul sottospazio $L\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

- b. Calcolare l'angolo θ tra il vettore $(1, 0, 0)$ e lo spazio $L\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

301. a. Scriviamo $a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) + c(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$. Si ottiene l'uguaglianza $(a + c, a + b + 2c, b + c) = (0, 0, 0)$ da cui $\{a + c = 0, a + b + 2c = 0, b + c = 0\}$. Questo è un sistema lineare omogeneo 3×3 nelle incognite a, b, c che ha come matrice dei coefficienti quella sotto, che è anche la matrice delle coordinate dei tre vettori.

Mediante l'algoritmo gaussiano, si può constatare che il sistema ha ∞^1 soluzioni non banali $(-c, -c, c)$. Per esempio $a = 1, b = 1, c = -1$ da cui $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
 $1(1, 1, 0) + 1(0, 1, 1) - 1(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$.

Se prendiamo un'altra soluzione, per esempio $a = 2, b = 2, c = -2$ otteniamo un'altra combinazione.

- b. Come nel precedente caso occorre studiare un sistema lineare omogeneo la cui matrice dei coefficienti è la matrice delle coordinate dei tre vettori. Le soluzioni sono $(c, -2c, c)$. Per esempio per $a = 1, b = -2, c = 1$ si ha: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
 $1(1, 2, 3) - 2(4, 5, 6) + 1(7, 8, 9) = (0, 0, 0)$. Un'altra combinazione lineare si ottiene per esempio raddoppiando i coefficienti.
- c. Sono linearmente dipendenti perché uno di essi è nullo. Una combinazione lineare è evidente ed è per esempio: $0(1, 4, 5) + 0(2, 3, -1) + 1(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$. Un'altra è quella con coefficienti $0, 0, 2$.
- d. Sono linearmente dipendenti perché il terzo vettore è multiplo del primo per il coefficiente π , quindi una combinazione lineare è $\pi(1, \pi, 0) + 0(10^{45}, \pi, 2) - 1(\pi, \pi^2, 0) = (0, 0, 0)$. Un'altra è quella con coefficienti $2\pi, 0, -2$.
- e. Sono linearmente dipendenti perché il secondo vettore è il primo moltiplicato per i , quindi una combinazione lineare è $i(1, i, 0) - (i, -1, 0) + 0(0, 0, i) = (0, 0, 0)$. Un'altra combinazione lineare è $(1, i, 0) + i(i, -1, 0) + 0(0, 0, i) = (0, 0, 0)$ ottenuta moltiplicando la prima per $-i$.
- f. Come nel primo caso occorre studiare un sistema lineare omogeneo la cui matrice dei coefficienti è la matrice delle coordinate dei tre vettori.

Le soluzioni sono $\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)c, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)c, c\right)$, quindi per $c = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
 $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(1, i, 1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(i, 1, -1) + (1, 1, 0) = (0, 0, 0)$

Oppure (ponendo $c = 1+i$) $(1, i, 1) + (i, 1, -1) - (1+i)(1, 1, 0) = (0, 0, 0)$

302. a. Scriviamo $(1, 2, 0) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(1, 1, 0)$
cioè $(1, 2, 0) = (a + c, b + c, 0)$. Da cui il sistema lineare 3×3 in (a, b, c) : $\begin{cases} 1 = a + c \\ 2 = b + c \\ 0 = 0 \end{cases}$
Il sistema ha le ∞^1 soluzioni $(1 - c, 2 - c, c)$, tra le quali:

$$a = 1, b = 2, c = 0 \quad \text{da cui:} \quad (1, 2, 0) = 1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 0(1, 1, 0)$$

Un'altra soluzione è

$$a = 0, b = 1, c = 1 \quad \text{da cui:} \quad (1, 2, 0) = 0(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 1(1, 1, 0)$$

302. b. Possiamo innanzitutto osservare che i tre vettori sono linearmente indipendenti in quanto la matrice formata dalle loro coordinate ha determinante diverso da 0. Tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ ne costituiscono una base. Pertanto $(1, 1, 1)$ può esprimersi in un solo modo come loro combinazione lineare.

Scriviamo $(1, 1, 1) = a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) + c(1, 0, 1)$. Si ottiene il sistema $\begin{cases} 1 = a + c \\ 1 = a + b \\ 1 = b + c \end{cases}$
 3×3 in (a, b, c) che ha un'unica soluzione: $a = 1/2, b = 1/2, c = 1/2$
Quindi: $(1, 1, 1) = 1/2(1, 1, 0) + 1/2(0, 1, 1) + 1/2(1, 0, 1)$

303. Scriviamo $a(1, 2, 1) + b(1, 0, 1) + c(1, 1, 1) + d(0, 1, 2) = (0, 0, 0)$. Questo è un sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è formata dalle coordinate dei quattro vettori:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \infty^1 \text{ soluzioni: } (-c/2, -c/2, c, 0)$$

Per esempio per $c = -2$ si ha $(1, 2, 1) + (1, 0, 1) - 2(1, 1, 1) + 0(0, 1, 2) = (0, 0, 0)$.

Dall'uguaglianza si ricava subito che ciascuno dei primi tre è combinazione lineare dei rimanenti:

$$\begin{aligned}(1, 2, 1) &= -(1, 0, 1) + 2(1, 1, 1) + 0(0, 1, 2) \\ (1, 0, 1) &= -(1, 2, 1) + 2(1, 1, 1) + 0(0, 1, 2) \\ (1, 1, 1) &= 1/2(1, 2, 1) + 1/2(1, 0, 1) + 0(0, 1, 2)\end{aligned}$$

Ma $(0, 1, 2)$ non lo è perché se fosse $x(1, 2, 1) + y(1, 0, 1) + z(1, 1, 1) = (0, 1, 2)$, si ricaverebbe: $\{x + y + z = 0 \quad 2x + z = 1 \quad x + y + z = 2\}$ e questo sistema 3×3 non ha soluzioni.

Altro modo: la matrice a lato ha caratteristica 3, ma l'unico minore 3×3 ricavabile dalle prime tre colonne ha determinante 0, per cui $(0, 1, 2)$ non è combinazione lineare dei rimanenti.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

304. a. Se fosse $a(1, 0, 0) + b(0, 1, 1) + c(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$, allora si avrebbe: $(a, b, b + c) = (0, 0, 0)$ da cui $a = b = c = 0$.

Dato che sono tre vettori linearmente indipendenti nello spazio $\mathbb{R}^3$ che ha dimensione 3, costituiscono già base.

- b. Si può procedere come nel caso precedente, oppure considerare la matrice delle coordinate dei vettori che ha determinante diverso da 0. Come sopra, 3 vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ costituiscono già base.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- c. È linearmente indipendente perché è diverso da 0.

Per completarlo a base possiamo usare due vettori della base canonica.

Per esempio $(0, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ perché si tratta di tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ (basta guardare la matrice delle loro coordinate).

- d. I due vettori sono linearmente indipendenti perché sono due e non proporzionali.

Una base di $\mathbb{C}^3$ è per esempio $(0, 1, 1), (0, 7, i), (1, 0, 0)$ perché si tratta di tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{C}^3$ (basta guardare la matrice delle loro coordinate).

- e. I due vettori sono linearmente indipendenti perché sono due e non proporzionali.

Dato che sono due vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{C}^2$ che ha dimensione 2, costituiscono già base.

- f. Scriviamo $a \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si ha: $\begin{pmatrix} b + 2c & 0 \\ a + c & a + 2b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

da cui il sistema lineare omogeneo a lato che ha la sola soluzione $a = b = c = 0$.

Per completare a base possiamo usare un vettore della base "canonica" di M_{22} per esempio $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

I quattro vettori sono linearmente indipendenti perché non è zero il determinante della matrice delle coordinate rispetto alla base "canonica" di M_{22} in cui ogni colonna è data da una delle quattro matrici 2×2 "appiattite" per righe.

$$\begin{cases} b + 2c = 0 \\ a + c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

305. Sommando i primi due si ottiene $2u$, quindi una combinazione è per esempio

$$u = \frac{1}{2}(u + v) + \frac{1}{2}(u - v) + 0 \cdot v$$

Un'altra possibilità è quella di sottrarre il terzo del primo: $u = 1(u + v) + 0(u - v) - 1 \cdot v$.

Scriviamo in generale $u = a(u + v) + b(u - v) + cv$. Si ottiene $u = (a + b)u + (a - b + c)v$.

Ogni scelta di a, b, c tale che $a - b + c = 0$ dà una combinazione lineare come quella richiesta.

Esistono pertanto infiniti modi.

306. I vettori sono linearmente dipendenti perché 4 vettori in uno spazio di dimensione 3 lo sono sempre.

Cerchiamo a, b, c, d non tutti nulli tali che $a(1, 0, 1) + b(1, 1, 2) + c(1, 2, 3) + d(-1, 2, 1) = (0, 0, 0)$.

Ne risulta il sistema omogeneo in (a, b, c, d) che ha A come matrice dei coefficienti.

A è anche la matrice delle coordinate dei vettori.

Il sistema ha le ∞^2 soluzioni $(c + 3d, -2c - 2d, c, d)$ con cui

si possono scrivere tutte le relazioni lineari tra i 4 vettori.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Il sistema ha ∞^2 soluzioni perché la matrice ha caratteristica 2. Questo prova che lo spazio da essi generato ha dimensione 2. Quindi occorre scartare due vettori. Dato che è possibile ricavare

minori non nulli di ordine 2 da ogni coppia di colonne della matrice, allora è possibile scartare due qualunque dei quattro vettori e i restanti due saranno sempre linearmente indipendenti.

307. a. Per ipotesi è possibile scrivere $au + bv + cw = 0$ con a, b, c non tutti nulli. Allora $c \neq 0$ (altrimenti si avrebbe $au + bv = 0$ con a, b non tutti nulli). Pertanto $w = (-a/c)u + (-b/c)v$.
- b. Controesempio: $u \neq 0$ qualunque, $v = 2u$ e w linearmente indipendente con u . Chiaramente w non è combinazione lineare di u e v .
- c. Se fosse $a(u - v) + b(u + v) + c(v + w) = 0$ allora $(a + b)u + (-a + b + c)v + cw = 0$ e dato che u, v, w sono linearmente indipendenti allora $(a + b) = (-a + b + c) = c = 0$, sistema lineare omogeneo che ha la sola soluzione $a = b = c = 0$.
- d. Per ipotesi è possibile trovare a, b, c non tutti nulli tali che $au + bv + cw = 0$. Cerchiamo ora x, y, z tali che $x(u - v) + y(u + v) + z(v + w) = 0$ uguaglianza che, riordinando, si può scrivere $(x + y)u + (-x + y + z)v + zw = 0$. Possiamo quindi scegliere $\{x + y = a, -x + y + z = b, z = c\}$. Questo è un sistema lineare 3×3 in (x, y, z) . Risolvendolo si trova $x = (a - b + c)/2, y = (a + b - c)/2, z = c$. Dato che il sistema non è omogeneo (a, b, c sono non tutti nulli) è chiaro che anche x, y, z sono non tutti nulli e quindi abbiamo la combinazione lineare cercata.
- e. Per ipotesi ogni vettore $z \in V$ si può scrivere come $z = au + bv + cw$; con conto simile al precedente si trova: $z = ((a - b + c)/2)(u - v) + ((a + b - c)/2)(u + v) + c(v + w)$.
308. Vediamo se è possibile trovare x e y non entrambi nulli tali che $x(au + bv) + y(cu + dv) = 0$, cioè $(xa + yc)u + (xb + yd)v = 0$. Poiché u, v sono linearmente indipendenti, ciò è possibile se e solo se il sistema omogeneo
$$\begin{cases} xa + yc = 0 \\ xb + yd = 0 \end{cases}$$
 ha soluzioni non banali cioè se e solo se $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$. Quindi sono linearmente dipendenti se e solo se $ad - bc = 0$.
310. a. No: per esempio $(1, 0), (0, 1)$ appartengono a V , ma la loro somma no.
- b. No: per esempio $(1, 0, 0)$ appartiene a V , ma $\sqrt{2}(1, 0, 0)$ no.
- c. No, perché anche se V è definito da un sistema lineare, il sistema non è omogeneo. Per esempio $(0, 0, 0)$ non sta in V .
- d. Sì: la dipendenza lineare di un qualunque insieme di vettori è sempre sottospazio. Scartando $(0, 0, 0)$ i due che rimangono $(1, 1, 0), (0, 2, 1)$ sono ancora generatori per V ed essendo linearmente indipendenti, in quanto due e non proporzionali, formano una base.
- e. No: due soli vettori non possono formare un sottospazio.
- f. Sì, è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo. Le soluzioni sono ∞^2 e sono $(3z - t, z - t/3, z, t)$ e si può scrivere $(3z - t, z - t/3, z, t) = z(3, 1, 1, 0) + t(-1, -1/3, 0, 1)$. I due vettori $(3, 1, 1, 0), (-1, -1/3, 0, 1)$ sono quindi generatori per V ed essendo linearmente indipendenti, in quanto due e non proporzionali, formano una base.
- g. I vettori di V si possono scrivere come: $(a - b, a + 2b, 3b) = a(1, 1, 0) + b(-1, 2, 3)$ e quindi V è $L\{(1, 1, 0), (-1, 2, 3)\}$ che è sempre sottospazio. I due vettori $(1, 1, 0), (-1, 2, 3)$ sono generatori per V per definizione di $L\{\}$ ed essendo linearmente indipendenti, in quanto due e non proporzionali, formano una base.
- h. Sì: è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. I vettori sono tutti multipli di $(i, 1)$ che quindi forma una base per V .
- i. No: per esempio $(1, 1), (2, 4)$ stanno in V , ma la loro somma no.
- j. No: Per esempio $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ stanno in V , ma la loro somma no.
311. Le verifiche del fatto che sono sottospazi sono di routine. A titolo di esempio proviamo che le matrici simmetriche formano sottospazio: Se A e B sono simmetriche, allora $a_{ij} = a_{ji}$ e $b_{ij} = b_{ji}$ per ogni i, j . Quindi dato che l'elemento (i, j) -esimo di $A + B$ è $a_{ij} + b_{ij}$ si ha $a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$ e $A + B$ è simmetrica. Analogamente per λA . Esempi di basi sono:

$$a. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b. Si osservi che nelle matrici antisimmetriche la diagonale principale è nulla. Basi per i sotto-spazi sono per esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- d. Diamo esempi di basi solo per le triangolari superiori (le altre sono analoghe)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- e. Si osservi che nelle matrici hermitiane la diagonale principale è reale. Come basi possiamo prendere:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ etc. (9 elementi)}$$

312. I tre vettori sono linearmente dipendenti, dato che il determinante della matrice delle coordinate dei tre vettori è nullo. Per avere una base occorre scartarne qualcuno. Per esempio scartando il terzo si trovano $(1, 1, 0), (1, 3, 2)$ che, essendo linearmente indipendenti, in quanto *due* e non proporzionali, formano una base. Analogamente scartando il secondo si ha la base $(1, 1, 0), (0, 1, 1)$.

313. È possibile completare a base la successione dei due vettori perché essi sono linearmente indipendenti, in quanto *due* e non proporzionali. Per completare usando vettori della base canonica occorre sempre verificare che i 4 vettori siano linearmente indipendenti, cosa che si può fare scrivendo la matrice 4×4 delle loro coordinate e verificando che abbia determinante diverso da zero. Due modi corretti sono

$$(1, 0, -1, 1), (2, 0, 1, -1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$$

$$(1, 0, -1, 1), (2, 0, 1, -1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)$$

Due modi non leciti sono invece:

$$(1, 0, -1, 1), (2, 0, 1, -1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)$$

$$(1, 0, -1, 1), (2, 0, 1, -1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$$

perché i quattro vettori sono linearmente dipendenti.

314. a. Il sistema che definisce V_1 ha ∞^1 soluzioni che sono $((3/2)z, -(3/2)z, z)$ ($z \in \mathbb{R}$). Quindi $\dim(V_1) = 1$ e una base per V_1 è per esempio $(3, -3, 2)$.

Un sistema di generatori che non sia base è per esempio il seguente: $(3, -3, 2), (6, -6, 4)$.

- b. Il sistema che definisce V_2 ha ∞^2 soluzioni che sono $(-2y + z, y, z)$ ($y, z \in \mathbb{R}$). Quindi $\dim(V_2) = 2$ e una base per V_2 è per esempio $(2, -1, 0), (1, 0, 1)$.

Un sistema di generatori che non sia base è per esempio il seguente: $(2, -1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 3)$ ottenuto aggiungendo ai due vettori della base un qualunque altro vettore di V_2 , per esempio il vettore $(1, 1, 3) = -(2, -1, 0) + 3(1, 0, 1)$.

315. I vettori di W sono $a(1, 2, 0, 0) + b(0, 1, 0, 1) = (a, 2a + b, 0, b)$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$. Per vedere se uno di essi sta in V_1 , occorre vedere se soddisfa l'equazione omogenea che definisce V_1 : $a + 2(2a + b) + 2(b) = 0$ da cui $5a + 4b = 0$. Per esempio per $a = 4, b = -5$ si ottiene il vettore $(4, 3, 0, -5)$ di W che sta anche in V_1 .

316. V ha dimensione 3 perché 3 è la caratteristica della matrice delle coordinate dei quattro vettori che lo generano. Dato che il terzo vettore è somma dei primi due, è possibile estrarre una base per V eliminando il primo o il secondo o il terzo vettore, ma non il quarto.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

317. $\mathcal{B}$ è base perché la matrice 3×3 delle coordinate dei vettori ha determinante diverso da zero. Scriviamo $v = a(1, 1, 0) + b(0, 2, 1) + c(0, 0, 2)$. Allora $(1, 2, 1) = (a, a+2b, b+2c)$ cioè: $(1 = a, 2 = a+2b, 1 = b+2c)$. Risolvendo il sistema lineare in (a, b, c) si trova: $a = 1, b = 1/2, c = 1/4$. Quindi $v_{\mathcal{B}}$ è la matrice a lato.
- Esiste poi certamente un vettore di coordinate $[1 \ 2 \ 3]^T$ ed è ovviamente il vettore $v = 1(1, 1, 0) + 2(0, 2, 1) + 3(0, 0, 2) = (1, 5, 8)$.
318. Osserviamo innanzitutto che W ha dimensione 2 dato che la base fornita (è una base perché si tratta di *due* vettori non proporzionali) è formata da due vettori.
- a. Per avere un'altra base possiamo per esempio prima sommare e poi sottrarre i due vettori; si ottengono i due vettori $(1, 3, -1), (1, 1, 1)$ che formano una base di W (che chiamiamo $\mathcal{B}_1$) perché son *due* vettori linearmente indipendenti in uno spazio di dimensione 2.
- b. Per vedere se $v \in W$ si scrive: $(1, 0, 2) = a(1, 2, 0) + b(0, 1, -1)$. Questo è un sistema lineare 3×2 che ha la soluzione $a = 1, b = -2$. Da qui si deduce che $v \in W$. Analogamente il sistema lineare $(0, 1, 2) = a(1, 2, 0) + b(0, 1, -1)$ non ha soluzioni e quindi $w \notin W$. Usando la soluzione del primo sistema lineare si può scrivere $(1, 0, 2) = 1(1, 2, 0) - 2(0, 1, -1)$. Quindi la matrice delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ è $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Per avere quella rispetto a $\mathcal{B}_1$ si risolve il sistema $(1, 0, 2) = a(1, 3, -1) + b(1, 1, 1)$ che ha la soluzione $a = -1/2, b = 3/2$. La matrice delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}_1$ è quindi $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.
- c. Sia $\mathcal{B}_2 : w_1, w_2$. Occorre che $(1, 0, 2) = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2$, quindi $w_1 = (1, 0, 2)$. Completiamo w_1 a base di W mediante un altro vettore di W , per esempio con $w_2 = (0, 1, -1)$ e abbiamo la base richiesta.
319. a. Si ha: $\dim(W) = \rho(A)$ dove A è la matrice delle coordinate dei quattro vettori che generano W . Per calcolare la caratteristica di A la riduciamo:
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \leftrightarrow R_4 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 3R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 + 2R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Eliminiamo R_4 identica a R_3 : ora A è ridotta con 3 pivot. Quindi $\rho(A) = 3$ e $\dim(W) = 3$. Per avere una base occorre scartare uno dei quattro generatori. Dato che la sottomatrice inquadrate ha determinante diverso da 0, è possibile scartare per esempio il terzo e i tre che restano sono linearmente indipendenti. Da qui si ricava la base:
- $$\mathcal{B} : (1, 2, 2, 0), (0, 2, 3, -1), (1, 1, 1, 1)$$
- Osserviamo che non è possibile scartare il quarto, perché nessuna delle sottomatrici costituite dalle prime tre colonne ha determinante diverso da 0. I vettori di W sono le combinazioni lineari dei vettori di $\mathcal{B}$, cioè i vettori del tipo $a(1, 2, 2, 0) + b(0, 2, 3, -1) + c(1, 1, 1, 1) = (a+c, 2a+2b+c, 2a+3b+c, -b+c)$
- b. Avendo ricavato una base per W , un modo di verificare le appartenenze a W è quello di controllare se è nullo il determinante della matrice 4×4 formata con le coordinate dei tre vettori che generano W e del vettore in questione. Scritte le due matrici, si verifica che:
- $$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{quindi: } w_1 \in W \quad w_2 \notin W$$
- c. In a. abbiamo ricavato tutti i vettori di W : $(a+c, 2a+2b+c, 2a+3b+c, -b+c)$. Per avere le prime due componenti nulle occorre che $a+c = 0$ e $2a+2b+c = 0$. Risolviamo il sistema $\begin{cases} a+c=0 \\ 2a+2b+c=0 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \infty^1$ soluzioni: $(-c, c/2, c)$
- Per esempio ponendo $c = 2$, si ha $a = -2, b = 1, c = 2$ da cui il vettore $w = (0, 0, 1, 1)$.

- d. Per scrivere w_B usiamo i conti sopra da cui si vede che
 $w = -2(1, 2, 2, 0) + 1(0, 2, 3, -1) + 2(1, 1, 1, 1)$, da cui la matrice.
- e. Avendo già una base di W , possiamo prendere due vettori da essa per completare il vettore linearmente indipendente w a base di W .
 Per esempio prendiamo $(0, 2, 3, -1)$, $(1, 1, 1, 1)$.
 I tre vettori sono linearmente indipendenti, dato che la matrice a lato ha caratteristica 3 (minore inquadrato) e tre vettori linearmente indipendenti in W che ha dimensione 3 costituiscono una base.
- $$w_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
320. I tre vettori che generano V sono linearmente dipendenti perché la matrice a lato ha caratteristica 2 (basta ridurre con l'algoritmo di Gauss). Una sua base è per esempio quella costituita dai primi due vettori dato che sono *due* e linearmente indipendenti in quanto non proporzionali.
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
- L'appartenenza a V si verifica esaminando le due matrici 4×3 formate con le coordinate dei due vettori della base di V e dei vettori in questione (matrici in questo caso differenti solo per un elemento). Se ne calcola la caratteristica con l'algoritmo di Gauss e si vede che: $\varrho(A) = 3$ per v_1 e $\varrho(A) = 2$ per v_2 , quindi $v_1 \notin V$ $v_2 \in V$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & \pm 1 \end{pmatrix}$$
321. Dovrà essere $(1, 2, 1) = v_1 + v_2 + v_3$ e $(0, 1, 1) = v_2 + v_3$. Sottraendo le due eguaglianze si ha $v_1 = (1, 1, 0)$, da cui $v_2 + v_3 = (0, 1, 1)$.
 Ogni base che soddisfi queste condizioni va bene, per esempio la base $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.
322. a. I due vettori che generano V soddisfano entrambi l'equazione omogenea $x + y + z = t$ che definisce W , quindi ogni vettore di V (che è loro combinazione lineare) la soddisfa.
- b. I tre vettori che generano W ne sono anche una base (sono linearmente indipendenti). Il determinante della matrice 4×4 formata da $(3, 0, 2, 1)$ e dalle coordinate dei tre vettori di W è nullo, per cui $(3, 0, 2, 1)$ sta in W . Analogamente è nullo il determinante della matrice 4×4 formata da $(2, 2, 3, 1)$ e dalle coordinate dei tre vettori di W per cui anche $(2, 2, 3, 1) \in W$. Questo basta ad assicurare che $V \subset W$.
- c. Una base per V è per esempio $(1, -1, 0, 0)$, $(0, 2, -2, -1)$. Poi si procede esattamente come in b.
- d. Per esempio basta osservare che $(0, -1, 1, 1) \in V$, ma $(0, -1, 1, 1) \notin W$ (dato che è diverso da 0 il determinante della matrice 4×4 formata da $(0, -1, 1, 1)$ e dalle coordinate dei tre vettori di W).
323. V è sottospazio perché, se $A_1, A_2 \in V$, allora $A_1 B = B A_1$ e $A_2 B = B A_2$ da cui facilmente $(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) B = B(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)$ cioè $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in V$.
- Si pone $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e si vede che $A \in V$ se e solo se $a = b + d$ e $2c = 3b$. Questo è un sistema lineare con ∞^2 soluzioni dipendenti da b e d . Due soluzioni linearmente indipendenti si trovano per esempio ponendo successivamente $b = 0, d = 1$, e $b = 1, d = 0$. In questo modo si trovano due matrici linearmente indipendenti: $I, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3/2 & 0 \end{pmatrix}$ che quindi formano una base per V .
- Sapendo ora che $\dim(V) = 2$ si vede subito che un'altra base è I, B^{-1} (due matrici linearmente indipendenti che stanno ovviamente in V).
324. V è sottospazio perché, se $A_1, A_2 \in V$, allora $A_1 B = D_1$ e $A_2 B = D_2$ (D_1 e D_2 diagonali) da cui $(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) B = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ che è sempre diagtheoremonale cioè $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in V$.
 Procedendo come nel problema precedente, si trova $b = 2a$ e $c = -3d$. Una base per V è quindi per esempio $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.
331. a. Vera: è un segmento orientato.
 b. Falsa: un vettore è *un insieme di segmenti orientati*.
 c. Vera: ogni segmento orientato rappresenta un vettore geometrico.
332. a. Sì: è il prodotto dello scalare $|\vec{w}|$ per il vettore $\vec{v}$ e dà luogo a un vettore.

- b. Sì: è il prodotto di due numeri reali ed è quindi uno scalare.
- c. Sì, ma solo se $\vec{w} \neq \vec{0}$. È il prodotto dello scalare $1/|\vec{w}|$ per il vettore $\vec{v}$ e dà luogo a un vettore.
- d. No: non ha senso dividere per un vettore.
- e. Sì: è il prodotto dello scalare $\vec{u} \cdot \vec{v}$ per il vettore $\vec{w}$ e dà luogo a un vettore.
- f. No: non si può sommare lo scalare $\vec{u} \cdot \vec{v}$ col il vettore $\vec{w}$.
- g. Sì: è la somma di due scalari.
- h. Sì: è il prodotto scalare di due vettori ed è uno scalare.
- i. No: è ambiguo, dato che in generale $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ e $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ sono differenti.
- j. Sì: ed è un vettore.
- k. Sì: è il prodotto scalare del vettore $\vec{u}$ per il vettore $\vec{v} \wedge \vec{w}$ (il prodotto vettore va eseguito prima) e dà luogo allo scalare prodotto misto.
- l. Sì: è la differenza di due vettori ed è un vettore.
- m. Sì: è il prodotto scalare del vettore $\vec{v} \wedge \vec{w}$ per il vettore $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ed è quindi uno scalare.
333. Calcolo del primo:
 $(1, 2, 0) \wedge (3, 2, 0) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow (0, 0, -4)$. Poi:
 $(0, 0, -4) \wedge (1, 1, 1) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow (4, -4, 0)$
 Calcolo del secondo:
 Prima $(3, 2, 0) \wedge (1, 1, 1) \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow (2, -3, 1)$. Poi:
 $(1, 2, 0) \wedge (2, -3, 1) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow (2, -1, -7)$
334. Nel primo caso no, perché $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos(\theta)$. Nel secondo sì, basta che l'angolo compreso tra i due vettori abbia coseno $-1/2$.
335. Si ha che $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = 4$ e che $\vec{v}$ e $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sono ortogonali, da qui la tesi.
336. a. Applicando la distributività: $(\vec{u} + a\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} + a\vec{v} \wedge \vec{v}$, da cui la tesi, dato che $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
 b. Applicando la distributività: $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{u} \wedge \vec{w}$.
 Il secondo prodotto misto è nullo, perché ci sono due vettori uguali. Il primo è l'opposto del terzo perché sono due prodotti misti con gli stessi vettori, ma con due vettori scambiati. Da qui la tesi.
337. Per ipotesi si hanno le due eguaglianze:
 $\frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{u}}{|\vec{w}_1| \cdot |\vec{u}|} = \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}}{|\vec{w}_2| \cdot |\vec{u}|}; \quad \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}}{|\vec{w}_1| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}}{|\vec{w}_2| \cdot |\vec{v}|}$ da cui $\frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{u}}{|\vec{w}_1|} = \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}}{|\vec{w}_2|}$ e $\frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}}{|\vec{w}_1|} = \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}}{|\vec{w}_2|}$
 Moltiplicando la prima eguaglianza per a , la seconda per b e sommando si ha la tesi.
341. Il vettore $(1, 2 - 1)$ ha modulo $\sqrt{6}$, i due vettori sono dunque: $\pm \frac{5}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$
342. Sia (x, y, z) il vettore cercato, allora $(x, y, z) \cdot (1, 2, 3) = 0$ e $(x, y, z) \cdot (1, 1, -1) = 0$.
 Da qui le due equazioni $(x + 2y + 3z = 0 \quad x + y - z = 0)$. Questo è un sistema lineare 2×3 in (x, y, z) che ha le ∞^1 soluzioni $(5z, -4z, z)$. Una soluzione è $(5, -4, 1)$. Un vettore che soddisfa la richiesta è il suo normalizzato, un altro è l'opposto del normalizzato. Soluzioni del problema sono quindi: $\pm \frac{(5, -4, 1)}{\sqrt{42}}$.
 Altro modo: Calcoliamo il prodotto vettore $(1, 2, 3) \wedge (1, 1, -1) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow (-5, 4, -1)$.
 Si trova un vettore che soddisfa la richiesta, poi si procede come sopra.
- 343 a. I vettori di W sono le combinazioni lineari dei vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, quindi $\vec{v}$ sarà del tipo
 $\vec{v} = a(1, 1, 0) + b(2, -1, 2) = (a + 2b, a - b, 2b)$. Ponendo $\vec{v} \cdot \vec{j} = 0$ si ricava $a - b = 0$.
 Per esempio si può scegliere $a = 1 \quad b = 1$ da cui $\vec{v} = (3, 0, 2)$. Il vettore cercato sarà il normalizzato di $\vec{v}$ oppure il suo opposto. Per esempio $\vec{v} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, 0, \frac{2}{\sqrt{13}} \right)$.

- b. I vettori di W sono $(a + 2b, a - b, 2b)$.

La condizione di ortogonalità a $\vec{v}_1$ è: $(a + 2b, a - b, 2b) \cdot (1, 1, 0) = 0$

Cioè $a + 2b + a - b = 0 \quad 2a + b = 0$. L'equazione lineare in a, b ha ∞^1 soluzioni tra cui per esempio $a = 1$ e $b = -2$, da cui $\vec{w} = (-3, 3, -4)$.

Vediamo se forma angolo acuto con $\vec{v}_2$: $\vec{w} \cdot \vec{v}_2 = (-3, 3, -4) \cdot (2, -1, 2) = -6 - 3 - 8 = -17 < 0$, quindi l'angolo è ottuso. Per rimediare sarà sufficiente cambiare il verso a $\vec{w}$ e prendere $\vec{w} = (3, -3, 4)$.

Perché abbia modulo 1 basterà normalizzarlo: $\vec{w} = \frac{(3, -3, 4)}{\sqrt{34}}$

- c. Il vettore $\vec{v}$ è stato ottenuto come combinazione lineare di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$: $\vec{v} = 1 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2$. La normalizzazione ha cambiato la combinazione lineare in $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{13}} \vec{v}_1 + \frac{1}{\sqrt{13}} \vec{v}_2$.

Quindi la matrice delle coordinate di $\vec{v}$ è $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{13} \\ 1/\sqrt{13} \end{pmatrix}$

Il vettore $\vec{w}$ è stato ottenuto (dopo il cambiamento di verso) come combinazione lineare di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, cioè $-1(1, 1, 0) + 2(2, -1, 2)$

Dopo la normalizzazione la combinazione lineare diventa $\vec{w} = -\frac{1}{\sqrt{34}}(1, 1, 0) + \frac{2}{\sqrt{34}}(2, -1, 2)$

Quindi la matrice delle coordinate di $\vec{w}$ è $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{34} \\ 2/\sqrt{34} \end{pmatrix}$

344. a. Cerchiamo innanzitutto una base solo ortogonale:

Come primo vettore possiamo scegliere $\vec{v} = (1, 1, 0)$.

Il secondo vettore dovrà essere un vettore di W cioè del tipo

$$a\vec{v} + b\vec{w} = a(1, 1, 0) + b(0, -1, 2) = (a, a - b, 2b)$$

Il secondo vettore dovrà poi essere ortogonale a $\vec{v}$, cioè dovrà essere

$$(a, a - b, 2b) \cdot (1, 1, 0) = 0 \quad a \cdot 1 + (a - b) \cdot 1 + 2b \cdot 0 = 0 \quad 2a - b = 0$$

Per esempio per $a = 1$ e $b = 2$ otteniamo il vettore $(1, -1, 4)$.

Una base ortogonale per W è quindi $(1, 1, 0), (1, -1, 4)$.

Per averla ortonormale basterà normalizzare i due vettori: $\mathcal{B} : \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{18}}(1, -1, 4)$

- b. Occorre esprimere $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$: Si ha evidentemente $\vec{v} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \right) + 0 \left(\frac{1}{\sqrt{18}}(1, -1, 4) \right)$, quindi le coordinate di $\vec{v}$ sono $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Per quanto riguarda $\vec{w}$, scriviamo $(0, -1, 2) = a \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \right) + b \left(\frac{1}{\sqrt{18}}(1, -1, 4) \right)$ il che porta al sistema lineare 3×2 nelle incognite a, b :

$$\begin{cases} (1/\sqrt{2})a + (1/\sqrt{18})b = 0 & \text{Sapendo che il sistema ha una soluzione (le coordinate rispetto a una base sono uniche), si ricava subito dall'ultima} \\ (1/\sqrt{2})a - (1/\sqrt{18})b = -1 & \text{equazione } b = \sqrt{18}/2 \text{ e quindi dalla prima } a = -\sqrt{2}/2 \\ 0 \cdot a + (4/\sqrt{18})b = 2 \end{cases}$$

Quindi le coordinate di $\vec{w}$ sono $\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{18}/2 \end{pmatrix}$

- c. Occorre cercare un terzo vettore di V_3 ortogonale a entrambi. Il modo più semplice è di prendere $(1, 1, 0) \wedge (1, -1, 4) = (4, -4, -2)$ o anche il suo multiplo $(2, -2, -1)$. Per averlo di modulo 1 lo si normalizza, quindi la base $\mathcal{B}_1$ è

$$\mathcal{B}_1 : \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{18}}(1, -1, 4), \frac{1}{3}(2, -2, -1)$$

345. Le coordinate dei due vettori si ricavano dalla figura e si vede che $\vec{v} = (1, 0, 2)$ e $\vec{w} = (-1, 3, 1)$.

- a. Si ha: $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5} \quad |\vec{w}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 1, \text{ quindi: } \cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} = \frac{1}{\sqrt{5} \sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{55}}$$

Dato che θ è tra 0 e π , allora $\theta = \arccos(1/\sqrt{55})$

Volendo proseguire il conto mediante calcolatrice:

$\cos(\theta) \simeq 0.135$, da cui $\theta \simeq 1.436$ (in radianti) o $\theta \simeq 82^\circ$ (in gradi).

- b. I vettori di W sono tutte le combinazioni lineari dei vettori della base $\vec{v}$ e $\vec{w}$ cioè i vettori del tipo $a\vec{v} + b\vec{w} = a(1, 0, 2) + b(-1, 3, 1) = (a - b, 3b, 2a + b)$

Imponiamo l'ortogonalità con $\vec{k} = (0, 0, 1)$: $(a - b, 3b, 2a + b) \cdot (0, 0, 1) = 2a + b = 0$

Per esempio con $a = 1$ e $b = -2$ si ha il vettore $\vec{u} = (3, -6, 0)$.

Va bene anche $\vec{u} = (1, -2, 0)$ (multiplo).

- c. I vettori di W sono tutti i vettori del tipo $(a - b, 3b, 2a + b)$. Occorre un vettore di W ortogonale a $\vec{u}$, quindi occorre che

$$(a - b, 3b, 2a + b) \cdot (1, -2, 0) = a - b - 6b = a - 7b = 0$$

Per esempio per $a = 7$ e $b = 1$ si ottiene $(6, 3, 15)$ e la base ortogonale di W è $(1, -2, 0), (6, 3, 15)$

- d. Avendo già due vettori ortogonali di V_3 ricavati dal precedente conto occorre aggiungerne uno ortogonale a entrambi. Per esempio $(1, -2, 0) \wedge (6, 3, 15)$:

$$(1, -2, 0) \wedge (6, 3, 15) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow (-30, -15, 15)$$

Come terzo vettore della base va quindi bene il vettore trovato o anche un suo multiplo.

Se lo dividiamo per 15 troviamo: $(1, -2, 0), (6, 3, 15), (-2, -1, 1)$

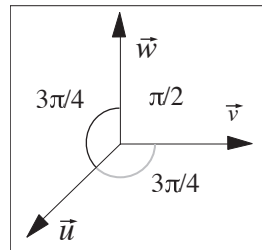
346. a. Per verificare che sono linearmente dipendenti, basta verificare che la matrice delle coordinate dei tre vettori ha determinante nullo. Per semplificare i conti possiamo usare anche la matrice a lato che ha le colonne proporzionali a quella delle coordinate. Ha determinante 0 e quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti e li possiamo pensare come segmenti orientati giacenti sullo stesso piano.

- b. Calcoliamo gli angoli. Basta il prodotto scalare perché hanno tutti e tre modulo 1.

$$\text{Angolo tra } \vec{v} \text{ e } \vec{w}: \cos(\theta_1) = \frac{(-2, 2, 1) \cdot (1, 2, -2)}{3 \cdot 3} = \frac{-1}{3} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Tra } \vec{v} \text{ e } \vec{u}: \cos(\theta_2) = \frac{(-2, 2, 1) \cdot (1, -4, 1)}{3 \cdot \sqrt{18}} = \frac{-9}{3\sqrt{18}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Tra } \vec{w} \text{ e } \vec{u}: \cos(\theta_3) = \frac{(1, 2, -2) \cdot (1, -4, 1)}{3 \cdot \sqrt{18}} = \frac{-9}{3\sqrt{18}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \theta_3 = \frac{3\pi}{4}$$



- c. Dagli angoli e dal fatto che sono complanari, lo schizzo

347. Si deve avere: $(\vec{v} - (1, 0, 0)) \cdot (1, 1, 2) = 0$ e $\vec{v} \cdot (0, 1, 0) = 0$ cioè:

$$\vec{v} \cdot (1, 1, 2) = (1, 0, 0) \cdot (1, 1, 2) \quad \text{e} \quad \vec{v} \cdot (0, 1, 0) = 0.$$

Ponendo $\vec{v} = (x, y, z)$ si ha il sistema lineare $\{x + y + 2z = 1 \quad y = 0\}$ da cui si trovano i vettori $(1 - 2z, 0, z)$ ($z \in \mathbb{R}$).

348. I vettori sono $a(1, -1, 1)$ e bisogna che $|(a, -a, a) - (1, 0, 0)| = \sqrt{(a-1)^2 + a^2 + a^2} = 3$, da cui $a = 2, -4/3$. I vettori cercati sono quindi $\vec{v} = 2(1, -1, 1)$ e $\vec{v} = (-4/3)(1, -1, 1)$

349. a. È sinistrorsa: si ottiene dalla base destrorsa $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ con un solo scambio.

- b. È destrorsa, : si ottiene dalla base destrorsa $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ con una permutazione circolare verso sinistra.

- c. È destrorsa, basta verificare che il segno del determinante della matrice delle coordinate dei tre vettori è positivo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

350. a. La proiezione è per definizione: $\frac{(1, 2, 1) \cdot (0, 3, 1)}{|(0, 3, 1)|^2} (0, 3, 1) = \frac{7}{10} (0, 3, 1)$.

- b. Il vettore è del tipo $a(1, 2, 1)$.

La sua proiezione ortogonale su $(0, 3, 1)$ è $\frac{a(1, 2, 1) \cdot (0, 3, 1)}{|(0, 3, 1)|^2} (0, 3, 1) = \frac{7a}{10} (0, 3, 1)$ e ha

modulo $\left| \frac{7a}{10} \right| |(0, 3, 1)| = \frac{7}{10} \sqrt{10} |a|$. Da cui $a = \pm \sqrt{10}/7$. Quindi ci sono due vettori che

soddisfano la condizione e sono : $\pm \frac{10}{7\sqrt{10}} (1, 2, 1)$

351. Dato che $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono linearmente indipendenti, la prima condizione implica che $\vec{w}$ sia combinazione lineare di $\vec{u}$ e $\vec{v}$, cioè che $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. La seconda impone che $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$, cioè che $a\vec{u} \cdot \vec{v} + b\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ e quindi che $2a + 2b = 0$, ossia $b = -a$, da cui $\vec{w} = a\vec{u} - a\vec{v} = a(\vec{u} - \vec{v})$.

Per la terza condizione: la proiezione è $\frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} = \frac{(a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} = \frac{3a}{5} (1, 2, 0)$ che ha modulo $\frac{|3a|}{5} |(1, 2, 0)| = \frac{|3a|}{\sqrt{5}}$, da cui $a = \pm\sqrt{5}/3$. Ci sono dunque due soluzioni al problema: $\vec{w} = \pm(\sqrt{5}/3, \sqrt{5}/3, \sqrt{5}/3)$.

352. I vettori sono (x, y) e occorre che $\frac{(x, y) \cdot (-1, 2)}{|(x, y)| |(-1, 2)|} = \frac{1}{2}$, cioè $\frac{-x + 2y}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{5}} = \frac{1}{2}$, da cui $-2x + 4y = \sqrt{5x^2 + 5y^2}$. Possiamo elevare a quadrato questa equazione

supponendo però che $-2x + 4y > 0$

e si ottiene $x^2 + 16xy - 11y^2 = 0$ che si può scrivere (ponendo $y \neq 0$) $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 16\left(\frac{x}{y}\right) - 11 = 0$

da cui $(x/y) = -8 \pm 5\sqrt{3}$. I vettori sono quindi $((-8 \pm 5\sqrt{3})y, y)$, ma occorre che $-x + 2y > 0$, cioè che $(8 \mp 5\sqrt{3})y + 2y > 0$ e, dato che $10 \mp 5\sqrt{3} > 0$ nei due casi (sia con “+” che con “-”), allora occorre che $y > 0$. Quindi i vettori sono $((-8 \pm 5\sqrt{3})y, y)$ con $y > 0$.

353. Poniamo $\vec{v} = (x, y, z)$. Si deve avere

$$\frac{(x, y, z) \cdot (0, -1, 1)}{|(x, y, z)| |(0, -1, 1)|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } (x, y, z) \cdot (1, 0, -2) = 0 \quad \text{Da qui il sistema } \begin{cases} -y + z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

La prima equazione non ha evidentemente soluzioni se $-y + z < 0$ e può essere elevata a quadrato, ponendo però $-y + z \geq 0$

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - 2yz = x^2 + y^2 + z^2 \\ x = 2z \end{cases} \quad \begin{cases} -2yz = x^2 \\ x = 2z \end{cases} \quad \text{Sostituendo } x = 2z \text{ al posto di } x \text{ nella prima equazione: } \begin{cases} -2yz = 4z^2 \\ x = 2z \end{cases}$$

Dato che la prima equazione è $z(-2y - 4z) = 0$, il sistema di $\begin{cases} z = 0 \\ x = 2z \end{cases}$ e $\begin{cases} -2y = 4z \\ x = 2z \end{cases}$ secondo grado si spezza nell'unione dei due sistemi lineari

Le soluzioni sono $(0, y, 0)$ e $(2z, -2z, z)$, ma, per la condizione posta $-y + z \geq 0$, occorre nel primo caso che $-y \geq 0$, cioè $y \leq 0$ e nel secondo caso che $2z + z \geq 0$, cioè $z \geq 0$.

354. a. I vettori ortogonali a $\vec{v}$ sono $a(3, 1)$.

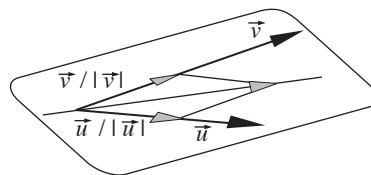
Si deve avere $\frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w} = \frac{a(3, 1) \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w}$, da cui $(-1/5)(2, 1) = (a \cdot 7/5)(2, 1)$ e quindi $a = -1/7$.

Pertanto $\vec{u}_1 = (-3/7, -1/7)$.

b. Poniamo $\vec{u}_2 = (x, y)$. Allora $\frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w}$, da cui $-\frac{1}{5}(2, 1) = \frac{2x + y}{5}(2, 1)$ e quindi le condizioni $2x + y = -1$ e $x^2 + y^2 = 1$ da cui $\vec{u}_2 = (-4/5, 3/5)$ oppure $\vec{u}_2 = (0, -1)$.

355. Occorre determinare la bisettrice dei due vettori nel loro piano. Se i due vettori hanno lo stesso modulo, allora un vettore della bisettrice è la loro somma, per cui basta normalizzarli. I vettori cercati sono quindi:

$a \left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} + \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right)$ con $a \in \mathbb{R}$. La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.



356. Per proiettare sul sottospazio di dimensione 2 occorre una base ortonormale di $W = L\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$. I vettori di W sono del tipo $a(1, 2, 0) + b(0, -1, 1) = (a, 2a - b, b)$. Cerchiamo un vettore di W ortogonale a $\vec{u}_1$: $(a, 2a - b, b) \cdot (1, 2, 0) = 0$ da cui $5a = 2b$, per esempio $a = 2$, $b = 5$ e si ottiene il vettore $(2, -1, 5)$. Quindi una base ortogonale per W è per esempio $(1, 2, 0)$, $(2, -1, 5)$ e una ortonormale è $\vec{v}_1 = (1, 2, 0)/\sqrt{5}$, $\vec{v}_2 = (2, -1, 5)/\sqrt{30}$.

La proiezione di $(1, 0, 0)$ su W è quindi $((1, 0, 0) \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + ((1, 0, 0) \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 = (1/3, 1/3, 1/3)$.

L'angolo θ è tale che $\cos(\theta) = \frac{(1, 0, 0) \cdot (1/3, 1/3, 1/3)}{|(1, 0, 0)| |(1/3, 1/3, 1/3)|} = \sqrt{1/3}$ con $0 < \theta < 2\pi$.

Si ha $\theta \simeq 0.95$.

4. DIAGONALIZZAZIONE: Autovalori, autovettori

- F 401. Dati i vettori $u_1 (1, 3, -3)$, $u_2 (1, -1, -1)$, $u_3 (1, 1, 1)$, $u_4 (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$
- Dire quali di essi sono autovettori per A e determinare l'autovalore associato. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
 - In base ai dati acquisiti, dire se A è diagonalizzabile.
- F 402. È data la matrice simmetrica A .
- Determinare una base per il sottospazio $\ker(f)$ dove f è l'applicazione lineare associata alla matrice A .
 - Verificare che $(1, -1, 0)$ è autovettore per A .
 - In base ai dati acquisiti e senza calcolare il polinomio caratteristico di A , determinare una base di $\mathbb{R}^3$ tutta costituita da autovettori per A .
- $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
- F 403. È data la matrice A .
- Dire quali dei vettori $(0, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(0, 0, 0)$ sono autovettori per A .
 - Determinare una base per il sottospazio $\ker(f)$ dove f è l'applicazione lineare associata alla matrice A .
 - Dedurre dai calcoli precedenti tutti gli autovalori di A e la loro molteplicità.
 - Dire perché A è diagonalizzabile e determinare una matrice diagonale $D \in M_{33}(\mathbb{R})$ e una matrice invertibile $P \in M_{33}(\mathbb{R})$ tali che $AP = PD$.
- $$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
- F 404. Usando i criteri noti, dire quali delle seguenti matrici sono diagonalizzabili, come matrici a elementi reali o a elementi complessi.
- $$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- F 405. a. Dire perché A è diagonalizzabile e determinare una base di $\mathbb{R}^3$ tutta costituita da autovettori per A .
- Scrivere una matrice P invertibile e una D diagonale tali che $P^{-1}AP = D$.
 - Calcolare A^{999} .
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
- F 406. Sono date le due matrici $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ Per ciascuna di esse:
- Determinare una base per $\ker(f)$ dove f è l'applicazione lineare associata alla matrice.
 - Dire se la matrice è diagonalizzabile e perché.
 - Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per la matrice.
- F 407. a. Dire quali dei seguenti vettori sono autovettori per la matrice $A \in M_{44}(\mathbb{R})$:
- $$(0, 2, 1, 1), (0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0)$$
- $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
- Scelti gli autovettori determinati al punto precedente, scrivere una base di $\mathbb{R}^4$ tutta fatta di autovettori che comprenda questi vettori.
- F 408. Data la matrice $A \in M_{33}(\mathbb{R})$ dipendente da $k \in \mathbb{R}$.
- $$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
- Dire per quale k è diagonalizzabile A .
 - Per tale k scrivere una matrice invertibile P e una diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$.
- C 409. Data la matrice $A \in M_{33}(\mathbb{R})$
- $$A = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ k & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
- Determinarne tutti gli autovalori e la loro molteplicità.
 - Dire per quali k è diagonalizzabile e perché.
- C 410. Sono dati i vettori $v_1 = (1, 1, 1, k)$ $v_2 = (0, 0, 0, k)$ $v_3 = (-2, 2, k, 2)$ e la matrice A
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
- Per ognuno dei vettori v_1, v_2, v_3 determinare i k per i quali il vettore è autovettore per la matrice A e dire qual è l'autovalore corrispondente.
 - Scrivere una base di $\mathbb{R}^4$ tutta fatta da autovettori per A che comprenda gli autovettori determinati sopra.

- F 411. È data la matrice $A \in M_{22}(\mathbb{R})$.
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
- Determinare due autovettori v e w linearmente indipendenti per A .
 - Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata alla matrice A , calcolare $f^{100}(v)$ e $f^{100}(w)$.
 - Scrivere $(1, 0)$ come combinazione lineare di v e w e quindi calcolare $f^{100}(1, 0)$.
- C 412. Provare che è diagonalizzabile la matrice A e diagonalizzarla (determinare cioè P matrice invertibile e D matrice diagonale tali che $P^{-1}AP = D$).
Osservazione: Non è necessario calcolare il polinomio caratteristico.
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
- C 413. È data l'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ associata alla matrice A .
- Determinare una base per $\ker(f)$
 - Dire perché A è diagonalizzabile e scrivere una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per A .
 - Scrivere una matrice P invertibile e una D diagonale, tali che $AP = PD$.
 - Calcolare $f^{2001}(0, 0, 0, 1)$.
- $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- C 414. È data la matrice A dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.
Per ogni $k \in \mathbb{R}$ dire se A è diagonalizzabile e **perché**.
- $$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
- C 415. Sono dati la matrice $A \in M_{44}(\mathbb{R})$ e il vettore $v = (0, h, k, k) \in \mathbb{R}^4$ dipendente da $h, k \in \mathbb{R}$.
- Dire per quali $h, k \in \mathbb{R}$ il vettore v è autovettore e specificare l'autovalore relativo λ .
• Per le tre domande successive scegliere h, k per cui v è autovettore.
 - Scrivere una base per l'autospazio V_λ comprendente v .
 - Completare il vettore v a base di $\mathbb{R}^4$ **tutta fatta di autovettori per A** .
 - Determinare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$ in modo che P sia fatta come a lato.
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad P = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ \hline * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right)$$
- A 416. Chiamata A la matrice 2×2 in ognuno dei tre casi seguenti, dire se A è diagonalizzabile come matrice a elementi reali o a elementi complessi.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
 - $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
 - $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- In caso positivo diagonalizzare A , ovvero scrivere una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$ e, mediante l'uso di P e D , calcolare A^{99} .
- A 417. Dire perché è diagonalizzabile la matrice A a elementi complessi e diagonalizzarla (determinare cioè P matrice invertibile e D matrice diagonale tali che $P^{-1}AP = D$).
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1+i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$
- A 418. È data la matrice reale A dipendente da due parametri $a, b \in \mathbb{R}$. Per ogni coppia di $a, b \in \mathbb{R}$ dire se è diagonalizzabile.
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & b \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$$
- A 419. Provare che per ogni $n \geq 2$ sono diagonalizzabili le seguenti matrici di $M_{nn}(\mathbb{R})$ e diagonalizzarle (determinare cioè P matrice invertibile e D matrice diagonale tali che $P^{-1}AP = D$).
- La matrice $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ in cui ogni elemento è 1 ($a_{ij} = 1$ per ogni i, j)
 - La matrice $B \in M_{nn}(\mathbb{R})$ in cui ogni elemento è 1, tranne la diagonale che è nulla, ($b_{ij} = 1$ per $i \neq j$ e $b_{ii} = 0$ per $i = j$), cioè $B = A - I$.
- A 420. a. Dimostrare che la matrice $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ è sempre diagonalizzabile per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ e determinare tutti gli autovettori di A .
b. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ associata ad A . Identificato $\mathbb{R}^2$ con V_2 mediante una base ortonormale $\vec{i}, \vec{j}$ di V_2 , dare un'interpretazione geometrica degli autovettori di A in funzione di θ .
- $$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

4. DIAGONALIZZAZIONE: Basi ortonormali, matrici ortogonali

- F 431. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalla base $\mathcal{B} : (1, 0, 2), (0, 2, -1)$. Verificare che anche $\mathcal{C} : (1, 2, 1), (1, 4, 0)$ è base per V e ortonormalizzare le due basi mediante l'algoritmo di Gram-Schmidt.
- F 432. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare euclideo, completare i due vettori ortogonali $v_1(1, 0, -1, 1)$, $v_2(1, 1, 1, 0)$ a base ortogonale di $\mathbb{R}^4$, mediante due vettori v_3, v_4 .
- C 433. Dire perché è possibile completare la matrice $P \in M_{33}(\mathbb{R})$ in modo che sia ortogonale e abbia determinante positivo e completarla, indi calcolare P^{-1} .
- $$P = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & * \\ 2/3 & 2/3 & * \\ 1/3 & * & * \end{pmatrix}$$
- C 434. Data la matrice reale incompleta $P \in M_{33}(\mathbb{R})$, completarla *in tutti i modi possibili* in modo che sia ortogonale.
- $$P = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & * \\ 2/3 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$
- F 435. Determinare una base ortonormale per ognuno dei seguenti spazi vettoriali.
- a. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$ b. $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z = t\}$
 c. $U = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 : x + z = 2y = t - 2u\}$ d. $Z = L\{1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 2), (0, -1, 1, 1)\}$

4. DIAGONALIZZAZIONE: Matrici simmetriche e teorema spettrale

- F 441. Verificare che i due vettori $(2, -1, 0), (0, 1, 1)$ sono autovettori per la matrice A aventi lo stesso autovalore e determinare tale autovalore. Senza calcolarlo direttamente, ma usando il teorema spettrale, trovare un altro autovalore e un altro autovettore.
- $$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$
- F 442. Data la matrice simmetrica A .
- a. Determinare una base *ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per A .
- b. Scrivere una matrice ortogonale P e una diagonale D tali che $P^T A P = D$.
- $$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
- F 443. Diagonalizzare le seguenti matrici simmetriche reali mediante una matrice ortogonale a determinante positivo (determinare cioè P matrice ortogonale *con determinante* 1 e D matrice diagonale tali che $P^T A P = D$ etc.).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- A 444. Diagonalizzare le seguenti matrici simmetriche reali per mezzo di una matrice ortogonale avente determinante 1.
 A matrice $n \times n$ tutta costituita da 1 ($a_{ij} = 1, \forall i, j$)
 B matrice $n \times n$ tutta costituita da 1 tranne la diagonale che è nulla, ($a_{ij} = 1, \forall i \neq j, a_{ii} = 0, \forall i$), cioè $B = A - I$.

4. DIAGONALIZZAZIONE: Forme quadratiche

- F 451. È data la matrice simmetrica $A \in M_{44}(\mathbb{R})$
- a. Scrivere la forma quadratica $Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ associata ad A tramite la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
- b. Determinare il carattere di definizione di Q .
- c. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la matrice $A + aI$ è definita positiva.
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
- F 452. Scrivere in forma matriciale la forma quadratica $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2kyz$ dipendente da $k \in \mathbb{R}$ e dire per ogni $k \in \mathbb{R}$ che carattere di definizione ha (usare criterio di Sylvester).
- C 453. Data la forma quadratica $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

$$Q(x, y, z) = kx^2 + 6xy + ky^2 + kz^2 + 8yz$$

a. Scriverla in forma matriciale.

b. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ è definita positiva, usando il criterio dei minori principali.

- C 454. Studiare usando il teorema di inerzia di Sylvester il carattere di definizione e la segnatura degli autovalori delle matrici simmetriche A e B al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & k-4 & k-4 \\ 1 & k-4 & k-1 \end{pmatrix}$$

- F 455. Determinare il carattere di definizione delle seguenti forme quadratiche definite su $\mathbb{R}^3$, scegliendo ogni volta il metodo più opportuno.

a. $x^2 + y^2 + xy$

b. $x^2 + 2xy + y^2 + z^2$

c. $xy + xz + yz$

d. $x^2 + yz$

e. $3x^2 - y^2$

f. $y^2 + z^2 - xy$

g. $x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz$

h. $x^2 + 4xy + 2y^2 + 2yz + 3z^2$

i. $x^2 + xy + xz - z^2$

- A 456. Determinare il carattere di definizione della forma quadratica $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita a lato mediante una matrice *non simmetrica*.

$$Q(x, y, z) = (x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

4. DIAGONALIZZAZIONE: Autovalori, autovettori

401. a. Basta calcolare:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \left| \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \quad \left| \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \quad \left| \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \right|$$

Quindi il vettore $(1, 3, -3)$ è autovettore e l'autovalore è 2.

Il vettore $(1, 1, -1)$ non è autovettore

Il vettore $(1, 1, 1)$ è autovettore e l'autovalore è 2.

Il vettore $(1, -1, 1)$ è autovettore e l'autovalore è 6.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b. I tre autovettori $(1, 3, -3)$, $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ sono linearmente indipendenti

in quanto la matrice P delle loro coordinate ha determinante non nullo.

Dato che tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ formano base, allora abbiamo una base di $\mathbb{R}^3$ tutta costituita da autovettori, pertanto A è diagonalizzabile.

402. a. Per determinare una base per $\ker(f)$ basta risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice. Ha ∞^1 soluzioni e sono $(-z, -z, z)$ al variare di $z \in \mathbb{R}$. Quindi una base per $\ker(f)$ è $(1, 1, -1)$.

b. Eseguiamo il prodotto $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ Quindi $(1, -1, 0)$ è autovettore e l'autovalore relativo è 3.

c. Il fatto che $\ker(f)$ sia diverso da $\{(0, 0, 0)\}$ dice che 0 è autovalore per A . D'altra parte abbiamo appena visto che anche 3 è autovalore. Potrebbe esserci un terzo autovalore non evidente, ma, prima di calcolare il polinomio caratteristico, determiniamo gli autospazi:

• $\lambda = 0$ L'autospazio è il nucleo $L\{(1, 1, -1)\}$.

• $\lambda = 3$ La matrice $A - 3I$ a lato ha evidentemente caratteristica 1, quindi il sistema omogeneo associato ha ∞^2 soluzioni che costituiscono l'autospazio.

Le soluzioni sono $(-y + z, y, z)$, quindi l'autospazio V_3 è $L\{(1, -1, 0), (1, 0, 1)\}$. L'autospazio ha dimensione 2.

Mettendo insieme i tre autovettori, il criterio fondamentale di diagonalizzabilità ci assicura che (anche senza verificarne la lineare indipendenza) $\mathcal{B} : (1, 1, -1), (1, -1, 0), (1, 0, 1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$, tutta fatta di autovettori.

403. a. Basta calcolare: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}$

Quindi $(0, 1, 1)$ non è autovettore, mentre $(1, 2, 1)$ è autovettore e l'autovalore è 7.

Il vettore $(0, 0, 0)$ non è autovettore per definizione.

b. Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice. Si possono subito eliminare la terza riga identica alla prima e la seconda che è proporzionale alla prima.

Il sistema si riduce subito all'unica equazione $-x + 2y + 4z = 0$, è ridotto e ha ∞^2 soluzioni dipendenti da y e z . Le soluzioni $(2y + 4z, y, z)$ sono i vettori di $\ker(f)$ e si possono scrivere come $y(2, 1, 0) + z(4, 0, 1)$. Perciò i vettori $(2, 1, 0)$ e $(4, 0, 1)$ generano $\ker(f)$. dato che sono linearmente indipendenti in quanto due e non proporzionali, formano base per $\ker(f)$.

c. Dato che il nucleo di f è diverso dallo spazio nullo, allora 0 è un autovalore per A e $\ker(f) = V_0$. Per quanto riguarda la sua molteplicità, visto che $\dim(V_0) \leq \text{molteplicità}(0)$ e V_0 ha dimensione 2, allora la molteplicità di $\lambda_1 = 0$ deve essere almeno 2.

Dato che poi, come abbiamo già visto $(1, 2, 1)$ è autovettore e quindi $\lambda = 7$ è autovalore con molteplicità almeno 1. L'unica possibilità affinché la somma delle molteplicità sia 3 è che gli autovalori siano:

$$\lambda_1 = 0 \text{ con molteplicità } 2 \quad \lambda_2 = 7 \text{ con molteplicità } 1$$

d. A è diagonalizzabile perché, come abbiamo già rilevato:

• $\lambda_1 = 0$ è autovalore con molteplicità 2 e $\dim(V_0) = \dim(\ker(f)) = 2$

• $\lambda_2 = 7$ è autovalore con molteplicità 1 e se la molteplicità è 1, sicuramente $\dim(V_7) = 1$

Una base di autovettori può essere costruita mettendo insieme la base di V_0 : $(2, 1, 0)$, $(4, 0, 1)$ e una

base di V_7 , per esempio $(1, 2, 1)$ (che, come abbiamo visto, è autovettore).

La matrice P avrà nelle colonne le coordinate dei vettori della base di autovettori e la matrice diagonale D avrà sulla diagonale gli autovalori corrispondenti.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

404. A Dato che A è triangolare superiore, il polinomio caratteristico si calcola immediatamente ed è $(1-x)(2-x)(4-x)$. Quindi A ha i tre autovalori distinti 1, 2, 4, ed è diagonalizzabile per il criterio fondamentale.

B Dato che B è triangolare superiore a blocchi e il blocco superiore è a sua volta triangolare inferiore, il polinomio caratteristico è immediato ed è $(4-x)(1-x)(3-x)$. Quindi B ha i tre autovalori distinti 1, 3, 4, ed è diagonalizzabile per il criterio fondamentale.

C Dato che C è triangolare superiore, il polinomio caratteristico è immediato ed è $(2-x)^3$. Quindi C ha l'autovalore 2 con molteplicità 3. Se C fosse diagonalizzabile, si avrebbe $\dim(V_2) = 3$, da cui $\rho(C - 2I) = 0$, cioè $C - 2I = 0$, ma evidentemente $C \neq 2I$, quindi C non è diagonalizzabile.

D La matrice D è diagonalizzabile, dato che è simmetrica.

E Dato che E è triangolare inferiore a blocchi e il blocco inferiore è a sua volta triangolare superiore, il polinomio caratteristico è immediato ed è $x^2(1-x)$. Quindi E ha l'autovalore 0 con molteplicità 2. Se fosse diagonalizzabile, si avrebbe $\dim(V_0) = 2$, da cui $\rho(E - 0I) = 1$, cioè $\rho(E) = 1$, ma evidentemente $\rho(E) = 2$ (si vede subito un minore di ordine 2 non nullo), quindi E non è diagonalizzabile.

F Il polinomio caratteristico di F è $-x^3 + 3$, quindi gli autovalori sono le radici cubiche di 3. Due radici sono non reali. Quindi F non è diagonalizzabile come matrice reale, ma, dato che le radici cubiche di 3 sono distinte, allora è diagonalizzabile come matrice complessa per il criterio fondamentale.

405. a. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A :

$$\det \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 2 \\ -2 & -2-x & -2 \\ 0 & 0 & -1-x \end{pmatrix} = (-1-x) \left((1-x)(-2-x) + 2 \right) = (-1-x)(x^2 + x)$$

Le radici sono quindi: $\lambda_1 = 0$ con molteplicità 1 $\lambda_2 = -1$ con molteplicità 2.

Si ha $\dim(V_0) = 1$, dato che $\lambda_1 = 0$ ha molteplicità 1.

Per dimostrare che A è diagonalizzabile usando il criterio fondamentale occorre verificare che $\dim(V_{-1}) = 2$.

Scriviamo la matrice $A + 1I$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ La matrice ha evidentemente caratteristica 1, quindi $\dim(V_{-1}) = 3 - 1 = 2$ e questo prova che A è diagonalizzabile.

Per avere una base di autovettori di V_{-1} calcoliamo le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A + 1I$, che si riduce alla sola equazione $2x + y + 2z = 0$.

Due soluzioni linearmente indipendenti sono per esempio $(1, -2, 0)$ e $(1, 0, -1)$

Per avere un autovettore di V_0 calcoliamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $A - 0I$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Una soluzione è per esempio $(1, -1, 0)$.

I tre vettori $(1, -2, 0)$, $(1, 0, -1)$, $(1, -1, 0)$ sono linearmente indipendenti per il criterio fondamentale di diagonalizzabilità e formano una base di autovettori.

b. P ha nelle colonne le coordinate dei vettori della base di autovettori e D ha nella diagonale gli autovalori corrispondenti.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. Come è noto: $A^{999} = PD^{999}P^{-1}$

$$\text{Ma } D^{999} = \begin{pmatrix} -1^{999} & 0 & 0 \\ 0 & -1^{999} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Quindi } D^{999} \text{ è } D \text{ stessa.}$$

Di conseguenza: $A^{999} = PDP^{-1} = A$

406. Matrice A :

a. Si vede subito che il determinante di A è diverso da zero, quindi $\varrho(A) = 3$, per cui l'unica soluzione del sistema omogeneo associato ad A è quella nulla. Quindi $\ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$ e l'unica sua base è vuota.

$$b. \det \begin{pmatrix} 5-x & 2 & -3 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 2 & 2 & -x \end{pmatrix} = (-1-x) \det \begin{pmatrix} 5-x & -3 \\ 2 & -x \end{pmatrix} = (-1-x)(x^2 - 5x + 6)$$

Gli autovalori sono quindi: $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = 3$ tutti con molteplicità 1. Quindi A è diagonalizzabile perché una matrice con tutti autovalori distinti lo è sempre.

c. Calcoliamo gli autovettori. Per ogni autovalore λ gli autovettori sono le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$ che saranno senz'altro ∞^1 in ciascuno dei tre casi:

$\lambda = -1$	$\lambda = 3$	$\lambda = 2$
$A + I = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
Una soluzione è $(-2, 3, -2)$	Una soluzione è $(3, 0, 2)$	Una soluzione è $(1, 0, 1)$

Il criterio fondamentale di diagonalizzabilità ci assicura che (anche senza verificarne la lineare indipendenza) i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$ tutta fatta di autovettori: $(-2, 3, -2)$, $(3, 0, 2)$, $(1, 0, 1)$

Matrice B :

a. Per trovare $\ker f$ risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice, riducendola:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} R_3 \rightarrow R_3 - (1/3)R_1 \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Le soluzioni sono } \infty^1 \\ \text{e sono } (z, 0, z) \text{ al} \\ \text{variare di } z \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Il nucleo ha perciò dimensione 1 e una base per $\ker f$ è per esempio: $(1, 0, 1)$.

$$b. \text{ Si ha: } \det \begin{pmatrix} 3-x & 2 & -3 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 1 & 2 & -1-x \end{pmatrix} = (2-x) \det \begin{pmatrix} 3-x & -3 \\ 1 & -1-x \end{pmatrix} = (2-x)(x^2 - 2x).$$

Quindi gli autovalori sono: $\lambda = 0$ con molteplicità 1 ; $\lambda = 2$ con molteplicità 2.

• $\lambda = 0$ L'autovalore 0, avendo molteplicità 1 non crea problemi: $\dim(V_0) = 1$.

• $\lambda = 2$ La dimensione di V_2 è data dal numero di soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $B - 2I$, che ha evidentemente ∞^2 soluzioni, quindi $\dim(V_2) = 2$.

È ora chiaro che B è diagonalizzabile, dato che soddisfa il criterio di diagonalizzabilità.

c. Determiniamo una base per ciascun autospazio.

Com'è noto, se 0 è autovalore, allora $V_0 = \ker f$, una base per V_0 è quindi $(1, 0, 1)$.

Una base per V_2 si ottiene risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $B - 2I$ che si riduce alla sola equazione $x + 2y - 3z = 0$

Due soluzioni linearmente indipendenti sono: $(3, 0, 1)$, $(2, -1, 0)$.

Mettendo insieme i tre vettori, il criterio fondamentale di diagonalizzabilità ci assicura che (anche senza verificarne la lineare indipendenza) i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$ tutta fatta di autovettori: $\mathcal{B} : (1, 0, 1)$, $(3, 0, 1)$, $(2, -1, 0)$.

407. a. Basta calcolare:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi $(0, 2, 1, 1)$ è autovettore e l'autovalore è 3.

I vettori $(0, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$ sono autovettori e l'autovalore è 2.

Il vettore $(0, 1, 0, 0)$ non è autovettore.

b. La matrice è triangolare inferiore a blocchi, quindi: $\det(A - xI) =$

$$= \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3-x & & & 0 & 0 & 0 \\ & 4-x & -2 & & 0 & \\ & 4 & 1 & 1-x & 0 & \\ \hline & 3 & 1 & -1 & 2-x & \end{array} \right) = (3-x) \cdot \det \begin{pmatrix} 4-x & -2 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} \cdot (2-x) =$$

$$= (3-x)(x^2 - 5x + 6)(2-x)$$

Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 3$ entrambi con molteplicità 2.

Abbiamo già due vettori di V_2 e un vettore di V_3 . Occorre un altro vettore di V_3

La matrice $A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ha la prima riga nulla e seconda e terza riga identiche, quindi della matrice del sistema omogeneo associato a $A - 3I$ restano due righe. Riduciamola totalmente:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Basta una soluzione diversa da $(0, 2, 1, 1)$, per esempio $(1, 4, 0, 1)$.

La base richiesta quindi è $(0, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 2, 1, 1)$, $(1, 4, 0, 1)$.

408. a. Calcoliamo il polinomio caratteristico: $(3 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda)$

Quindi gli autovalori sono: $\lambda_1 = 3$ (molteplicità 2) $\lambda_2 = 0$ (molteplicità 1).

Il criterio di diagonalizzabilità è verificato per $\lambda_2 = 0$ perché $\dim(V_0) = 1$. Per vedere se A è diagonalizzabile occorre calcolare $\dim(V_3)$.

La matrice $A - 3I$ è $\begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si vede immediatamente che se $k = 1$ la matrice ha caratteristica 1 e quindi $\dim(V_3) = 2$. se invece $k \neq 1$ allora la matrice ha caratteristica 2 e quindi $\dim(V_3) = 1$.

In conclusione la matrice è diagonalizzabile solo se $k = 1$.

b. Poniamo $k = 1$. Abbiamo già la matrice $A - 3I$ e il sistema omogeneo associato si riduce alla sola equazione $-y + z = 0$ che ha le soluzioni (x, z, z) . Una base per V_3 è per esempio $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$. Per quanto riguarda V_0 , una soluzione non nulla del sistema omogeneo associato ad A è $(1, 2, -1)$.

La matrice P avrà nelle colonne le coordinate dei vettori della base di autovettori e la matrice diagonale $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ D avrà sulla diagonale gli autovalori corrispondenti.

409. a. Si ha: $\det(A - xI) = (2\sqrt{2} - x) \det \begin{pmatrix} 2-x & 4 \\ 1 & -2-x \end{pmatrix} = (2\sqrt{2} - x)(x^2 - 8)$ Gli autovalori sono quindi $\lambda_1 = -2\sqrt{2}$ (molteplicità 1) $\lambda_2 = 2\sqrt{2}$ (molteplicità 2).

b. Dato che V_1 ha sicuramente dimensione 1 dato che λ_1 ha molteplicità 1, per il criterio fondamentale perché A sia diagonalizzabile occorre che $\dim(V_2) = 2$ cioè che $A - 2\sqrt{2}I$ abbia caratteristica 1. Si ha:

$$A - 2\sqrt{2}I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 2 - 2\sqrt{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ Elimino } R_1 \text{ ed eseguo } R_1 \leftrightarrow R_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 - 2\sqrt{2} \\ k & 2 - 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - (k/2)R_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 - 2\sqrt{2} \\ 0 & 2 - 2\sqrt{2} - k/2 & 4 + (1 + \sqrt{2})k \end{pmatrix}$$

Perché la matrice abbia rango 1 occorre $\begin{cases} k/2 = 2 - 2\sqrt{2} \\ 4 / (1 + \sqrt{2}) + k = 0 \end{cases}$ e da entrambe le equazioni che la seconda riga sia nulla cioè che: risulta $k = 4 - 4\sqrt{2}$.

410. a. Vediamo se v_1 può essere autovettore:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 3k \\ 5 - 3k \\ 2 \\ 3 - k \end{pmatrix}$$

Dalla terza coordinata si deduce che per essere autovettore occorre che sia $\lambda = 2$ e quindi dovrà essere $-1 + 3k = 2$; $5 - 3k = 2$; $3 - k = 2$ e quindi $k = 1$.

Analogo per v_2 : $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k \\ -3k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}$ Dalla terza coordinata si deduce che per essere autovettore occorre che sia $\lambda = 0$ e quindi dovrà essere $3k = 0$ $-3k = 0$; $-k = 0$ e quindi $k = 0$. Ma in tal caso si ha $v_2 = 0$ e quindi v_2 non può essere autovettore.

Analogo per v_3 : $A \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0 \\ 2k \\ 0 \end{pmatrix}$ È evidente che può essere autovettore solo se $k = 0$ e in tal caso l'autovalore è $\lambda = 0$.

b. Abbiamo gli autovalori $\lambda = 2$ e $\lambda = 0$. Vediamo come sono fatti i relativi autospazi.

• $\lambda = 0$ La matrice $A = A - 0I$ ha caratteristica 3 (basta eseguire $R_2 \rightarrow R_2 - R_1$ e $R_4 \rightarrow R_4 - R_1$ e ottenere la matrice a lato).
Quindi $\dim(V_0) = 1$ e abbiamo già un autovettore: $v_3 = (-2, 2, 0, 2)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

• $\lambda = 2$ La matrice $A - 2I$ ha caratteristica 1 (ha tre righe proporzionali e una nulla) e quindi $\dim(V_2) = 3$ e abbiamo già un autovettore: $v_1 = (1, 1, 1, 1)$. Ne occorrono altri 2.

L'unica riga significativa di $A - 2I$ è $(-1 \quad -2 \quad 0 \quad 3)$, quindi occorre trovare altre due soluzioni di $-x - 2y + 3t = 0$.

Per esempio $(0, 0, 1, 0)$ e $(2, 1, 0, 0)$. I tre vettori di V_2 $(1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 0)$ sono linearmente indipendenti perché la matrice P delle loro coordinate ha caratteristica 3

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il criterio fondamentale di diagonalizzazione ci assicura che i quattro vettori $(-2, 2, 0, 2), (1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 0)$ sono linearmente indipendenti e quindi questa è una base di $\mathbb{R}^4$ tutta fatta da autovettori per A .

411. a. Il polinomio caratteristico è $(3 - x)(3 - x) - 16 = x^2 - 6x - 7$ che ha le radici -1 e 7 entrambe con molteplicità 1.

L'autospazio relativo a $\lambda = -1$ ha quindi dimensione 1 ed è dato dalle soluzioni del sistema associato alla matrice $A + I = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Una soluzione è per esempio $v = (1, -1)$.

L'autospazio relativo a $\lambda = 7$ ha quindi dimensione 1 ed è dato dalle soluzioni del sistema associato alla matrice $A - 7I = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$. Una soluzione è per esempio $w = (1, 1)$.

b. Associamo la matrice a un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Dato che v e w sono autovettori allora si ha: $f(v) = -v$ $f(w) = 7w$

E quindi si ha $f^{100}(v) = (-1)^{100}v = v = (1, -1)$ $f^{100}(w) = 7^{100}w = (7^{100}, 7^{100})$

c. Esprimiamo $(1, 0)$ come combinazione lineare di v e w :

$(1, 0) = a(1, -1) + b(1, 1)$ da cui $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$. Si ha quindi: $(1, 0) = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w$ da cui:

$$f^{100}(1, 0) = \frac{1}{2}f^{100}(v) + \frac{1}{2}f^{100}(w) = \frac{1}{2}(1, -1) + \frac{1}{2}(7^{100}, 7^{100}) = \left(\frac{7^{100} + 1}{2}, \frac{7^{100} - 1}{2} \right)$$

412. La matrice A è diagonalizzabile perché è simmetrica. Per lavorare su A , associamo la matrice A a un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Non è necessario calcolare il polinomio caratteristico perché evidentemente A ha caratteristica 1, dato che ha tutte le righe proporzionali.

Quindi $\det(A) = 0$ e $\lambda = 0$ è autovalore. Inoltre V_0 è definito dall'equazione $x + 2y - z + t = 0$, quindi V_0 ha dimensione 3 (e pertanto 0 ha molteplicità 3).

Una sua base è per esempio $(2, -1, 0, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 1)$.

Per quanto riguarda l'altro autovettore, la matrice è simmetrica, ha tutte le righe proporzionali e le colonne identiche alle righe. Si vede quindi subito che ognuna delle righe o delle colonne (per esempio $(1, 2, -1, 1)$) è autovettore. Calcolando $f(1, 2, -1, 1)$ si ottiene $(7, 14, -7, 7)$, quindi l'autovalore è 7.

La matrice P si ottiene mettendo le coordinate dei vettori in colonna e la matrice D è la matrice diagonale che ha nella diagonale tutti gli autovalori nell'ordine corrispondente.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

413. a. Basta risolvere il sistema omogeneo associato ad A :

$$\begin{cases} 2x &= 0 \\ -3x &= 0 \\ 2x + y + 2z - t &= 0 \\ 2x + y + t &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x &= 0 \\ y + 2z - t &= 0 \\ y + t &= 0 \end{cases} \quad E_2 \rightarrow E_2 - E_3 \quad \begin{cases} x &= 0 \\ 2z - 2t &= 0 \\ y + t &= 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi ∞^1 e sono $(0, -t, t, t)$.

I vettori del nucleo sono pertanto i multipli di $(0, -1, 1, 1)$ che ne costituisce una base.

b. $\det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -x & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2-x & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = (2-x)(-x)(2-x)(1-x)$ Gli autovalori sono quindi:

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{molteplicità: } 2 \quad 1 \leq \dim(V_2) \leq 2 \Rightarrow \dim(V_2) \text{ può essere } 1 \text{ o } 2$$

$$\lambda_2 = 0 \quad \text{molteplicità: } 1 \quad 1 \leq \dim(V_0) \leq 1 \Rightarrow \dim(V_0) = 1$$

$$\lambda_3 = 1 \quad \text{molteplicità: } 1 \quad 1 \leq \dim(V_1) \leq 1 \Rightarrow \dim(V_1) = 1$$

Il criterio di diagonalizzabilità è verificato per $\lambda_2 = 0$ e per $\lambda_3 = 1$. Per dimostrare che A è diagonalizzabile occorre verificare che $\dim(V_2) = 2$.

$\lambda_1 = 2$ Riduciamo la matrice $A - 2I$ per calcolare le soluzioni del sistema omogeneo associato.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Elimi-} \\ \text{niamo} \\ R_1 \text{ e } R_4 \end{array} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} R_2 \rightarrow R_2 + \frac{2}{3}R_1 \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono ∞^2 e sono $(2t, -3t, z, t)$ che si scrivono anche come:

$t(2, -3, 0, 1) + z(0, 0, 1, 0)$, quindi i due vettori $(2, -3, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$ costituiscono una base per V_2 che ha dimensione 2.

Possiamo ora concludere che A è diagonalizzabile.

$\lambda_2 = 0$ Una base per V_0 è già stata trovata, dato che $V_0 = \ker(f)$. La base è $(0, -1, 1, 1)$.

$\lambda_3 = 1$ Occorrono le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 + 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono ora evidenti e sono $(0, 0, t, t)$. Una base per V_1 è quindi $(0, 0, 1, 1)$.

Una base di autovettori è pertanto: $(2, -3, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, -1, 1, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$

c. P ha nelle colonne le coordinate degli autovettori trovati, la matrice D ha gli autovalori nello stesso ordine.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d. Il vettore $(0, 0, 0, 1)$ è differenza di autovettori, cioè $(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 1) - (0, 0, 1, 0)$, quindi:

$$f^{2001}(0, 0, 0, 1) = f^{2001}(0, 0, 1, 1) - f^{2001}(0, 0, 1, 0)$$

$$\text{ma } f^{2001}(0, 0, 1, 1) = 1^{2001}(0, 0, 1, 1) \quad f^{2001}(0, 0, 1, 0) = 2^{2001}(0, 0, 1, 0).$$

$$\text{Quindi } f^{2001}(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 1) - (0, 0, 2^{2001}, 0) = (0, 0, 1 - 2^{2001}, 1)$$

414. Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$\det \begin{pmatrix} k-x & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1-x & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3-x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5-x \end{pmatrix} = (k-x)(5-x)(x^2-4x). \quad \text{Quindi gli autovalori sono: } k, 0, 4, 5$$

Se $k \neq 0, 4, 5$, la matrice ha quattro autovalori distinti di molteplicità 1 e quindi è diagonalizzabile.

Vediamo i tre casi particolari:

Se $k = 0$, l'autovalore 0 ha molteplicità 2, ma la matrice $A - 0I$ ha caratteristica 3 come si vede dalla sottomatrice 3×3 indicata, quindi A non è diagonalizzabile.

$$A - 0I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Se $k = 4$, l'autovalore 4 ha molteplicità 2, e la matrice $A - 4I$ ha caratteristica 2 dato che ha una riga nulla e due proporzionali, quindi A è diagonalizzabile.

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se $k = 5$, l'autovalore 5 ha molteplicità 2, e la matrice $A - 5I$ ha caratteristica 2 dato che ha due righe nulle, quindi A è diagonalizzabile.

$$A - 5I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In conclusione A è diagonalizzabile per ogni $k \in \mathbb{R}$, tranne che per $k = 0$.

415. a. Moltiplichiamo A per v posto in colonna:

$$\text{Evidentemente per essere autovettore occorre che il primo elemento } 2h - k \text{ sia nullo, cioè che } k = 2h. \text{ In questo caso si ha: } v = (0, h, 2h, 2h) \text{ e } A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h - k \\ k \\ 2k \\ 2k \end{pmatrix}$$

$$A \cdot v = (0 \quad 2h \quad 4h \quad 4h)^T.$$

In conclusione v è autovettore se $k = 2h$ con $h, k \neq 0$. In questi casi $\lambda = 2$.

- Scegliamo per esempio $h = 1$ e $k = 2$, cioè $v = (0, 1, 2, 2)$.

- b. Per determinare V_2 occorre risolvere il sistema omogeneo che ha come matrice dei coefficienti $A - 2I$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3R_3 \\ \text{ed elimino le} \\ \text{righe nulle} \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} R_1 \rightarrow R_1 + 2R_2 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il sistema è ridotto e ha le ∞^2 soluzioni $(2y - t, y, t, t)$. Per avere una base di V_2 comprendente v basta prendere un qualunque vettore di V_2 non proporzionale a v , per esempio, per $y = 0$ e $t = 1$, $w = (-1, 0, 1, 1)$. I due vettori $v = (0, 1, 2, 2)$ e $w = (-1, 0, 1, 1)$ formano una base per V_2 perché sono due vettori linearmente indipendenti in uno spazio di dimensione 2.

- c. Occorre calcolare tutti gli autovalori di A . Approfittiamo della struttura triangolare a blocchi di A .

$$\det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -x & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3-x & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1-x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 1 & -x \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 3-x & -1 \\ 3 & -1-x \end{pmatrix} = (x^2 - x - 2) \cdot (x^2 - 2x)$$

Gli autovalori sono quindi $\lambda_1 = 2$ (molteplicità 2), $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$ entrambi con molteplicità 1. Abbiamo già una base per V_2 . Cerchiamone una per ciascuno degli altri due autospaazi. Entrambi gli autospaazi avranno dimensione 1.

$\lambda = 0$: Risolviamo il sistema omogeneo che ha come matrice dei coefficienti $A - 0I = A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \rightarrow R_1 + R_2 \\ R_2 \rightarrow (-1/2)R_2 \\ R_3 \rightarrow (1/3)R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema è totalmente ridotto e ha, come previsto, ∞^1 soluzioni che sono $(t/3, -t/3, t/3, 1)$. Per esempio per $t = 3$ otteniamo l'autovettore $(1, -1, 1, 3)$ che forma una base per V_0 .

$\lambda = -1$: Risolviamo il sistema omogeneo che ha come matrice dei coefficienti $A - (-1)I = A + I$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L'ultima equazione è $3z = 0$ e la penultima fornisce $t = 0$. Le due prime equazioni diventano quindi $2x + 2y = 0$; $x + y = 0$. Il sistema ha, come previsto, ∞^1 soluzioni che sono $(-y, y, 0, 0)$. Per esempio per $y = 1$ otteniamo l'autovettore $(-1, 1, 0, 0)$ che forma una base per V_{-1} . \end{matrix}$$

Quindi $v = (0, 1, 2, 2)$ può essere completato a base composta da autovettori mediante i tre vettori $(-1, 0, 1, 1)$, $(1, -1, 1, 3)$, $(-1, 1, 0, 0)$. Questa è base di $\mathbb{R}^4$ per il criterio fondamentale, dato che è unione di basi di autovettori.

- d. La matrice P avrà nelle colonne le coordinate di una base composta da autovettori.

Perché P abbia la struttura richiesta, dovremo modificare un po' la base. Basterà cambiare verso al secondo vettore e scambiare il primo col secondo. Alla fine si avrà

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

416. a. Il polinomio caratteristico è $x^2 - 3x + 4$ e ha le radici 4 e -1.

Gli autovalori sono reali e hanno molteplicità 1, quindi A è diagonalizzabile sia come matrice reale che come matrice complessa. Cerchiamo una base di autovettori:

$\lambda = 4$ Il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ha le soluzioni (y, y) .

Un autovettore è $(1, 1)$.

$\lambda = -1$ Il sistema omogeneo associato alla matrice $A + I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ha le soluzioni $(3t, -2t)$.

Un autovettore è $(3, -2)$. Una base di autovettori è quindi per esempio $(1, 1), (3, -2)$.

La matrice P ha nelle colonne le coordinate degli autovettori trovati, la matrice D ha gli autovalori nello stesso ordine.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ha: $P^{-1}AP = D$, cioè $A = PDP^{-1}$ e anche $A^{99} = PD^{99}P^{-1}$.

La matrice P è già stata determinata. L'inversa di P si calcola immediatamente e si ha

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix}$. Inoltre $D^{99} = \begin{pmatrix} 4^{99} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pertanto:

$$A^{99} = PD^{99}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4^{99} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^{99} + 3 & 3 \cdot 4^{99} - 3 \\ 2 \cdot 4^{99} - 2 & 3 \cdot 4^{99} + 2 \end{pmatrix}$$

- b. Il polinomio caratteristico è $P(x) = x^2$

L'unico autovalore è quindi 0 con molteplicità 2. L'autospazio si ricava risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 0I = A$. Dato che questo sistema ha evidentemente ∞^1 soluzioni, allora (V_0) ha dimensione 1 ed è diversa dalla molteplicità, quindi non esiste base di autovettori e A non è diagonalizzabile né come matrice reale, né come matrice complessa.

- c. Il polinomio caratteristico è $x^2 - 2x + 2$ e ha le radici $\lambda = 1 \pm i$ entrambe con molteplicità 1, quindi A non è diagonalizzabile come matrice reale, ma lo è come matrice complessa, dato che ha due autovalori distinti.

$\lambda = 1 + i$ Il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - (1 + i)I$ ha tra le soluzioni $(i, 1)$. Questo è un autovettore.

$\lambda = 1 - i$ L'autovalore è il coniugato del precedente, un autovettore è il coniugato del precedente, $(-i, 1)$.

Una base di autovettori è quindi $(i, 1), (-i, 1)$.

Per scrivere la matrice P basta mettere in colonna le coordinate dei vettori mentre D è la matrice che ha nella diagonale gli autovalori nell'ordine corrispondente.

$$P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

Per calcolare A^{99} scriviamo $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$. Dopo aver calcolato P^{-1} si scrive:

$$A^{99} = PD^{99}P^{-1} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+i)^{99} & 0 \\ 0 & (1-i)^{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calcoliamo } (1+i)^{99} = (\sqrt{2}e^{\pi i/4})^{99} = \sqrt{2}2^{48}e^{3\pi i/4} = \sqrt{2}2^{48} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2^{49}(-1+i)$$

Analogamente (è il coniugato) $(1-i)^{99} = 2^{49}(-1-i)$. Pertanto:

$$\begin{aligned} A^{99} &= \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} 2^{49} \begin{pmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = 2^{48} \begin{pmatrix} -1-i & -1+i \\ -1+i & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \\ &= 2^{48} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 2^{49} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

417. a. Il polinomio caratteristico è $(x - i)^2(x + i)$ e ha le radici $\lambda = i$ e $\lambda = -i$ con molteplicità rispettivamente 2 e 1.

- $\lambda = i$ Risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - iI$ si trova $V_i = L\{(1, 1 - i, 0), (0, 1, 1)\}$.
- $\lambda = -i$ Risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A + iI$ si trova: $V_{-i} = L\{(1, 1 + i, 0)\}$

Quindi A è diagonalizzabile, dato che, per matrici complesse, il criterio di diagonalizzabilità si riduce alla condizione che per ogni λ si abbia $\dim(V_\lambda) = \text{molteplicità}(\lambda)$

Una base di autovettori è quindi $(1, 1 - i, 0), (0, 1, 1), (1, 1 + i, 0)$.

La matrice P si ottiene mettendo le coordinate dei vettori in colonna e la matrice D è la matrice diagonale che ha nella diagonale tutti gli autovalori nell'ordine corrispondente.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 - i & 1 & 1 + i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

418. Il polinomio caratteristico è $(x - 1)(x^2 - b^2)$. Gli autovalori sono $1, b, -b$. A seconda della possibilità che coincidano, si possono considerare quattro casi diversi:

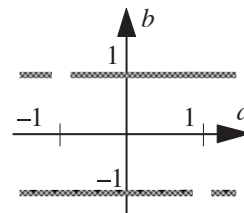
1. $b \neq 0, 1, -1$ I tre autovalori sono distinti quindi A è diagonalizzabile.
2. $b = 0$ L'autovalore $\lambda = 0$ ha molteplicità 2. Ma $\varrho(A - 0I) = 1$ per ogni a , e quindi $\dim(V_0) = 3 - \varrho(A - 0) = 2$. In conclusione, se $b = 0$, A è diagonalizzabile per ogni a .
3. $b = 1$ L'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità 2. Come si verifica subito, la caratteristica di $A - 1I$ è 1 se $a = -1$ ed è 2 se $a \neq -1$. Quindi A è diagonalizzabile se $a \neq -1$ e non se $a = -1$.
4. $b = -1$ L'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità 2. Come si verifica subito, la caratteristica di $A + 1I$ è 2 se $a = 1$ ed è 2 se $a \neq 1$. Quindi A è diagonalizzabile se $a \neq 1$ e non se $a = 1$.

In conclusione A non è diagonalizzabile solo nei seguenti casi:

$b = 1$ e $a = -1$

$b = -1$ e $a = 1$

La situazione può essere sintetizzata nel disegno dove le coppie (a, b) per cui A non è diagonalizzabile sono colorate in grigio.



419 a. Evidentemente A ha caratteristica 1, quindi $\det(A) = 0$ e $\lambda_1 = 0$ è autovalore. L'autospazio relativo è definito dall'equazione $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$, quindi V_0 ha dimensione $n - 1$ (e pertanto 0 ha molteplicità almeno $n - 1$). Una sua base è per esempio

$(1, -1, 0, \dots, 0), (0, 1, -1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, -1, 0), (0, \dots, 0, 1, -1)$.

È anche chiaro che $(1, 1, 1, \dots, 1)$ è autovettore dato che $f(1, 1, 1, \dots, 1) = (n, n, n, \dots, n)$ e che quindi n è l'altro autovalore e ha molteplicità 1. In conclusione:

Il polinomio caratteristico è $\pm(\lambda - n)\lambda^{n-1}$ (col segno $\pm$ a seconda che n sia pari o dispari) e una base di autovettori è per esempio

$(1, -1, 0, \dots, 0), (0, 1, -1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, -1, 0), (0, \dots, 0, 1, -1), (1, 1, 1, \dots, 1)$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

- b. Dato che $B + I = A$ ha caratteristica 1, allora $\lambda_1 = -1$ è autovalore e come sopra ha molteplicità $n - 1$. Analogamente $(1, 1, 1, \dots, 1)$ è autovettore, ma stavolta l'autovalore è $\lambda_2 = n - 1$ con molteplicità 1.

L'autospazio relativo a $\lambda_1 = -1$ è definito, come in A , dall'equazione $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ e ha quindi dimensione $n - 1$. Una sua base è la stessa trovata per V_0 in A .

Analogamente $(1, 1, 1, \dots, 1)$ è autovettore relativo a $\lambda_2 = n - 1$.

Una base di autovettori è per esempio la stessa determinata per A .

P è la stessa trovata per A , D è invece quella a lato.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n-1 \end{pmatrix}$$

420. a. Il polinomio caratteristico è $x^2 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = x^2 - 1$ e non dipende da θ . Dato che A ha i due autovalori distinti 1 e -1 , allora è sempre diagonalizzabile.

b. Si ha:

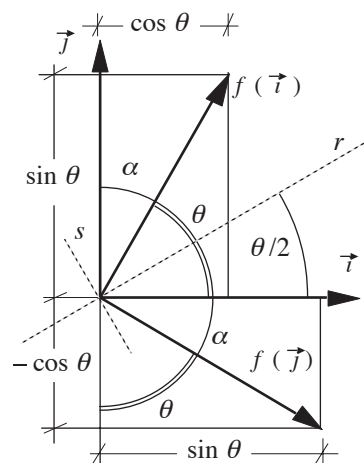
$A - 1I = \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta - 1 \end{pmatrix}$. Il sistema omogeneo associato ha ∞^1 soluzioni. Una soluzione è $(\sin \theta, 1 - \cos \theta)$. Questo vettore genera V_1 . Un'altro generatore (proporzionale al primo, anche se non in modo evidente) è $(1 + \cos \theta, \sin \theta)$.

$A + 1I = \begin{pmatrix} \cos \theta + 1 & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta + 1 \end{pmatrix}$. Il sistema omogeneo associato ha ∞^1 soluzioni. Una soluzione è $(\sin \theta, -1 - \cos \theta)$. Questo vettore genera V_{-1} . Un'altro generatore (proporzionale al primo, anche se non in modo evidente) è $(\cos \theta - 1, \sin \theta)$.

Gli autovettori sono quelli dei due autospazi (escluso naturalmente il vettore nullo).

c. Chiamiamo α l'angolo $\pi/2 - \theta$.

Come si vede dal disegno, il vettore $f(\vec{i})$ forma angolo α con $\vec{j}$ e ugualmente il vettore $f(\vec{j})$ forma angolo α con $\vec{i}$, quindi $\vec{i}, \vec{j}$ sono stati riflessi attorno alla bisettrice r dei vettori $\vec{i}$ e $f(\vec{i})$, cioè del vettore che forma un angolo di $\theta/2$ con $\vec{i}$. Di conseguenza gli autovettori relativi a $\lambda = 1$ sono i vettori direzionali della retta r attorno a cui la f riflette. Un vettore direzionale per la bisettrice r si può trovare sommando $\vec{i}$ con $f(\vec{i})$ (dato che hanno lo stesso modulo e cioè 1) ed è perciò $(1, 0) + (\cos \theta, \sin \theta) = (1 + \cos \theta, \sin \theta)$, che è, come abbiamo visto, autovettore per $\lambda = 1$. Gli autovettori relativi a $\lambda = -1$ sono quelli della retta s ortogonale alla retta r , visto che in riflessione sono trasformati nel loro opposto. In effetti, come si verifica subito, gli autovettori relativi a $\lambda = -1$ sono ortogonali agli autovettori relativi a $\lambda = 1$.



431. Come si può facilmente calcolare, i vettori di $\mathcal{C}$ sono combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$. Infatti si ha: $(1, 2, 1) = 1 \cdot (1, 0, 2) + 1 \cdot (0, 2, -1)$ $(1, 4, 0) = 1 \cdot (1, 0, 2) + 2 \cdot (0, 2, -1)$.

Ortonormalizziamo le due basi col metodo di Gram-Schmidt:

$$(1, 0, 2) \rightarrow (1, 0, 2)/\sqrt{5}$$

$$(0, 2, -1) \rightarrow (0, 2, -1) - \left((1, 0, 2)/\sqrt{5} \cdot (0, 2, -1) \right) (1, 0, 2)/\sqrt{5} = (2/5, 2, -1/5)$$

$$(2/5, 2, -1/5) \rightarrow (2, 10, -1)/\sqrt{105}$$

$$(1, 2, 1) \rightarrow (1, 2, 1)/\sqrt{6}$$

$$(1, 4, 0) \rightarrow (1, 4, 0) - \left((1, 2, 1)/\sqrt{6} \cdot (1, 4, 0) \right) (1, 2, 1)/\sqrt{6} = (-1/2, 1, -3/2)$$

$$(-1/2, 1, -3/2) \rightarrow (-1, 2, -3)/\sqrt{14}$$

Le basi ortonormalizzate sono $\mathcal{B}_1 : \frac{(1, 0, 2)}{\sqrt{5}}, \frac{(2, 10, -1)}{\sqrt{105}}$ e $\mathcal{C}_1 : \frac{(1, 2, 1)}{\sqrt{6}}, \frac{(-1, 2, -3)}{\sqrt{14}}$.

432. Cerchiamo due vettori linearmente indipendenti ortogonali a v_1 e v_2 , cioè risolviamo il sistema in $v = (x, y, z, t)$

$$\begin{cases} v \cdot (1, 0, -1, 1) = 0 \\ v \cdot (1, 1, 1, 0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - z + t = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - z + t = 0 \\ y + 2z - t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = z - t \\ y = -2z + t \end{cases}$$

Due soluzioni linearmente indipendenti sono: $(-1, 1, 0, 1), (1, -2, 1, 0)$. Questi potrebbero essere v_3

e v_4 , dato che sono ortogonali a v_1 e a v_2 . Occorre però che siano tra loro ortogonali, quindi poniamo $v_3 = (-1, 1, 0, 1)$ e cerchiamo un vettore di $L\{v_3, v_4\}$ ortogonale a v_3 .

Un vettore di $L\{v_3, v_4\}$ è del tipo $a(-1, 1, 0, 1) + b(1, -2, 1, 0) = (-a + b, a - 2b, a, b)$. Perché sia ortogonale a v_3 occorre che $(-a + b, a - 2b, a, b) \cdot (-1, 1, 0, 1) = 0$, cioè che $2a - 2b = 0$. Per esempio, per $a = 1$ e $b = 1$, si ottiene $v_4 = (0, -1, 1, 1)$.

433. La prima colonna ha modulo 1, quindi può far parte di una matrice ortogonale. La seconda colonna deve essere ortogonale alla prima cioè si deve avere $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 0$ e si vede subito che il numero mancante deve essere $-2/3$.

In questo modo anche la seconda colonna ha modulo 1, quindi può far parte di una matrice ortogonale. Per quanto riguarda l'ultima colonna, dato che la matrice è 3×3 , è sufficiente procedere per via

geometrica e calcolare $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. In conclusione:

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{Dato che } P \text{ è ortogonale, allora } P^{-1} \text{ è semplicemente la trasposta di } P. \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

434. Poniamo, per semplicità: $a = a_{31}$ $b = a_{22}$ $c = a_{32}$

La prima colonna deve avere modulo 1, quindi si deve avere

$$4/9 + 4/9 + a^2 = 1 \text{ e cioè } a = \pm 1/3.$$

Anche la seconda colonna deve avere modulo 1, quindi si deve avere

$$4/9 + b^2 + c^2 = 1 \text{ e cioè } b^2 + c^2 = 5/9.$$

Ma, la seconda colonna deve essere ortogonale alla prima quindi si deve avere

$$(-2/3)(2/3) + (2/3)b + ac = 0 \text{ e cioè } 2b + 3ac = 4/3.$$

Risolviamo il sistema di secondo grado in b, c delle due equazioni sottolineate. Dato che avrà due soluzioni, per evitare confusione tra i vari simboli $\pm$, conviene risolverlo due volte: una volta per $a = 1/3$ e una volta per $a = -1/3$.

- $a = 1/3$. Si trova: $b = 1/3$; $c = 2/3$ e $b = 11/15$; $c = -2/15$
- $a = -1/3$. Si trova: $b = 1/3$; $c = -2/3$ e $b = 11/15$; $c = 2/15$

Quindi abbiamo quattro possibilità per completare la prima e la seconda colonna.

Per quanto riguarda la terza, dato che deve avere modulo 1 e deve essere ortogonale alle prime due, ci sono ogni volta due possibilità che si possono trovare per esempio col prodotto vettoriale delle prime due colonne.

Per esempio, per il caso $a = 1/3$; $b = 1/3$; $c = 2/3$ eseguiamo

$(-2/3, 2/3, 1/3) \wedge (2/3, 1/3, 2/3) = (1/3, 2/3, -2/3)$, quindi la

terza colonna può essere $[1/3 \ 2/3 \ -2/3]^T$ oppure la sua opposta

$$[-1/3 \ -2/3 \ 2/3]^T.$$

In definitiva ci sono otto possibili matrici. Eseguiti i conti, le altre sei sono:

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & \mp 1/3 \\ 2/3 & 11/15 & \pm 2/15 \\ 1/3 & -2/15 & \mp 14/15 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & \mp 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & \mp 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & \mp 2/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & \pm 1/3 \\ 2/3 & 11/15 & \mp 2/15 \\ -1/3 & 2/15 & \mp 14/15 \end{pmatrix}$$

435. a. La dimensione di V è evidentemente 2. Per trovare una base ortogonale per V si può partire da un suo vettore qualunque per esempio $(1, 0, -1)$ e trovarne un altro (x, y, z) che soddisfi (oltre l'equazione di V : $x - 2y + z = 0$) la condizione $(x, y, z) \cdot (1, 0, -1) = 0$ cioè $x - z = 0$. Per esempio si trova $(1, 1, 1)$. La base così ottenuta è ortogonale; per renderla ortonormale basta normalizzare ciascun vettore e si ha la base ortonormale: $(1, 0, -1)/\sqrt{2}$, $(1, 1, 1)/\sqrt{3}$.
- b. La dimensione di W è evidentemente 2. Per trovare una base ortogonale per W si può iterare il procedimento già seguito per V e partendo dal vettore $(1, 0, 0, 1)$ determinare successivamente un qualunque vettore ortogonale a $(1, 0, 0, 1)$, per esempio $(0, 1, 2, 0)$ e successivamente $(5, -4, 2, -5)$ (ortogonale a entrambi). La base ortonormale così trovata è:
 $(1, 0, 0, 1)/\sqrt{2}$ $(0, 1, 2, 0)/\sqrt{5}$ $(5, -4, 2, -5)/\sqrt{70}$
- c. Lo spazio U ha dimensione 3. Una base ortonormale per U si trova come per W ed è
 $(1, 0, -1, 0, 0)/\sqrt{2}$ $(0, 0, 0, 2, 1)/\sqrt{5}$ $(5, 5, 5, 2, -4)/\sqrt{95}$

- d. Calcoliamo innanzitutto la dimensione di Z scrivendo la matrice delle coordinate dei vettori che lo generano e riducendola. La matrice ha caratteristica 2 e quindi $\dim(Z) = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{La matrice ha caratteristica 2 e quindi} \\ \dim(Z) = 2. \text{ Come base di } W \text{ conviene} \\ \text{scegliere } (1, 1, 0, 1), (0, -1, 1, 1) \text{ in quanto} \\ (1, 1, 0, 1) \cdot (0, -1, 1, 1) = 0 \end{matrix}$$

A questo punto per avere una base ortonormale per Z basta normalizzare i due vettori:

$$(1, 1, 0, 1)/\sqrt{3}, (0, -1, 1, 1)/\sqrt{3}$$

441. Moltiplichiamo A per il vettore $(2, -1, 0)$ (trasposto). Otteniamo $(6, -3, 0)$, quindi il vettore è autovettore e l'autovalore è 3.

Analogamente moltiplicando A per il vettore $(0, 1, 1)$ si ottiene $(0, 3, 3)$ e l'autovalore è sempre 3.

L'autospazio V_3 non può avere dimensione 3, perché in tal caso coinciderebbe con $\mathbb{R}^3$ e ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ sarebbe autovettore, cosa evidentemente non vera. Quindi V_3 ha dimensione 2 perché contiene due vettori linearmente indipendenti.

Ci devono essere pertanto un altro autovalore e un altro autospazio.

Dato che A è simmetrica, l'altro autospazio deve essere ortogonale a V_3 , quindi un suo autovettore (x, y, z) deve essere tale che $(x, y, z) \cdot (2, -1, 0) = 0$ e $(x, y, z) \cdot (0, 1, 1) = 0$. Una soluzione non nulla del sistema lineare è per esempio $(1, 2, -2)$ e effettivamente moltiplicando A per il vettore $(1, 2, -2)$ (trasposto) otteniamo $(6, -12, 12)$, quindi l'altro autovalore è 6.

442. a. Dato che A ha caratteristica 1 e quindi determinante 0, allora un suo autovalore è 0. Esso ha molteplicità 2, perché l'autospazio ha dimensione 2, dato che $\rho(A) = \rho(A - 0I) = 1$.

L'autospazio è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato ad A che si può ridurre subito alla sola equazione $-x + 2y - z = 0$. Le soluzioni sono $(2y - z, y, z)$ ($y, z \in \mathbb{R}$).

Una base per V_0 è $(2, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$, ma non è ortogonale. Per avere una base ortogonale, scegliamo come primo vettore $(2, 1, 0)$ e, come secondo, un vettore di V_0 , e cioè del tipo $(2y - z, y, z)$, ortogonale a $(2, 1, 0)$, cioè tale che $(2y - z, y, z) \cdot (2, 1, 0) = 0$ per esempio $(-1, 2, 5)$. Una base ortonormale per V_0 è quindi per esempio $(2, 1, 0)/\sqrt{5}$, $(-1, 2, 5)/\sqrt{30}$.

Per quanto riguarda l'altro autovalore λ , occorrerebbe determinarlo e risolvere il sistema omogeneo associato ad $A - \lambda I$, ma si può usare il fatto che $V_\lambda \perp V_0$ e cercare un vettore ortogonale sia a $(2, 1, 0)$ che a $(-1, 2, 5)$, per esempio $(1, -2, 1)$. Moltiplichiamo A per il vettore $(1, -2, 1)$ (trasposto). Otteniamo $(-6, 12, -6)$, quindi l'autovalore λ è -6 e una base ortonormale per V_{-6} è $(1, -2, 1)/\sqrt{6}$. Una base ortonormale di autovettori è allora:

$$(2, 1, 0)/\sqrt{5} \quad (-1, 2, 5)/\sqrt{30} \quad (1, -2, 1)/\sqrt{6}$$

- b. Usando la base ortonormale trovata sopra, come matrici P e D possiamo scegliere

$$P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

443. A. Il polinomio caratteristico di A è $x(x-3)(x+2)$. Gli autospazi si calcolano al solito modo e sono: $V_0 = L\{(1, 1, -2)\}$ $V_3 = L\{(1, 1, 1)\}$ $V_{-2} = L\{(1, -1, 0)\}$

Dato che i tre autospazi hanno tutti dimensione 1, i tre vettori sono automaticamente a due a due ortogonali. Per avere una base ortonormale di autovettori, basta solo normalizzarli. La base è $(1, 1, -2)/\sqrt{6}$ $(1, 1, 1)/\sqrt{3}$ $(1, -1, 0)/\sqrt{2}$.

La matrice ortogonale P ha già determinante 1 per cui non occorrono ulteriori aggiustamenti:

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 \\ -2\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- B. Il polinomio caratteristico è $(x+1)^2(x-5)$. Gli autospazi sono:

$$V_5 = L\{(1, 2, -1)\} \quad V_{-1} = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 0\}$$

Occorre una base ortonormale per ciascuno di essi:

Per quanto riguarda V_5 , basta solo normalizzare il generatore. Si ottiene $(1, 2, -1)/\sqrt{6}$.

Scegliamo un vettore di V_{-1} , per esempio $(1, 0, 1)$, poi cerchiamo un secondo vettore di V_{-1} ortogonale al primo, cioè (x, y, z) tale che $x + z = 0$ e $x + 2y - z = 0$, per esempio $(-1, 1, 1)$.

Adesso basta normalizzare i due vettori e si ottiene: $(1, 0, 1)/\sqrt{2}$, $(-1, 1, 1)/\sqrt{3}$. Ora possiamo scrivere P e D :

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si è dovuto cambiare segno alla prima colonna di P affinché P abbia determinante positivo (e quindi sarà 1).

- C. Non è necessario calcolare il polinomio caratteristico, perché evidentemente C ha caratteristica 1 e cioè determinante 0, quindi 0 è autovalore. Inoltre V_0 è definito dall'equazione $x + 2y - z + t = 0$, quindi V_0 ha dimensione 3 (e pertanto 0 ha molteplicità 3).

Per quanto riguarda l'altro autovalore, dato che l'autospazio è ortogonale a V_0 , allora i coefficienti dell'equazione che definisce V_0 forniscono l'autovettore $(1, 2, -1, 1)$. Dato che moltiplicando A per il vettore $(1, 2, -1, 1)$ (trasposto) si ottiene $(7, 14, -7, 7)$, allora l'autovalore è 7. Si può calcolare al solito modo una base ortogonale per V_0 . Una è per esempio $(2, -1, 0, 0)$, $(1, 2, 5, 0)$, $(1, 2, -1, -6)$. Per avere una base ortonormale basta solo normalizzarli. Inoltre $V_7 = L\{(1, 2, -1, 1)\}$

Ora si scrive P , ma affinché abbia determinante 1 occorre cambiare segno al vettore della base di V_7 .

$$P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{42} & -1/\sqrt{7} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{42} & -2/\sqrt{7} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{42} & 1/\sqrt{7} \\ 0 & 0 & -6/\sqrt{42} & -1/\sqrt{7} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

444. A. Come nella matrice C dell'esercizio precedente, $\lambda = 0$ è autovalore e l'autospazio relativo è definito dall'equazione $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$, quindi V_0 ha dimensione $n - 1$ e $\lambda = 0$ ha molteplicità $n - 1$. Una sua base è per esempio

$(1, -1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, -1, \dots, 0)$, ..., $(0, \dots, 0, 1, -1, 0)$, $(0, \dots, 0, 1, -1)$.

È anche chiaro che $(1, 1, 1, \dots, 1)$ è autovettore dato che $\varphi(1, 1, 1, \dots, 1) = (n, n, n, \dots, n)$ e che quindi n è l'altro autovalore, con molteplicità 1. Occorre però una base ortogonale per V_0 . La più semplice è per esempio la seguente, ottenuta partendo col primo vettore e sostituendo i successivi via via con vettori ortogonali a tutti i precedenti.

$(1, -1, 0, \dots, 0)$, $(1, 1 - 2, \dots, 0)$, $(1, 1, 1, -3, 0, \dots)$ etc.

Per avere una base ortonormale basta solo normalizzarli.

$(1, -1, 0, \dots, 0)/\sqrt{2}$, $(1, 1 - 2, \dots, 0)/\sqrt{6}$, $(1, 1, 1, -3, 0, \dots)/\sqrt{12}$ etc.

Una base ortonormale di V_n è evidentemente $\sqrt{n}/n(1, 1, 1, \dots, 1)$. Ora è immediato scrivere P e si vede subito che $\det(P) > 0$, quindi $\det(P) = 1$.

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & \dots & 1/\sqrt{n} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & \dots & 1/\sqrt{n} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & \dots & 1/\sqrt{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sqrt{n} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

- B. Dato che $B = A - I$, gli autovalori di B si hanno sottraendo 1 a quelli di A e sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = n - 1$ con la stessa molteplicità e cioè rispettivamente $n - 1$ e 1.

Gli autospazi sono gli stessi identici trovati al punto precedente e così pure le basi ortonormali e la matrice P . La matrice D è invece quella a lato.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n - 1 \end{pmatrix}$$

451. a. La forma è

$$Q(x, y, z, t) = [x \ y \ z \ t] \cdot A \cdot [x \ y \ z \ t]^T = x^2 + y^2 + 4xy + 2z^2 + 2t^2 + 2zt.$$

- b. Dato che la matrice è a blocchi, il polinomio caratteristico di A è il prodotto dei polinomi caratteristici dei singoli blocchi. Il polinomio è $((x - 3)(x + 1)) \cdot ((x - 3)(x - 1))$. Avendo autovalori sia positivi che negativi, la forma è non definita.

- c. Dato che gli autovalori di A sono $-1, 1, 3$, gli autovalori di $A + \alpha I$ sono $-1 + \alpha$, $1 + \alpha$, $3 + \alpha$. La matrice è definita positiva se sono tutti e tre positivi, cioè se $\alpha > 1$ e $\alpha > -1$ e $\alpha > -3$. In

definitiva, se $\alpha > 1$.

452. La forma matriciale di Q è: $Q(x, y, z) = (x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Riduciamo la matrice A per righe e per colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ C_2 \rightarrow C_2 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 - kR_2 \\ C_3 \rightarrow C_3 - kC_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 - k^2 \end{pmatrix}$$

Per il teorema di Sylvester gli autovalori di A hanno gli stessi segni di $1, 1, 3 - k^2$. In conclusione:

Se $-3 < k < 3$ la forma è definita positiva.

Se $k = \pm 3$ la forma è semidefinita positiva.

Se $k < -3$ o $k > 3$ la forma è indefinita.

453. a. Si ha: $Q(x, y, z) = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ 3 & k & 4 \\ 0 & 4 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

b. I minori principali sono i determinanti delle tre matrici incorniciate e devono essere tutti positivi, cioè si deve avere:

$$k > 0 \quad k^2 - 9 > 0 \quad k^3 - 25k > 0$$

La prima condizione $k > 0$, implica subito che la seconda sia $k > 3$ e che la terza sia $k^2 > 25$, cioè $k > 5$.

In definitiva, A è definita positiva solo se $k > 5$.

454. A. Riduciamo A per righe e per colonne in modo da determinare una matrice diagonale avente una diagonale con gli stessi segni degli autovalori di A .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 \rightarrow C_3 - C_1 \\ C_2 \rightarrow C_2 - C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché a_{22} dipende da k , conviene scambiare R_2 con R_3 e quindi C_2 con C_3 per continuare la riduzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & k-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \\ C_3 \rightarrow C_3 + C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

L'ultima matrice, per il teorema di inerzia di Sylvester, ha tre autovalori dello stesso segno di $1, 1$ e $a - 2$. In conclusione:

- Se $k > 2$, A ha tre autovalori positivi, quindi A è definita positiva.
- Se $k = 2$, A ha due autovalori positivi e uno nullo, quindi A è semidefinita positiva.
- Se $k < 2$, A ha due autovalori positivi e uno negativo, quindi A è non definita.

B. Eseguiamo su B l'algoritmo gaussiano per righe e per colonne per determinare una matrice diagonale avente una diagonale con gli stessi segni degli autovalori di B . Iniziamo con $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$ (e $C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1$) e poi $R_3 \rightarrow R_3 - R_1$ (e $C_3 \rightarrow C_3 - C_1$).

Se $k = 8$, si esegue $R_1 \leftrightarrow R_2$ e $C_1 \leftrightarrow C_2$ e con $R_3 \rightarrow R_3 - (1/3)R_2$ (e di conseguenza anche $C_3 \rightarrow C_3 - (1/3)C_2$) si ottiene alla fine la matrice a lato

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-8 & k-6 \\ 0 & k-6 & k-2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}$$

La matrice ottenuta B ha quindi autovalori dello stesso segno di quelli di B , quindi B ha due autovalori positivi e uno negativo.

Se $k \neq 8$, si continua con $R_3 \rightarrow R_3 - ((k-6)/(k-8))R_2$ e con $C_3 \rightarrow C_3 - ((k-6)/(k-8))C_2$ ottenendo la matrice a lato

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & (2k-20)/(k-8) \end{pmatrix}$$

Possiamo ora usare il teorema di Sylvester e concludere:

- Se $k > 10$ ci sono tre autovalori positivi, quindi B è definita positiva.
- Se $k = 10$ ci sono due autovalori positivi e uno nullo, quindi B è semidefinita positiva.
- Se $8 < k < 10$ ci sono due autovalori positivi e uno negativo, quindi B è non definita.
- Se $k \leq 8$ ci sono due autovalori positivi e uno negativo, quindi B è non definita.

455. A titolo di esempio vengono usati diversi criteri per determinare i caratteri di definizione, lavorando, se necessario, sulla matrice associata alla forma quadratica tramite la base canonica.

- a. Gli autovalori della matrice associata sono $0, 1/2, 3/2$. Quindi la forma è semidefinita positiva.
- b. Si scrive anche come $(x + y)^2 + z^2$ ed è quindi semidefinita positiva.
- c. Gli autovalori della matrice associata sono $0, 1/2, -1/2$. Quindi la forma è non definita.
- d. Gli autovalori della matrice associata sono $1, -1/2, 1/2$. Quindi la forma è non definita.
- e. Gli autovalori della matrice associata sono $-1, 3, 0$. Quindi la forma è non definita.
- f. Il polinomio caratteristico della matrice associata è $(x - 1)(x^2 - x - 1/4)$. Un autovalore è 1 e si vede subito che l'equazione di secondo grado ha due soluzioni di segno opposto. Quindi la forma è non definita.

g. La matrice associata è $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. I tre minori principali della matrice sono tutti positivi e, per il criterio dei minori principali, ciò basta a garantire che essa è definita positiva.

h. Il polinomio caratteristico della matrice associata è $x^3 - 6x^2 + 6x + 7$ e ha due variazioni e una permanenza, quindi, per la regola di Cartesio, ha due autovalori positivi e uno negativo perciò è non definita.

i. È non definita dato che, per esempio, $Q(1, 0, 0) = 1$ e $Q(0, 0, 1) = -1$.

456. Eseguendo il prodotto di matrici si trova $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + y^2 + z^2$. Dato che si può scrivere $Q(x, y, z) = (x + y)^2 + z^2$, allora Q è semidefinita positiva. Osserviamo che Q è associata alla matrice *simmetrica* a lato.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

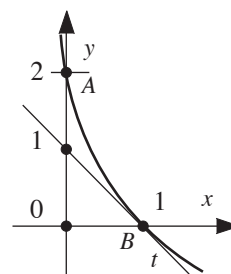
5. GEOMETRIA ANALITICA: Geometria lineare nel piano

È fissato nel piano un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche Oxy .

- F 501. Scrivere due diverse rappresentazioni parametriche per le seguenti rette:
- La retta che passa per i punti $A(-1, 3)$ e $B(2, 1)$
 - La retta di equazione cartesiana $x = 2$
 - La retta di equazione cartesiana $x - 3y = 4$
- F 502. Sia r la retta rappresentata parametricamente a lato.
- Scrivere un'altra rappresentazione parametrica per r tale che il punto A di r di ascissa 0 si ottenga per $t = 0$ e quello B di ordinata 0 per $t = 1$. $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 2 \end{cases}$
 - Dividere il segmento $\overline{AB}$ in due e in tre parti uguali.
- F 503. Dire se le rette r_1 e r_2 coincidono e se le rette s_1 e s_2 coincidono
- $$r_1 \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = t - 1 \end{cases} \quad r_2 \begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = t \end{cases} \quad s_1 \begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 2 \end{cases} \quad s_2 \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 2 \end{cases}$$
- F 504. Determinare, se possibile, il coefficiente angolare delle seguenti rette:
- $2x - y = 4$
 - $y + 4 = 0$
 - $\frac{x - 3}{5} = \frac{y + 7}{1}$
 - $x - 10 = 0$
 - $x = 3y$
 - $\begin{cases} x = 3t \\ y = t - 1 \end{cases}$
- F 505. Verificare che le tre rette $x - 2y + 3 = 0$; $3x + y + 2 = 0$; $x - 6y + 7 = 0$ appartengono ad un fascio e determinarne il centro.
- F 506. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le tre rette $2kx - ky = 1$; $2x = ky$; $-2kx + y = 1$ appartengono ad un fascio ?
- F 507. Nella famiglia di rette $x + 3ky - 5k + 2 = 0$ determinare (se esistono)
- La retta un cui vettore direzionale sia $(2, 1)$.
 - La retta parallela all'asse x e quella parallela all'asse y .
 - Il punto comune a tutte le rette.
- C d. Le rette s tali che il triangolo determinato da s e dai due assi coordinati abbia area 7.
- F 508. Determinare due punti P della retta $x - y + 2 = 0$ tali che il triangolo POA sia rettangolo in P , dove O è l'origine delle coordinate e $A = (10, 0)$.
- F 509. Scrivere la retta r rispetto alla quale siano simmetrici $A(0, 4)$ e $B(1, -2)$.
- F 510. a. Determinare il punto simmetrico di $P(1, 1)$ rispetto alla retta $r : x - 2y = 1$.
b. Determinare la retta simmetrica di $s : x + y = 2$ rispetto alla retta $r : x - 2y = 1$.
- F 511. Scrivere un'equazione cartesiana che sia soddisfatta da tutti e soli i punti dell'insieme costituito dall'unione delle rette $x = y$; $x = 3y$; $x = 1$.
- C 512. Determinare le rette passanti per $P(0, 1)$ e formanti con la retta $y = 2x$ un angolo di $\pi/6$.
- C 513. Determinare le due bisettrici degli angoli formati dalle rette $2x - y = 0$ e $x + y = 1$ e dire quale di esse è situata nell'angolo minore.
- A 514. Tra i punti P della retta $r : 4x - 3y + 2 = 0$ determinare quello il cui simmetrico rispetto alla retta $s : x - 2y = 2$ ha distanza minima da $(0, 0)$.
- A 515. Date le due rette $r : x + 2y = 2$; $s : \{x = 2 - t ; y = 3 + 2t\}$ e il loro punto comune P , determinare i punti di r la cui proiezione ortogonale su s dista 5 da P .
- A 516. Dati i tre punti $A(0, 0)$, $B(1, 2)$, $C(6, 0)$, determinare un quarto punto D in modo che i quattro punti formino un parallelogramma. In quanti modi è possibile ?
- T 517. Determinare il baricentro del triangolo $A(a_1, a_2)$ $B(b_1, b_2)$ $C(c_1, c_2)$

5. GEOMETRIA ANALITICA: Circonferenze nel piano

- F 521. Scrivere le equazioni delle circonferenze di raggio $\sqrt{5}$, passanti per il punto $(0, 0)$ e ivi tangenti alla retta $r : 2x = 3y$.
- F 522. Scrivere l'equazione delle circonferenze di raggio 1 aventi il centro sull'asse x e tangenti alla retta $y = 2x$.
- F 523. Scrivere le equazioni delle circonferenze passanti per i punti $A(-2, 2)$ e $B(2, 0)$ e tangenti alla retta $r : x + y + 2 = 0$.
- F 524. Scrivere le equazioni delle rette passanti per $(1, 2)$ e tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x + 8y = 0$.
- F 525. Scrivere l'equazione della circonferenza γ di cui è raffigurato un arco. Sono evidenti due suoi punti A e B e la retta t tangente a γ in B .
- F 526. Tra le rette del fascio di centro $(4, -1)$ determinare quelle che tagliano la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4x$ in una corda di lunghezza 2.
- A 527. Tra le circonferenze tangenti alle rette parallele $y = 2x + 1$ e $y = 2x + 3$ determinare le due che sono tangenti anche alla retta $s : 3x = y$.
- A 528. Scrivere le equazioni delle circonferenze con centro sull'asse y e tangenti a $x + y + 1 = 0$ e a $2x - y = 4$.
- C 529. Scrivere l'equazione di una circonferenza di raggio 3 con centro sulla retta $r : y = 3x + 2$ e che sia tagliata dalla retta $s : x + y = 2$ in una corda di lunghezza 2.
- A 530. Che raggio deve avere una circonferenza di centro $(3, 0)$ affinché una delle rette ad essa tangenti in una delle sue intersezioni con $y = 2x$ intercetti l'asse x nel punto $(-3, 0)$?
- A 531. Siano $r : 2x = y$; $s : 3x + y = 0$ due rette; determinare tra le due bisettrici degli angoli di r e s quella situata nell'angolo minore. Determinare quindi le circonferenze di raggio 2 situate negli angoli minori tra r e s e tangenti sia a r che a s .
- C 532. Date le circonferenze $\gamma_1 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ e $\gamma_2 : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = R^2$.
- Discutere al variare di $R \in \mathbb{R}$ la reciproca posizione.
 - Nei casi in cui sono tangenti determinare la comune retta tangente.
 - Per $R = 3$ scrivere la retta passante per i punti di intersezione.
- A 533. Date le circonferenze $\gamma_1 : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$ e $\gamma_2 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$, determinare le equazioni delle quattro rette tangenti a entrambe.

**5. GEOMETRIA ANALITICA: Geometria lineare nello spazio**

È fissato nello spazio un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche destrorso $Oxyz$.

- F 541. Sono dati il punto $P = (0, 1, 2)$ e il piano $\alpha : x - 3y + z = 0$. Determinare:
- il piano passante per P e parallelo al piano α .
 - due piani passanti per P e ortogonali al piano α .
 - la retta passante per P e ortogonale al piano α .
 - la proiezione ortogonale di P sul piano α .
- F 542. Sono dati la retta r e il punto $P = (0, 1, 2)$. Determinare:
- la retta passante per P e parallela a r .
 - due rette passanti per P e ortogonali a r .
 - il piano passante per P e ortogonale a r .
 - la proiezione ortogonale di P sulla retta r .
 - la distanza di P da r .
 - la retta passante per P e perpendicolare (e incidente) a r .
- F 543. È data per ogni $k \in \mathbb{R}$ la retta r di rappresentazione cartesiana $\{x + y = k \quad ; \quad z + k^2y = 1\}$.

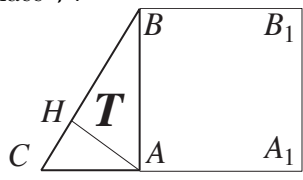
$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$$

- a. Scrivere per ogni $k \in \mathbb{R}$ una rappresentazione parametrica per r .
 b. Dire per ogni $k \in \mathbb{R}$ qual è la posizione reciproca della retta e del piano $\alpha : x + 2y + z = 0$.
- F 544. Dati i tre punti $A(0, 1, 0)$ $B(2, 1, 1)$ $C(0, -1, 2)$, dimostrare che non sono allineati e determinare il piano che li contiene.
- F 545. Determinare il piano che contiene il punto $P(1, 0, 3)$ e la retta $r : x = y = 2 - z$.
- F 546. Dire per quale $k \in \mathbb{R}$ le rette r e s sono incidenti e per tale k determinare il piano che le contiene. $r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = t \\ y = k - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$
- F 547. Sono dati i tre piani α, β, γ al variare di $k \in \mathbb{R}$
- | | |
|---|--|
| a. Determinarne la posizione reciproca per ogni $k \in \mathbb{R}$. | $\alpha : x + k^2y + z = -4$ |
| b. Nei casi in cui i tre piani formano un fascio determinare la direzione dell'asse | $\beta : 2x + 2y + (k + 1)z = 0$
$\gamma : (2 - 2k^2)y + (4k + 3)z = k^2 + 3$ |
- F 548. Dati il punto $P(1, 0, 1)$, la retta $r : x - 2y = z = 0$ e il piano $\alpha : x - 3y = z$.
- a. Trovare la proiezione ortogonale di P su r e la proiezione ortogonale di P su α .
 b. Trovare la proiezione ortogonale di r su α .
- F 549. Determinare la retta s giacente sul piano $\alpha : x + 2y + z = 1$ perpendicolare e incidente la retta $r : \{x = y = z\}$
- F 550. Data la retta $r : \{x = 2t ; y = t ; z = -1 + 3t\}$
- a. Scrivere la retta s passante per $P(0, 1, 0)$ e parallela a r e determinare la distanza tra r e s .
 C b. Tra i piani passanti per P e paralleli a r determinare quello che ha distanza massima da r .
- F 551. Dati i punti $A(2, 1, 0)$, $B(1, 0, 3)$, $C(0, 1, 1)$:
- a. Determinare l'area del parallelogramma di lati AB e AC .
 b. Determinare il punto S dello spazio tale che $ABSC$ sia un parallelogramma.
 c. Trovare i punti D dell'asse x per cui il volume del parallelepipedo di lati AB , AC , AD è 3.
- F 552. Date le rette $r : \{x = y ; z = 2\}$ e $s : \{x = 3y - 2 ; z + y = 0\}$
- a. Dimostrare che sono sghembe.
 b. Scrivere tutte le rette incidenti sia r che s .
 c. Tra esse determinare quella ortogonale a entrambe.
 d. Tra esse determinare quella parallela alla retta $x = y = z$.
 e. Calcolare la distanza d tra r e s .
- F 553. Determinare sul piano $\alpha : x - 2y + z = 0$ che contiene il punto $P(1, 0, -1)$:
- a. la retta r_1 passante per P e ortogonale all'asse x .
 b. la retta r_2 passante per P e parallela al piano $\beta : 3x = z$.
 c. la retta r_3 passante per P e incidente la retta $s : x - 3y = z - 2 = 0$.
- F 554. Tra le rette perpendicolari e incidenti alla retta r nel suo punto $P(0, 0, 2)$ determinare:
- a. quella incidente la retta $s : \{x = y = z\}$
 b. quella ortogonale a s .
 A c. quelle che hanno distanza 1 da s . $r : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 3y + 2 \end{cases}$
- C 555. Determinare il punto della retta $r : x = y = z - 1$ la cui proiezione ortogonale sulla retta $s : x - 2y = z + x = 0$ sia l'origine delle coordinate.
- C 556. Tra le rette uscenti da $P(1, 2, -1)$ e parallele al piano $\alpha : x + 3y - z = 1$ determinare quella incidente la retta $r : \{x = 3y ; z = x + 1\}$.
- C 557. Date le rette r e s
- a. Dimostrare che r e s sono sghembe. $r : \begin{cases} x - z = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x - 2z + 5 = 0 \end{cases}$
 b. Determinare la loro distanza d .
 c. Determinare la perpendicolare comune e i punti P_r, P_s di minima distanza.
 d. Determinare il piano parallelo a entrambe e da esse equidistante.

- A e. Determinare i piani α contenenti r tali che la proiezione di P_s su α abbia distanza 1 da P_s .
- A f. Determinare i punti di r che distano $2d$ da s .
- C 558. Consideriamo tutte le rette s giacenti sul piano $\alpha : x + y = 2$ e incidenti la retta r .
Per ognuna di esse sia θ l'angolo che s forma con r (quello compreso tra 0 e $\pi/2$). Determinare tra le rette s quelle tali che: $r : \begin{cases} x = y + 2 \\ z = 2x \end{cases}$
a. θ sia massimo. b. θ sia minimo. c. $\theta = \pi/3$
559. Dati il punto $P(1, 0, 2)$, la retta $r : \{x = 2y = z + 1\}$ e il piano $\alpha : 3x - 2y + z = 0$.
- F a. Determinare il punto P' simmetrico di P rispetto a r .
- F b. Determinare il punto P'' simmetrico di P rispetto ad α .
- F c. Determinare il punto O' simmetrico di O rispetto a P .
- C d. Determinare la retta r' simmetrica di r rispetto a P .
- F e. Determinare la retta r'' simmetrica di r rispetto ad α .
- C f. Determinare la retta x' simmetrica dell'asse x risp. a r .
- C g. Determinare il piano α' simmetrico di α rispetto a P .
- A h. Determinare il piano α'' simmetrico di α rispetto a r .
- A i. Determinare il piano β simmetrico di $z = 0$ rispetto ad α .
- C 560. Determinare i simmetrici del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, della retta $r : \{x = x(t); y = y(t); z = z(t)\}$ e del piano $\alpha : ax + by + cz = d$ rispetto al punto $(0, 0, 0)$, alla retta $x = y = 0$ e al piano $z = 0$.
- A 561. Determinare i piani passanti per il punto $P(0, 2, 0)$, paralleli alla retta $r : \{x - y = z; y = 2x\}$ e aventi distanza 1 da r .
- A 562. Determinare (se esiste) la retta passante per $P(1, 1, 1)$ e incidente le due rette r e s nei due casi seguenti.
- | | | | |
|----|--------------------------------------|----|------------------------------------|
| a. | $r : \{x = 2y - 1 = -z\}$ | b. | $r : \{x = -y - 1 = -z\}$ |
| | $s : \{x = 2 \quad ; \quad y = 3z\}$ | | $s : \{x = \quad ; \quad y = 3z\}$ |

5. GEOMETRIA ANALITICA: Sfere e circonferenze nello spazio

- F 571. Sono dati la sfera S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 3z = 0$ e il piano α di equazione $x + 2y + z = 2$.
- a. Determinare centro e raggio di S .
- b. Dire perché l'intersezione tra S e α è una circonferenza e determinarne centro, raggio e asse.
- c. Determinare i piani paralleli al piano α e tangenti a S .
- d. Determinare i piani paralleli al piano α che tagliano S in una circonferenza di raggio $1/2$.
- e. Determinare i due punti P_1 e P_2 di intersezione di S con la retta $\{x = t \quad ; \quad y = t \quad ; \quad z = t\}$ e scrivere i piani tangenti a S in P_1 e P_2 .
- f. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ dire se la retta $\{x = t + 1 \quad ; \quad y = kt \quad ; \quad z = 3\}$ è incidente, tangente o esterna a S .
- F 572. Sono dati la retta $r : \{z = x - 3 \quad ; \quad y = 1\}$ e il punto $P(0, 2, 1)$.
- a. Scrivere una rappresentazione cartesiana per la circonferenza γ ottenuta ruotando P attorno a r , in altre parole la circonferenza avente asse r e passante per P .
- b. Determinare la retta t tangente a γ in P .
- c. Determinare le sfere di raggio 9 contenenti γ .
- d. Determinare le sfere contenenti γ e tangenti al piano $\alpha : x = 5$.
- F 573. Sono dati i quattro punti $C_0(0, 1, 1)$ $A(2, 0, 0)$ $B(1, 3, 2)$ $C(1, -1, 0)$
- a. Dire perché esiste una sfera S di centro C_0 e passante per A, B, C e scrivere una rappresentazione cartesiana per S .
- b. Scrivere una rappresentazione cartesiana per la circonferenza γ giacente su S e passante per A, B, C .
- c. Scrivere l'asse a , il centro C_1 e il raggio R_1 di γ .
- d. Scrivere una rappresentazione parametrica per la retta tangente a γ in A .

- F 574. a. Scrivere l'equazione di tutte le sfere tangenti in $(1, 1, 0)$ al piano $x = y$.
 b. Tra tali sfere determinare quelle di raggio $\sqrt{2}$.
 c. Tra tali sfere determinare quelle tangenti anche al piano $x + z = 3$.
- F 575. Data la sfera S di equazione $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x + 8z + 1 = 0$ e la retta $r : \{x - y = 0 \ ; \ z = 0\}$, verificare che r è esterna a S e scrivere i piani del fascio di asse r tangenti a S .
- F 576. Determinare una rappresentazione cartesiana per la circonferenza di centro $C(0, 1, 2)$ e tangente alla retta $r : \{x = 1 + 2t \ ; \ y = 1 + t \ ; \ z = -t\}$.
- F 577. Date le due rette $r : \{x - z = 1 \ ; \ y + 2z = 1\}$ e $s : \{x = t \ ; \ y = 2 \ ; \ z = 3 - t\}$
 a. Dimostrare che sono ortogonali e sghembe e determinarne la distanza.
 b. Dire perché esiste una circonferenza di asse r e tangente a s e scriverne una rappresentazione cartesiana.
- F 578. Determinare una sfera di raggio 2, con centro sulla retta $r : x = y = z - 1$ e tangente al piano $\alpha : x = 3y$.
- F 579. Dato il triangolo $\mathcal{T} : ABC$, con $A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 0)$, $C(0, -1, 1)$
 a. Dire perché il triangolo $\mathcal{T}$ è rettangolo in A .
 b. Determinare il punto H , proiezione di A sull'ipotenusa e misurare l'altezza $\overline{AH}$.
 c. Scrivere una rappresentazione cartesiana per il piano α su cui giace $\mathcal{T}$.
 d. Determinare una rappresentazione cartesiana per la circonferenza circoscritta a $\mathcal{T}$.
 e. Nel piano di $\mathcal{T}$, costruire il quadrato AA_1B_1B sul cateto AB determinando il punto A_1 sul prolungamento del cateto AC e il quarto punto B_1 come in figura.
- 
- C 580. Dati i tre punti $A(0, 1, 1)$, $B(1, 1, 0)$ e $C(1, -1, 1)$, verificare che non sono allineati e determinare la circonferenza passante per A, B, C .
- C 581. Determinare le sfere di raggio 1, con centro sul piano $x = y - z$, tangenti ai piani $x = 0$ e $y + z = 1$.
- A 582. Sia γ la circonferenza del piano $x = 3y - 1$ avente centro $(-1, 0, 0)$ e raggio 1.
 a. Scrivere le due sfere contenenti γ e tangenti al piano $x = 0$.
 b. Scrivere le rette tangenti alla circonferenza nei suoi punti di ascissa $-1/7$.
 c. Condurre dal punto $P(2, 1, 1)$ (che giace sul piano $x = 3y - 1$) le tangenti alla circonferenza.
- A 583. Data la sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$
 a. Tra le rette passanti per $(0, 0, 0)$ e parallele al piano $x = z + 1$, determinare quelle che staccano su S una corda di lunghezza 1.
 b. Determinare il cerchio massimo di S passante per $P(0, 0, 0)$ e per $Q(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$.
 c. Determinare le circonferenze di raggio $\sqrt{3}/2$ giacenti su S e passanti per P e Q .
 d. Verificato che la retta $r : \{z = 2 \ ; \ y = 3x\}$ è tangente a S , determinare le circonferenze di raggio $\sqrt{3}/2$ giacenti su S e tangenti a r .
- A 584. Tra le rette tangenti alla sfera di centro $(1, 1, 2)$ e raggio 2 nel suo punto di minima distanza da $(0, 0, 0)$ determinare :
 a. quella ortogonale all'asse y .
 b. quella incidente l'asse y .
- A 585. Verificare che i punti $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 1)$ e la retta $r : \{x + z = 1 \ ; \ y = 2\}$ sono complanari e determinare le circonferenze passanti per A e B e tangenti a r .
- A 586. Determinare i punti P della retta $r : \{x = t \ ; \ y = 2t + 1 \ ; \ z = 1 - t\}$ tali che la sfera di centro P e tangente al piano $x + y + z = 0$ abbia raggio $\sqrt{3}$.

Avvertenza sull'uso dei simboli $\pm$ e $\mp$: Faremo largo uso di questi simboli, ma avvertiamo che il loro uso è comodo, ma piuttosto delicato. Il loro significato varia a seconda del contesto.

- Espressioni del tipo “Le rette sono $y = \pm 2x$ ” e “per $k = \pm 1$ ” significano rispettivamente “Le rette sono $y = 2x$ e $y = -2x$ ” e “Per $k = 1$ o $k = -1$ ”.
- Espressioni del tipo “tranne i punti $(\pm 1, 0)$ ” e “per $k \neq \pm 1$ ” significano rispettivamente “tranne i punti $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ ” e “Per $k \neq 1$ e $k \neq -1$ ”.
- Quando compaiono diversi simboli $\pm$ in uno stesso ambito si intende (salvo diverso avviso) che siano correlati, cioè che quando uno assume il valore $+$, lo assumano anche gli altri.
- Esempio: “I punti $(\pm 2, \pm \sqrt{5})$ ” significa “I punti $(2, \sqrt{5})$ e $(-2, -\sqrt{5})$ ”.
- Il simbolo $\mp$ si usa sempre solo in correlazione con dei $\pm$ o con altri $\mp$ e si intende che assuma il valore $-$ quando i $\pm$ assumono il valore $+$ e viceversa.
- Esempio: “Le rette $y = (\pm 2 \mp \sqrt{3})$ ” significa “Le rette $y = (2 - \sqrt{3})$ e $y = (-2 + \sqrt{3})$ ”.
- Esempio: “Per $t = \pm 3$ si ottengono i punti $(\pm 2, \mp \sqrt{3})$ ” significa “Per $t = 3$ si ottiene il punto $(2, -\sqrt{3})$ e per $t = -3$ si ottiene il punto $(-2, \sqrt{3})$ ”.
- Bisogna soprattutto prestare attenzione a manipolare equazioni o espressioni contenenti diversi simboli $\pm$ o $\mp$.
- Esempio: $-(1 \pm \sqrt{2}) \pm 3x$ diventa $-1 \mp \sqrt{2} \pm 3x$ e l'equazione $(\sqrt{2} \pm \sqrt{3})y + (\sqrt{5} \mp \sqrt{2}) = 0$ diventa $y = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{2}}{\sqrt{2} \pm \sqrt{3}}$

Geometria lineare nel piano

501. a. Vettori direzionali sono $(B - A) = (3, -2)$ e tutti i suoi multipli.
 Una rappresentazione parametrica è per esempio $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$. Un'altra è $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$
- b. Per esempio $\begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - 2t \end{cases}$
- c. Un suo punto è $(4, 0)$, un altro è $(1, -1)$. Un vettore direzionale è per esempio $(3, 1)$ (ortogonale al vettore normale della retta che è $\vec{n} = (1, -3)$).
 Una rappresentazione parametrica è $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = t \end{cases}$. Un'altra è $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$
502. Ponendo $x = 0$ si trova $t = -1/2$, quindi la sua intersezione con $x = 0$ è $(0, -5/2)$. Analogamente la sua intersezione con $y = 0$ è $(5, 0)$. Basta quindi scrivere la retta passante per $(0, -5/2)$ e con vettore direzionale $(5, 0) - (0, -5/2) = (5, 5/2)$
 Per $t = 1/2$ si ha ora il punto della divisione di $\overline{AB}$ in due parti cioè $M(5/2, -5/4)$.
 Per $t = 1/3$ e $t = 2/3$ si hanno i punti della divisione di $\overline{AB}$ in tre parti cioè $M_1(5/3, -5/3)$ e $M_2(10/3, -5/6)$.
503. Le rette r_1 e r_2 coincidono perché hanno gli stessi vettori direzionali e il punto $(1, -1)$ di r_1 sta su r_2 (per $t = -1$).
 Le rette s_1 e s_2 non coincidono, pur avendo gli stessi vettori direzionali, perché il punto $(-2, 2)$ di s_1 non sta su s_2 .
504. Basta scrivere le rette nella forma $y = mx + n$, cosa possibile per tutte tranne per la c., che ha quindi coefficiente angolare infinito. Quindi
- | | | | | | |
|-----------------------|-------------------|---|-------------------|---------------------------|-------------------|
| a. $y = 2x - 4$ | $m = 2$ | b. $y = 0 \cdot x - 4$ | $m = 0$ | c. $x = 10$ | $m = \infty$ |
| d. $y = \frac{1}{3}x$ | $m = \frac{1}{3}$ | e. $y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5} - 7$ | $m = \frac{1}{5}$ | f. $y = \frac{1}{3}x - 1$ | $m = \frac{1}{3}$ |

505. Il sistema lineare 3×2 delle equazioni delle tre rette è associato alla matrice $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -7 \end{array} \right)$ e, riducendolo con l'algoritmo di Gauss si vede che ha l'unica soluzione $(-1, 1)$, quindi le tre rette appartengono a un fascio e il centro è $(-1, 1)$.
506. Il sistema lineare 3×2 delle equazioni delle tre rette è associato alla matrice. La matrice 3×3 ha determinante $2 + 2k - 4k^2$ ed è quindi zero per $k = -1/2$ e $k = 1$.
 Per $k \neq -1/2, 1$ il sistema non ha soluzioni (dato che la caratteristica della matrice completa è 3), quindi le rette non si intersecano in un punto e non sono tutte parallele, perché le due colonne dei coefficienti $\left(\begin{array}{cc|c} 2k & -k & 1 \\ 2 & -k & 0 \\ -2k & 1 & 1 \end{array} \right)$ sono proporzionali solo per $k = 1$, quindi non costituiscono un fascio.
 Per $k = -1/2$ il sistema ha una soluzione $(-1/3, 4/3)$, quindi le rette costituiscono un fascio proprio con questo centro.
 Per $k = 1$ sono tutte parallele con vettore normale $\vec{n} = (2, -1)$ e costituiscono quindi un fascio improprio di rette parallele.
507. a. Il vettore normale è $(1, 3k)$, quindi un vettore direzionale è $(3k, -1)$. Occorre che $(3k, -1)$ e $(2, 1)$ siano proporzionali, cioè che $\frac{3k}{2} = \frac{-1}{1}$, quindi che si abbia $k = -2/3$.
- b. Evidentemente per $k = 0$ si ha una retta parallela all'asse y , mentre per nessun k si ha una retta parallela all'asse x .
 La famiglia è un fascio perché si scrive $(x+2) + k(3y-5)$, ma incompleto, dato che dipende da un parametro anziché da due proporzionali e infatti manca la retta parallela all'asse x .
- c. Visto che la famiglia è un fascio (benché incompleto), basta intersecarne due rette distinte, per esempio $x+2=0$ (per $k=0$) e $x+3y-3=0$ (per $k=1$) e si trova subito $C(-2, 5/3)$.
- d. Le rette intersecano gli assi nei punti $\left(0, \frac{5k-2}{3k}\right)$ e $(5k-2, 0)$. Il triangolo è rettangolo e i due cateti misurano rispettivamente $\left|\frac{5k-2}{3k}\right|$ e $|5k-2|$ per cui l'area del triangolo è $\left|\frac{5k-2}{3k}\right| \cdot \frac{|5k-2|}{2}$. Ponendola uguale a 7 si ricava $25k^2 - 10k + 4 = |42k|$. Le due equazioni di secondo grado sono:
 $25k^2 - 20k + 4 = 42k$ per $k > 0$ che ha le soluzioni $k = \frac{31 \pm \sqrt{861}}{25}$ (entrambe accettabili perché entrambe positive).
 $25k^2 - 20k + 4 = -42k$ per $k < 0$ che ha le soluzioni $k = \frac{-11 \pm \sqrt{21}}{25}$ (entrambe accettabili perché entrambe negative).
508. Parametizziamo la retta: $\{x = t - 2 ; y = t\}$. I punti di r sono quindi $(t - 2, t)$
 Il triangolo sarà POA sarà rettangolo in P se i vettori $(P - O)$ e $(P - A)$ sono ortogonali:
 $(P - O) = (t - 2, t) \quad (P - A) = (t - 12, t)$
 $(P - O) \cdot (P - A) = (t - 2, t) \cdot (t - 12, t) = (t - 2)(t - 12) + t^2 = 0$
 Si ha l'equazione $2t^2 - 14t + 24 = 0$ che ha le due soluzioni $t_1 = 4$ e $t_2 = 3$.
 I punti cercati si ottengono per questi due valori di t e sono $P_1(2, 4) \quad P_2(1, 3)$
509. La retta passa per $M(1/2, 1)$ (punto medio del segmento AB) e ha come vettore normale il vettore $(B - A) = (1, -6)$ e quindi è $1(x - 1/2) - 6(y - 1) = 0$ o anche, semplificando: $2x - 12y + 11 = 0$.
510. a. La retta passante per $P = (1, 1)$ e ortogonale a $r : x - 2y = 1$ è $n : 2x + y = 3$. Intersecando le rette r e n si trova il punto $M = (7/5, 1/5)$.
 Il punto simmetrico è perciò $P_1 = 2M - P = (9/5, -3/5)$.
- b. Osserviamo che $(1, 1)$ sta sulla retta $s : x + y = 2$, quindi la retta simmetrica passa per il punto $P_1(9/5, -3/5)$ trovato sopra. Inoltre passa per il punto intersezione delle due rette r e s che è $I(5/3, 1/3)$. La retta è quindi $s_1 : 21x + 3y = 36$.
511. L'equazione è $(x - y)(x - 3y)(x - 1) = 0$, che è soddisfatta se e solo se $x = y$ oppure $x - 3y = 0$ oppure $x - 1 = 0$.

512. Le rette sono quelle del fascio $ax + b(y - 1) = 0$ il cui vettore normale forma angolo di $\pi/6$ con il vettore normale di $y = 2x$ che è $(2, -1)$. Si deve quindi avere:

$\frac{|(a, b) \cdot (2, -1)|}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ da cui $2 |2a - b| = \sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{a^2 + b^2}$ ed elevando a quadrato (è tutto positivo): $a^2 - 16ab - 11b^2 = 0$ o anche $(a/b)^2 - 16(a/b) - 11 = 0$ (posso dividere per b perché evidentemente non c'è alcuna soluzione accettabile con $b = 0$), da cui $a/b = 8 \pm 5\sqrt{3}$, per esempio $a = 8 \pm 5\sqrt{3}$ e $b = 1$ (tutte le altre soluzioni danno le stesse due rette con equazioni proporzionali). Le rette sono pertanto: $(8 \pm 5\sqrt{3})x + y = 1$.

513. Le bisettrici sono notoriamente $\frac{2x - y}{\sqrt{5}} = \pm \frac{x + y - 1}{\sqrt{2}}$. Per stabilire quale delle bisettrici sia situata nell'angolo minore conviene però procedere in altro modo.

Un vettore direzionale per la prima retta è $\vec{v}(1, 2)$, uno per la seconda è $\vec{w}(-1, 1)$. Il loro prodotto scalare è positivo, quindi formano un angolo acuto. Per avere il vettore bisettore nell'angolo acuto li normalizziamo. Dato che ora hanno lo stesso modulo, la loro somma è proprio il vettore bisettore.

$$\frac{(1, 2)}{\sqrt{5}} + \frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{10}}, \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{10}} \right).$$

Quindi come vettore direzionale per la retta bisettrice nell'angolo minore possiamo prendere $(\sqrt{2} - \sqrt{5}, 2\sqrt{2} + \sqrt{5})$. Inoltre la retta passa per il punto intersezione delle due rette che è $(1/3, 2/3)$.

Per avere l'altra bisettrice cambiamo verso a uno dei vettori direzionali delle due rette in modo che formino un angolo ottuso: usando $(1, 2)$ e $(1, -1)$ il prodotto scalare è negativo, quindi l'angolo è ottuso. Ripetendo la procedura otteniamo la retta bisettrice nell'angolo maggiore, che ha vettore direzionale $(\sqrt{2} + \sqrt{5}, 2\sqrt{2} - \sqrt{5})$ e passa sempre per $(1/3, 2/3)$.

Le due rette sono $\begin{cases} x = 1/3 + (\sqrt{2} \mp \sqrt{5})t \\ y = 2/3 + (2\sqrt{2} \pm \sqrt{5})t \end{cases}$ Con la scelta “ $- +$ ” si ottiene la bisettrice dell'angolo minore, con la scelta “ $+ -$ ” si ottiene la bisettrice dell'angolo maggiore.

514. Parametizziamo la retta $4x - 3y + 2$: $\{x = 3t + 1; y = 4t + 2\}$. Il simmetrico di $(3t + 1, 4t + 2)$ rispetto alla retta $x - 2y = 2$ è (x_0, y_0) tale che:

- $\left(\frac{3t + 1 + x_0}{2}, \frac{4t + 2 + y_0}{2} \right)$ è su $x - 2y = 2$ cioè $\frac{3t + 1 + x_0}{2} - 2 \frac{4t + 2 + y_0}{2} = 2$.
- $(3t + 1 + x_0, 4t + 2 + y_0)$ è ortogonale a $x - 2y = 2$ cioè $(3t + 1 + x_0, 4t + 2 + y_0) \cdot (2, 1) = 0$.

Dalle due relazioni si deduce $\{x_0 = 5t + 3, y_0 = -2\}$. Avendo tutti punti la stessa ordinata, la distanza minima da $(0, 0)$ si ottiene per $t = -3/5$. Il punto cercato è: $P(-4/5, -2/5)$.

515. Si trova subito che $P = (4, -1)$. Cerchiamo tra i punti della retta $s: \{x = 2 - t; y = 3 + 2t\}$ quello che dista 5 da $P(4, -1)$:

$\text{dist}((2 - t, 3 + 2t), (4, -1)) = 5$ ha come soluzioni $t = -2 \pm \sqrt{5}$ e si trovano i punti di s : $(4 \mp \sqrt{5}, -1 \pm 2\sqrt{5})$. Dobbiamo ora trovare i punti di r le cui proiezioni su s sono appunto questi due punti. Scriviamo quindi le rette ortogonali a s e passanti per questi due punti:

$$\begin{cases} x = 4 \mp \sqrt{5} + 2t \\ y = -1 \pm 2\sqrt{5} + t \end{cases} \quad \text{Intersecandole con } r \text{ si ottiene } t = \mp 3\sqrt{5}/4, \text{ da cui i punti cercati}$$

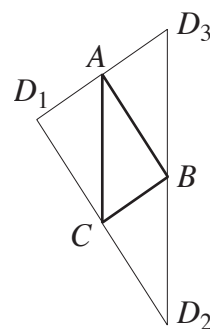
$$P_1 \begin{cases} x = 4 \mp \sqrt{5} + 2(\mp 3\sqrt{5}/4) \\ y = -1 \pm 2\sqrt{5} + (\mp 3\sqrt{5}/4) \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} x = 4 \mp 5\sqrt{5}/2 \\ y = -1 \pm 5\sqrt{5}/4 \end{cases}$$

516. Ci sono tre modi:

Se il parallelogramma è $ABCD_1$, possiamo trovare D_1 sommando i due vettori $(A - B)$ e $(C - B)$. Si ottiene $(D_1 - B) = (4, -4)$, da cui $D_1 = (5, -2)$.

Se il parallelogramma è $CABD_2$, possiamo trovare D_2 sommando i due vettori $(B - A)$ e $(C - A)$. Si ottiene $(D_2 - A) = (7, 2)$, da cui $D_2 = (7, 2)$.

Se il parallelogramma è $ACBD_3$, possiamo trovare D_3 sommando i due vettori $(A - C)$ e $(B - C)$. Si ottiene $(D_3 - C) = (-11, 2)$, da cui $D_3 = (-5, 2)$.



517. Le tre mediane appartengono, come è noto, a un fascio il cui centro è il baricentro. Una delle mediane è la retta passante per $A(a_1, a_2)$ e per il punto medio del lato opposto che è $M((b_1 + c_1)/2, (b_2 + c_2)/2)$.

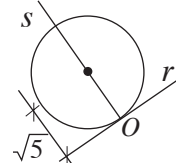
Scriviamo la retta parametricamente in modo da ottenere A per $t = 0$ e M per $t = 1$. Allora, per un'altra nota proprietà del baricentro, esso è situato a $2/3$ della mediana, per cui lo si ottiene per $t = 2/3$. Eseguiti i conti, il baricentro è $\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$.

Circonferenze nel piano

521. La retta passante per $(0, 0)$ e ortogonale a quella data è $s: \{x = 2t; y = -3t\}$.

I centri delle circonferenze devono appartenere alla retta s e sono quindi i punti del tipo $(2t, -3t)$ che hanno distanza $\sqrt{5}$ da $(0, 0)$. Si scrive $\sqrt{(2t - 0)^2 + (-3t - 0)^2} = \sqrt{5}$, da cui $\sqrt{13t^2} = \sqrt{5}$ e quindi $t = \pm\sqrt{5/13}$.

I centri sono perciò $(\pm 2\sqrt{5/13}, \mp 3\sqrt{5/13})$ e le circonferenze sono: $(x \mp \sqrt{20/13})^2 + (y \pm \sqrt{45/13})^2 = 5$.



522. I centri sono i punti dell'asse x cioè del tipo $(t, 0)$ che hanno distanza 1 da $2x - y = 0$. Risolviamo $\frac{|2(t) - (0)|}{\sqrt{5}} = 1$: Si trova $t = \pm\sqrt{5}/2$. Le circonferenze sono quindi: $(x \pm \sqrt{5}/2)^2 + y^2 = 1$.

523. I centri delle circonferenze cercate appartengono all'asse del segmento $\overline{AB}$. L'asse è la retta passante per $M = (A + B)/2 = (0, 1)$ e ortogonale a $(B - A) = (4, -2)$.

Un vettore ortogonale a $(B - A)$ è $(1, 2)$, quindi l'asse è $\{x = t; y = 2t + 1\}$.

I centri sono punti dell'asse che hanno uguale distanza da r e da $B(2, 0)$, cioè tali che

$$\frac{|(t) + (2t + 1) + 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(t - 2)^2 + (2t + 1 - 0)^2}. \text{ Si ricava } t = 9 \pm 4\sqrt{5}.$$

Sostituendo nella retta si hanno i centri, sostituendo in una delle due distanze si ha il raggio.

In conclusione le circonferenze sono:

$$(x - 9 \mp 4\sqrt{5})^2 + (y - 19 \mp 8\sqrt{5})^2 = 90(9 \pm 4\sqrt{5})$$

524. Completiamo i quadrati per determinare centro e raggio della circonferenza:

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 8y + 16) = 1 + 16 \quad (x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 17$$

La circonferenza ha quindi centro $(-1, -4)$ e raggio $\sqrt{17}$.

Le rette passanti per $(1, 2)$ sono $a(x - 1) + b(y - 2) = 0$ (a, b non entrambi nulli). Calcoliamo la loro distanza dal centro e imponiamo che sia $\sqrt{17}$.

$$\text{Si ha: } \frac{|a(-1 - 1) + b(-4 - 2)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{17} \text{ ovvero } 13a^2 - 24ab - 19b^2 = 0.$$

Possiamo supporre $b \neq 0$ perché evidentemente non c'è alcuna soluzione con $b = 0$ (a parte $a = b = 0$ che non dà una retta). Dividendo per b^2 , l'equazione omogenea di secondo grado

$$\text{diventa } 13\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 24\left(\frac{a}{b}\right) - 19 = 0 \text{ e ha le soluzioni } \frac{a}{b} = \frac{12 \pm \sqrt{391}}{13}.$$

Per esempio $a = 12 \pm \sqrt{391}$ e $b = 13$. Le rette sono quindi: $(12 \pm \sqrt{391})(x - 1) + 13(y - 2) = 0$. Tutte le altre soluzioni dell'equazione omogenea di secondo grado sono proporzionali e quindi forniscono le stesse rette.

525. Il centro della circonferenza è sulla retta passante per $B(1, 0)$ e ortogonale a t . Questa retta ha vettore direzionale $(1, 1)$, quindi una sua rappresentazione parametrica è: $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \end{cases}$

Il centro è perciò tra i punti del tipo $C(t + 1, t)$ quello avente la stessa distanza da A e da B :

$$\text{dist}(A, C) = \sqrt{(t + 1 - 0)^2 + (t - 2)^2} = \sqrt{t^2 + 2t + 1 + t^2 - 4t + 4} = \sqrt{2t^2 - 2t + 5}$$

$$\text{dist}(B, C) = \sqrt{(t + 1 - 1)^2 + (t - 0)^2} = \sqrt{t^2 + t^2} = \sqrt{2t^2}$$

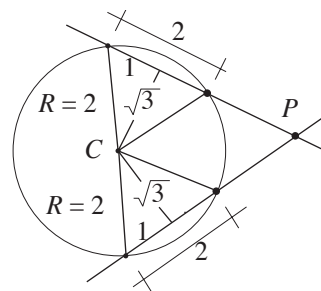
$$\text{Perciò: } \sqrt{2t^2 - 2t + 5} = \sqrt{2t^2} \text{ da cui } 2t^2 - 2t + 5 = 2t^2 \text{ e } t = 5/2$$

Il centro è quindi $C\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Il raggio è la distanza tra A e C cioè $\sqrt{2t^2} = \sqrt{25/2} \simeq 3.53$.

L'equazione della circonferenza è $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

526. La circonferenza ha centro $C = (2, 0)$ e raggio $R = 2$.

Le rette sono quelle del fascio di centro $P(4, -1)$ e cioè del tipo $a(x - 4) + b(y + 1) = 0$ la cui distanza dal centro è $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. La distanza dal centro è $\frac{|a(2 - 4) + b(0 + 1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, quindi si ha: $\frac{|-2a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{3}$, da cui $a^2 - 4ab - 2b^2 = 0$. Risolvendo rispetto ad a si trova $a = (2 \pm \sqrt{6})b$. Per esempio $a = 2 \pm \sqrt{6}$ e $b = 1$.
Le rette sono: $(2 \pm \sqrt{6})(x - 4) + (y + 1) = 0$.



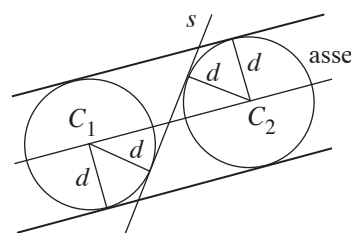
527. Intersechiamo le due rette parallele con una retta qualunque, per esempio l'asse x e otteniamo $(1, 0)$ e $(3, 0)$. L'asse della striscia è la retta passante per il punto medio di questi due punti e parallela alle due date, cioè la retta $y = 2x + 2$ o anche $\{x = t; y = 2t + 2\}$.

I centri sono i punti $(t, 2t + 2)$ la cui distanza d da $y = 2x + 1$ è uguale a quella da s . Cioè: $\frac{|2x - y + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|3x - y|}{\sqrt{10}}$

ovvero: $\frac{|2t - (2t + 2) + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|3t - (2t + 2)|}{\sqrt{10}}$. Si trova

$t = 2 \pm \sqrt{2}$, da cui i centri. Il raggio è per entrambe la metà della distanza di un punto della prima retta (per esempio $(1, 0)$) dalla seconda. Si trova $R = 1/\sqrt{5}$.

Le circonferenze sono: $(x - 2 \pm \sqrt{2})^2 + (y - 6 \pm 2\sqrt{2})^2 = 1/5$.



528. I centri delle circonferenze cercate appartengono alle due bisettrici delle rette. Le bisettrici sono: $\frac{x + y + 1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{2x - y - 4}{\sqrt{5}}$. Dato che i centri appartengono all'asse y , essi sono le intersezioni tra l'asse y e le bisettrici, cioè $(0, 1 \mp \sqrt{10})$.

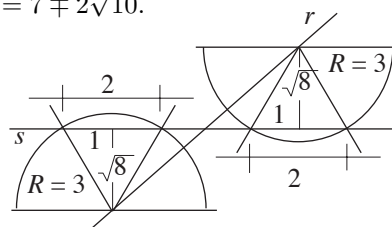
I raggi sono le distanze dei centri da una delle rette per esempio da $x + y + 1 = 0$ e sono rispettivamente $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ (per il "+") e $\sqrt{2} - \sqrt{5}$ (per il "-")

Le circonferenze sono quindi: $x^2 + (y - 1 \pm \sqrt{10})^2 = 7 \mp 2\sqrt{10}$.

529. La circonferenza ha come centro un punto della retta $r: \{x = t; y = 3t + 2\}$ che abbia distanza $\sqrt{8} = \sqrt{3^2 - 1}$ dalla retta s . Ce ne sono quindi due e sono $(1, 5)$ e $(-1, -1)$.

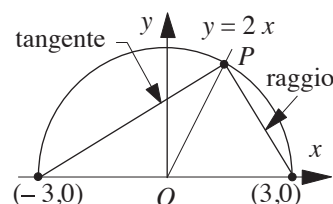
Le circonferenze sono:

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 9 \quad (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$$



530. Una delle intersezioni, dovendo essere punto della retta $y = 2x$ è del tipo $P(t, 2t)$. Il raggio della circonferenza che passa per P e ha centro $C(3, 0)$ ha come vettore direzionale $(P - C)$ cioè $(t - 3, 2t)$. Questo è anche un vettore normale della retta tangente che ha perciò equazione $(t - 3)(x - t) + 2t(y - 2t) = 0$. Imponendo che la tangente passi per il punto $(-3, 0)$ si ottiene $5t^2 - 9 = 0$, cioè $t = \pm 3/\sqrt{5}$. Il punto P è quindi uno di questi due: $(\pm 3/\sqrt{5}, \pm 6/\sqrt{5})$. Il raggio cercato è il modulo del vettore $(P - C)$, cioè $R = \sqrt{(\pm 3/\sqrt{5} - 3)^2 + (\pm 6/\sqrt{5})^2}$.

Altro modo (più geometrico) Il punto P cercato è il vertice di un triangolo rettangolo di base $(-3, 0)$, $(3, 0)$ i cui cateti sono il raggio e la tangente. Cioè P è all'intersezione tra la retta $y = 2x$ e la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 3 che è $x^2 + y^2 = 9$. Si trovano i due punti $(\pm 3/\sqrt{5}, \pm 6/\sqrt{5})$ e si conclude come sopra.



531. I vettori direzionali delle due rette sono $\vec{v}_1(1, 2)$ e $\vec{v}_2(-1, 3)$. Dato che il loro prodotto scalare è positivo, normalizzandoli e sommandoli si ottiene un vettore direzionale per la bisettrice

dell'angolo acuto.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}}, \frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{10}}\right) \text{ o anche } (\sqrt{2}-1, 2\sqrt{2}+3).$$

Le due rette si intersecano in $(0,0)$, quindi anche la bisettrice passa per l'origine e una sua rappresentazione parametrica è perciò: $\begin{cases} x = (\sqrt{2}-1)t \\ y = (2\sqrt{2}+3)t \end{cases}$. I centri delle circonferenze cercate sono i punti della bisettrice che distano 2 da una di esse, per esempio dalla prima, cioè tali che:

$$\left| \frac{(\sqrt{2}-1)t - 2(2\sqrt{2}+3)t}{\sqrt{5}} \right| = 2 \quad \left| t = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5} \right. \text{ da cui } \left. \left(\pm \frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{5}}{5}, \pm \frac{6\sqrt{5}+4\sqrt{10}}{5} \right) \right.$$

Le circonferenze cercate hanno centro nei punti trovati e naturalmente raggio 2.

532. a. La distanza dei due centri è $\sqrt{5}$ e va confrontata con i due raggi 1 e R . Notiamo che il centro della seconda circonferenza è esterno alla prima perché la distanza tra $(2,3)$ e $(1,1)$ è maggiore di 1. Quindi le due circonferenze sono esterne se $R+1 < \sqrt{5}$, etc.

In dettaglio:

Se $R < \sqrt{5}-1$ sono esterne.

Se $R = \sqrt{5}-1$ sono tangenti esternamente.

Se $\sqrt{5}-1 < R < \sqrt{5}+1$ sono incidenti.

Se $R = \sqrt{5}+1$ sono tangenti internamente.

Se $R > \sqrt{5}+1$ la prima è interna alla seconda.

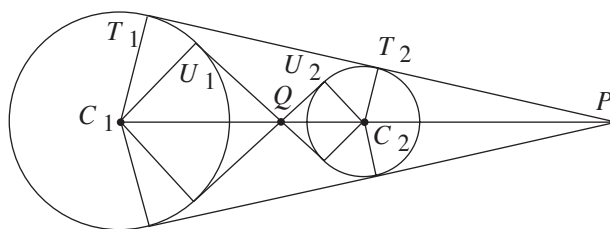
- b. Scriviamo il sistema (non lineare!) delle equazioni delle circonferenze. Sostituendo la seconda equazione con la differenza si ottiene il sistema equivalente $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ 2x + 4y = 12 - R^2 \end{cases}$

La retta $2x + 4y = 12 - R^2$ è quella passante quindi per gli eventuali punti comuni alle due circonferenze. Nei casi di tangenza ($R = \sqrt{5} \mp 1$) le rette tangenti sono quindi $2x + 4y = 6 \pm \sqrt{5}$.

- c. Si procede esattamente come nel caso precedente e si scrive la retta ottenuta per $R = 3$ e cioè $2x + 4y = 3$

533. Le circonferenze sono esterne e hanno centri rispettivamente $C_1(1,2)$ e $C_2(1,-2)$ e raggi $R_1 = \sqrt{2}$ e $R_2 = 1$. Le due tangenti esterne si incontrano in un punto P tale che i triangoli PC_1T_1 e PC_2T_2 siano simili, cioè tali che i triangoli PC_1T_1 e PC_2T_2 siano simili,

cioè tali che $\frac{PC_1}{PC_2} = \frac{R_1}{R_2}$. Analogamente le due esterne si incontrano in un punto Q tale che i triangoli QC_1U_1 e QC_2U_2 siano simili, cioè tali che $\frac{PC_1}{PC_2} = \frac{R_1}{R_2}$ (stessa uguaglianza).



Dato che la retta congiungente i due centri è $\{x = 1; y = t\}$, P e Q saranno del tipo $(1,t)$ e dall'uguaglianza si trova $t = -6 \pm 4\sqrt{2}$. (Col segno “-” si ha Q). Ora basta condurre da P e da Q le due rette tangenti a una qualunque delle due circonferenze e si hanno le quattro tangenti comuni.

Due delle tangenti passano per $P(1, -6-4\sqrt{2})$ e hanno coefficiente angolare $m = \pm\sqrt{47+32\sqrt{2}}$; le altre due passano per $Q(1, -6+4\sqrt{2})$ e hanno coefficiente angolare $m = \pm\sqrt{47-32\sqrt{2}}$.

Geometria lineare nello spazio

541. Un vettore normale al piano α è $\vec{n} = (1, -3, 1)$.

- Il piano parallelo è $1(x-0) - 3(y-1) + 1(z-2) = 0$, cioè $x - 3y + z + 1 = 0$.
- Un piano per P ortogonale ad α è $a(x-0) + b(y-1) + c(z-2) = 0$ con $(a, b, c) \cdot (1, -3, 1) = 0$, cioè $a - 3b + c = 0$. Quindi ce ne sono infiniti; per esempio per $(a, b, c) = (1, 0, -1)$ otteniamo $x - z + 2 = 0$, per $(a, b, c) = (1, 1, 2)$ otteniamo $x + y + 2z - 5 = 0$.
- La retta ha come vettore direzionale $\vec{n}$ e passa per P , quindi una sua rappresentazione parametrica è $\{x = 0 + t; y = 1 - 3t; z = 2 + t\}$

d. Occorre intersecare la retta r ottenuta in c. con α .

Sostituendo r in α : $(t) - 3(1 - 3t) + (2 + t) = 0$ da cui $11t = 1$. Quindi per $t = 1/11$ si ha il punto proiezione: $P_0 = (1/11, 8/11, 23/11)$.

542. Un vettore direzionale per r è $\vec{v} = (2, 1, -1)$.

a. È evidentemente $\{x = 2t \ ; \ y = 1 + t \ ; \ z = 2 - t\}$

b. Un vettore $\vec{w} = (l, m, n)$ è ortogonale a $\vec{v}$ se $(l, m, n) \cdot (2, 1, -1) = 0$ cioè se $2l + m - n = 0$. Quindi ci sono infinite rette passanti per P e ortogonali a r . Per esempio:

$$\begin{array}{ll} \text{Scegliendo} & \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} & \text{Scegliendo} & \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \\ \vec{w} = (0, 1, 1) & & \vec{w} = (1, -1, 1) & & \\ \text{si ha la retta} & & \text{si ha la retta} & & \end{array}$$

c. Il piano passante per P e ortogonale a r è $2(x-0) + 1(y-1) - 1(z-2) = 0$, cioè $2x + y - z + 1 = 0$.

d. Intersechiamo il piano trovato sopra con r sostituendo i punti di r nell'equazione del piano: $2(1 + 2t) + (1 + t) - (-t) + 1 = 0$, da cui $6t + 4 = 0$. Per $t = -2/3$ otteniamo il punto $P_1(-1/3, 1/3, 2/3)$, proiezione ortogonale di P su r .

e. La distanza di P da r è uguale alla distanza tra P e P_1 :

$$d = \sqrt{(0 + 1/3)^2 + (1 - 1/3)^2 + (2 - 2/3)^2} = \sqrt{7/3}.$$

f. La retta cercata è la retta passante per P e P_1 :

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} x = 0 + (-1/3 - 0)t \\ y = 1 + (1/3 - 1)t \\ z = 2 + (2/3 - 2)t \end{cases} & \begin{cases} x = 0 - t/3 \\ y = 1 - 2t/3 \\ z = 2 - 4t/3 \end{cases} & \text{Sostituendo per co-} & \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \\ & & \text{modità } t \text{ con } -3t & \end{array}$$

543. a. Per rappresentare parametricamente r occorre porre $y = t$, perché altrimenti non è possibile ricavare y per $k = 0$. La rappresentazione è immediata.

b. Intersechiamo r con α sostituendo i punti di r nell'equazione del piano: $(k - t) + 2(t) + (1 - k^2t) = 0$, da cui l'equazione di primo grado in t : $(1 - k^2)t = -k - 1$.

Se $k \neq \pm 1$, l'equazione ha una soluzione, per cui la retta e il piano sono incidenti.

Per vedere se in qualche caso possono anche essere ortogonali vediamo se sono proporzionali il vettore direzionale di r che è $(-1, 1, -k^2)$ e il vettore normale del piano $(1, 2, 1)$. Il rapporto delle prime coordinate è -1 , mentre quello delle seconde è $1/2$, quindi per nessun valore di k sono ortogonali.

Se $k = 1$, l'equazione non ha soluzioni, per cui la retta è parallela al piano.

Se $k = -1$, l'equazione è soddisfatta da ogni t , per cui la retta giace sul piano.

544. I vettori $(B - A) = (2, 0, 1)$ e $(B - C) = (2, 2, -1)$ non sono paralleli per cui A, B, C non sono allineati. Il piano dei tre punti ha come vettore normale $(B - A) \wedge (B - C) = (2, 0, 1) \wedge (2, 2, -1) = (-2, 4, 4)$ o anche $(1, -2, -2)$.

Quindi il piano è $1(x - 0) - 2(y - 1) - 2(z - 0) = 0$ cioè $x - 2y - 2z + 2 = 0$.

545. Modo 1: La retta è $r : \{x - y = 0 \ ; \ y + z - 2 = 0\}$, quindi il fascio di piani di asse r è $a(x - y) + b(y + z - 2) = 0$. Tra questi piani, l'unico passante per $(1, 0, 3)$ si ottiene per a, b tali che $a(1 - 0) + b(0 + 3 - 2) = 0$, cioè $a + b = 0$, per esempio $a = 1$ e $b = -1$, da cui il piano $x - 2y - z + 2 = 0$.

Modo 2: Un vettore parallelo a r è $\vec{v} = (1, 1, -1)$. Un punto di r è per esempio $P_0(0, 0, 2)$. Il piano cercato ha come vettore normale $\vec{n} = \vec{v} \wedge (P - P_0)$ cioè $(1, 1, -1) \wedge ((1, 0, 3) - (0, 0, 2)) = (1, 1, -1) \wedge (1, 0, 1) = (1, -2, -1)$, quindi il piano è $1(x - 1) - 2(y - 0) - 1(z - 3) = 0$ ovvero $x - 2y - z + 2 = 0$.

546. Scriviamo le due rette in forma parametrica con due parametri diversi:

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} & \begin{cases} x = -1 + u \\ y = k - 2u \\ z = 3 - u \end{cases} & \text{Interse-} & \begin{cases} t = -1 + u \\ 1 - t = k - 2u \\ t = 3 - u \end{cases} & \begin{cases} t - u = -1 \\ -t + 2u = k - 1 \\ t + u = 3 \end{cases} \\ & \text{chiamole:} & & & \end{array}$$

Si vede subito che il sistema lineare 3×2 in t, u ha soluzione solo se $k = 4$. La soluzione è $t = 1 \ ; \ u = 2$. I due valori forniscono su ciascuna delle rette lo stesso punto comune $(1, 0, 1)$.

I vettori direzionali delle due rette sono $(1, -1, 1)$ e $(1, -2, -1)$. Un vettore normale per il piano

è perciò $(1, -1, 1) \wedge (1, -2, -1) = (3, 2, -1)$.

Quindi il piano è $3(x - 1) + 2(y - 0) - 1(z - 1) = 0$, cioè $3x + 2y - z = 2$.

547. Si tratta innanzitutto di determinare il numero di soluzioni del sistema lineare delle equazioni dei tre piani che è associato alla matrice seguente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k^2 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & k+1 & 0 \\ 0 & 2-2k^2 & 4k+3 & k^2+3 \end{array} \right) \quad \text{Riduciamo con } R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1:$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k^2 & 1 & -4 \\ 0 & 2-2k^2 & k-1 & 8 \\ 0 & 2-2k^2 & 4k+3 & k^2+3 \end{array} \right) \quad \text{e poi con } R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k^2 & 1 & -4 \\ 0 & 2-2k^2 & k-1 & 8 \\ 0 & 0 & 3k+4 & k^2-5 \end{array} \right)$$

Guardando la diagonale del sistema, si vede che è ridotto se $k \neq 1, -1, -4/3$, pertanto per questi valori il sistema ha un'unica soluzione e i tre piani si intersecano in un solo punto.

Esaminiamo i tre casi particolari:

- Se $k = 1$, allora la seconda equazione del sistema ridotto diventa $0 = 8$, pertanto il sistema non ha soluzione. Per capire come sono disposti i tre piani esaminiamoli:

$$\alpha: x + y + z = -4 \quad \beta: 2x + 2y + 2z = 0 \quad \gamma: 7z = 4$$

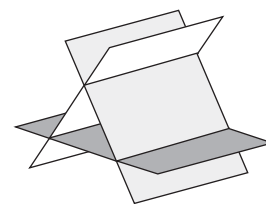
Si constata subito che α e β sono paralleli, mentre γ incide α e β e per questo motivo i piani non hanno punti in comune.

- Se $k = -1$, dalla matrice si vede subito che ha ∞^1 soluzioni e perciò i piani costituiscono un fascio: esaminiamo allora i tre piani:

$$\alpha: x + y + z = -4 \quad \beta: 2x + 2y = 0 \quad \gamma: -z = 4$$

Le tre equazioni sono una rappresentazione cartesiana dell'asse del fascio. Ne bastano due per avere una rappresentazione cartesiana della retta: $\{2x + 2y = 0; -z = 4\}$. Una rappresentazione parametrica è $\{x = -t; y = t; z = -4\}$; da essa si ricava subito un vettore direzionale: $\vec{v} = (-1, 1, 0)$

- Se $k = -4/3$, l'ultima equazione è $0 = -29/9$, pertanto il sistema non ha soluzioni. Esaminando i tre piani α, β, γ , si vede subito che essi non sono a due a due paralleli, ciò significa che sono disposti come in figura e per tale motivo non hanno punti a comune.



548. Parametizziamo $r: \{x = 2t; y = t; z = 0\}$. Un vettore parallelo a r è quindi $(2, 1, 0)$.

- a. Il piano ortogonale a r passante per P è $2x + y - 2 = 0$. Intersecandolo con r si trova il punto proiezione su r che è $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$.

Per quanto riguarda la proiezione su α , osserviamo che il punto P giace sul piano α e pertanto la sua proiezione su α è P stesso.

- b. Modo 1: Scriviamo il fascio di piani di asse $r: a(x - 2y) + bz = 0$. Questi piani hanno vettore normale $(a, -2a, b)$. Un vettore normale ad α è $(1, -3, -1)$, quindi il piano del fascio che proietta r su α è quello ortogonale ad α , cioè tale che $(a, -2a, b) \cdot (1, -3, -1) = 0$.

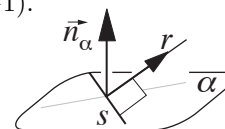
Si trova $7a - b = 0$. Per esempio $a = 1$ e $b = 7$, da $\begin{cases} x - 2y + 7z = 0 \\ x - 3y = z \end{cases}$ cui il piano $x - 2y + 7z = 0$. La retta è quindi:

Modo 2: L'intersezione tra r e α è $(0, 0, 0)$. Un altro punto di r è per esempio $P(2, 1, 0)$. La retta che proietta ortogonalmente P su α è $\{x = 2 + t; y = 1 - 3t; z = 0 - t\}$. L'intersezione tra questa retta e α è $(23/11, 8/11, -1/11)$. La retta proiezione cercata è quella passante per questo punto e per $(0, 0, 0)$, cioè $\{x = 23t; y = 8t; z = -t\}$ (è ovviamente la stessa trovata sopra).

549. La retta s è ortogonale sia a $\vec{n}_\alpha = (1, 2, 1)$ che a $\vec{v}_r = (1, 1, 1)$. Quindi come suo vettore direzionale possiamo prendere il vettore $\vec{v} = (1, 2, 1) \wedge (1, 1, 1) = (1, 0, -1)$.

Inoltre la retta passa per il punto di intersezione di α e r che è

$$P = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right). \quad \text{La retta è quindi } \begin{cases} x = 1/4 + t \\ y = 1/4 \\ z = 1/4 - t \end{cases}$$

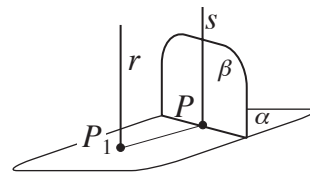


550. a. Un vettore direzionale di r è $\vec{v} = (2, 1, 3)$. La retta s è quindi $\{x = 2t; y = 1 + t; z = 3t\}$. Intersechiamo r con il piano α passante per $P(0, 1, 0)$ e ortogonale a r che è $2x + y + 3z - 1 = 0$.

Si trova il punto $P_1\left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{1}{7}\right)$. La distanza tra le due rette

parallele è uguale a quella tra i punti P e P_1 che è $d = \sqrt{6/7}$.

- b. Il piano β è quello che passa per P ed è ortogonale al vettore $(P_1 - P) = (4/7, -5/7, -1/7)$ e cioè $4x - 5y - z + 5 = 0$.



551. a. È il modulo del vettore $(C - A) \wedge (B - A) = (-2, 0, 1) \wedge (-1, -1, 3) = (1, 5, 2)$ e cioè $\sqrt{30}$.

- b. Come si vede dalla figura si deve avere

$$(S - A) = (B - A) + (C - A)$$

$$\text{Quindi } (S - A) = (-1, -1, 3) + (-2, 0, 1) = (-3, -1, 4)$$

$$\text{da cui } S = (2, 1, 0) + (-3, -1, 4) = (-1, 0, 4)$$



- c. Il volume del parallelepipedo è come noto il valore assoluto del prodotto misto dei tre vettori. Poniamo $D = (x_0, 0, 0)$. Si deve avere $|(B - A) \wedge (C - A) \cdot (D - A)| = 3$. Il vettore $(B - A)$ è già stato calcolato ed è $(-1, -5, -2)$, quindi: $|(-1 - 5, -2) \cdot (x_0 - 2, -1, 0)| = 3$ da cui $|-x_0 + 2 + 5| = 3 \quad x_0 = \pm 3 + 7$. Quindi i punti cercati sono $D_1 = (4, 0, 0)$ e $D_2 = (10, 0, 0)$.

552. a. Parametizziamo le due rette con due parametri diversi.

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3u - 2 \\ y = u \\ z = -u \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{I vettori direzionali sono rispettiva-} \\ \text{mente } \vec{v}_r = (1, 1, 0) \quad \vec{v}_s = (3, 1, -1) \\ \text{Vediamo se hanno punti comuni:} \end{array} \quad \begin{cases} t = 3u - 2 \\ t = u \\ 2 = -u \end{cases}$$

Evidentemente il sistema 3×2 in t, u non ha soluzioni, e i vettori direzionali non sono proporzionali, quindi le rette sono sghembe.

- b. Le rette incidenti entrambi sono quelle passanti per $(t, t, 2)$ e $(3u - 2, u, -u)$:

$$\begin{cases} x = t + (3u - 2 - t)v \\ y = t + (u - t)v \\ z = 2 + (-u - 2)v \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Il parametro } t \text{ scorre su } r, \text{ il parametro } u \text{ su } s, \text{ il} \\ \text{parametro } v \text{ sulle rette. Un loro vettore direzionale} \\ \text{è } (3u - 2 - t, u - t, -u - 2). \end{array}$$

- c. Imponiamo l'ortogonalità sia a r che a s . Dato che $\vec{v}_r = (1, 1, 0)$ e $\vec{v}_s = (3, 1, -1)$, allora:

$$\begin{cases} (3u - 2 - t, u - t, -u - 2) \cdot (1, 1, 0) = 0 \\ (3u - 2 - t, u - t, -u - 2) \cdot (3, 1, -1) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Si ricava il sistema} \\ \text{lineare in } t \text{ e } u: \end{array} \quad \begin{cases} 4u - 2t = 2 \\ 11u - 4t = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{che ha} \\ \text{la soluzione } t = -1; u = 0. \end{array}$$

- d. Imponiamo il parallelismo (non l'uguaglianza!) con il vettore $(1, 1, 1)$. Basta imporre che $(3u - 2 - t, u - t, -u - 2) \wedge (1, 1, 1) = (0, 0, 0)$, cioè $(2u - t + 2, -4u + t, 2u - 2) = (0, 0, 0)$. Si ricava il sistema lineare 3×2 in t e u a lato che ha una soluzione: $\begin{cases} 2u - t = -2 \\ -4u + t = 0 \\ 2u = 2 \end{cases}$ $t = 4; u = 1$. Per questi valori di t e u si ricava la retta cercata: $\{x = 1 + t; y = 1 + t; z = -1 + t\}$

- e. I valori di t e u ricavati in c. forniscono i punti di r e s giacenti sulla retta ortogonale a entrambe e che sono anche i punti di minima distanza. I punti sono $P_r(-1, -1, 2)$ e $P_s(-2, 0, 0)$.

La distanza tra r e s è la distanza tra P_r e P_s : $d = \sqrt{(-2 + 1)^2 + (0 + 1)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{6}$.

553. Le rette giacenti sul piano hanno vettore direzionale ortogonale al vettore normale del piano α che è $\vec{n} = (1, -2, 1)$.

- a. Il vettore di r_1 sarà il prodotto vettore tra $\vec{n}$ e il vettore $(1, 0, 0)$ (parallelo all'asse x) e cioè $(0, 1, 2)$. La retta è quindi:

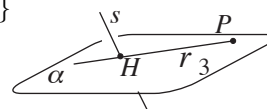
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

- b. Il vettore di r_2 sarà il prodotto vettore tra i vettori normali ai due piani $(1, -2, 1)$ e $(3, 0, -1)$ e cioè $(2, 4, 6)$ o anche $(1, 2, 3)$. La retta è quindi:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

- c. Determiniamo innanzitutto l'intersezione di s con il piano risolvendo il sistema lineare: $\{x - 3y = 0; z - 2 = 0; x - 2y + z = 0\}$

Si trova il punto $H(-6, -2, 2)$. La retta r_3 è perciò quella passante per $P(1, 0, -1)$ e per $H(-6, -2, 2)$ e cioè:

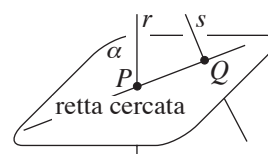


$$\begin{cases} x = 1 - 7t \\ y = 0 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

554. Parametizziamo r : $\{x = t ; y = t ; z = 3t + 2\}$. Quindi $\vec{v}_r = (1, 1, 3)$. Le rette cercate giacciono tutte sul piano α passante per $P(0, 0, 2)$ e ortogonale a r che è $x + y + 3z - 6 = 0$.

- a. La retta cercata, giacendo sul piano α , intersecherà s nello stesso punto in cui s incontra α . Il punto di intersezione tra s e α è il punto $Q(6/5, 6/5, 6/5)$.

La retta cercata è quindi quella passante per $P(0, 0, 2)$ e per $Q(6/5, 6/5, 6/5)$, cioè $\{x = 6t/5 ; y = 6t/5 ; z = 2 - 4t/5\}$.



- b. La retta cercata è ortogonale sia a r che s , quindi come vettore direzionale per essa possiamo prendere $\vec{v}_s \wedge \vec{v}_r = (1, 1, 1) \wedge (1, 1, 3) = (2, -2, 0)$ o anche $(1, -1, 0)$. Inoltre passa per $(0, 0, 2)$. La retta è $\{x = t ; y = -t ; z = 2\}$.

- c. Chiamiamo p le rette cercate. Per calcolare la distanza tra p e s , si calcola la distanza di un punto di p (l'unico che conosciamo è $(0, 0, 2)$) dal piano passante per s e parallelo a p . Il piano è del tipo $a(x - y) + b(y - z) = 0$. Senza avere ancora il piano, dato che non conosciamo p , possiamo però imporre uguale a 1 la sua distanza da $(0, 0, 2)$. Si ha:

$$\frac{|a(x - y) + b(y - z)|}{\sqrt{a^2 + (-a + b)^2 + b^2}} = 1 \text{ per } (x, y, z) = (0, 0, 2), \text{ cioè } a^2 - ab - b^2 = 0, \text{ da cui } a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} b.$$

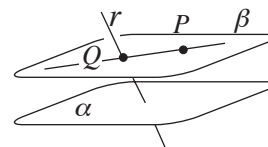
Per esempio $a = 1 \pm \sqrt{5}$ e $b = 2$. I piani trovati sono paralleli a p . Le rette p giacciono su piani paralleli a questi e precisamente sui piani passanti per $(0, 0, 2)$ e paralleli ai piani trovati.

Inoltre giacciono sempre sul piano $x + y + 3z - 6 = 0$ $\begin{cases} x + y + 3z = 6 \\ (1 \pm \sqrt{5})(x - y) + 2(y - z + 2) = 0 \end{cases}$

Le rette sono quindi:

555. I punti la cui proiezione sulla retta s è $(0, 0, 0)$ giacciono tutti sul piano passante per $(0, 0, 0)$ e ortogonale a s che è $2x + y - 2z = 0$. Intersecando questo piano con la retta r si trova il punto è $(2, 2, 3)$ che è il punto cercato.

556. Le rette giacciono tutte sul piano β passante per P e parallelo al piano dato che è il piano $x + 3y - z - 8 = 0$. La retta r e il piano β si intersecano nel punto $Q(9, 3, 10)$. La retta cercata deve intersecare r proprio nel punto Q . La retta è quindi quella passante per P e Q , cioè: $\{x = 1 + 8t ; y = 2 + t ; z = -1 + 11t\}$.



557. a. Parametizziamo r e s con due parametri diversi:

$$r \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad s \begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = 2t - 2 \\ z = t \end{cases} \quad \text{Quindi:} \quad \begin{matrix} \vec{v}_r = (1, 0, 1) \\ \vec{v}_s = (2, 2, 1) \end{matrix} \quad \text{Il sistema in } t \text{ e } u \quad \begin{cases} t + 1 = 2u - 5 \\ 1 = 2u - 2 \\ t = u \end{cases}$$

non ha soluzioni. Inoltre le rette non sono parallele perché $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ non sono proporzionali, quindi le rette sono sghembe.

- b. I piani contenenti r sono $a(x - z - 1) + b(y - 1) = 0$ e hanno vettore normale $(a, b, -a)$. Tra essi quello parallelo a s è tale che $(a, b, -a) \cdot (2, 2, 1) = 0$, cioè $a + 2b = 0$, per esempio $a = 2 ; b = -1$, da cui il piano $2x - y - 2z - 1 = 0$. Un punto di s è $(-5, -2, 0)$, quindi la distanza d tra r e s è quella tra il punto e il piano, cioè $d = 3$.

- c. Le rette incidenti entrambi hanno come vettore direzionale

$$(t + 1, 1, t) - (2u - 5, 2u - 2, u) = (t - 2u + 6, -2u + 3, t - u)$$

Occorre che questo vettore sia ortogonale a $\vec{v}_r$ e a $\vec{v}_s$, cioè:

$$\begin{cases} (t - 2u + 6, -2u + 3, t - u) \cdot (1, 0, 1) = 0 \\ (t - 2u + 6, -2u + 3, t - u) \cdot (2, 2, 1) = 0 \end{cases} \quad \text{Si ricava il sistema} \quad \begin{cases} 2t - 3u = -6 \\ 3t - 9u = -18 \end{cases}$$

che ha la soluzione $t = 0 ; u = 2$. Per questi valori di t e u si ricavano i punti di r e s che definiscono la retta ortogonale a entrambe: $P_r(1, 1, 0)$, $P_s(-1, 2, 2)$ e la retta che è $\{x = 1 - 2t ; y = 1 + t ; z = 2t\}$.

- d. Il piano è parallelo al piano trovato in b. e passante per il punto $M = (0, 3/2, 1)$ che è il punto medio tra P_r e P_s . Il piano è $2x - y - 2z + 7/2 = 0$.

- e. I piani contenenti la retta r sono $a(x - z - 1) + b(y - 1) = 0$ e hanno vettore normale $(a, b, -a)$. Perché la proiezione di P_1 su α abbia distanza 1 da P_s occorre che sia uguale a 1

la distanza di P_s da α . Si ha: $\frac{|a(-1 - 2 - 1) + b(2 - 1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + a^2}} = 1$. Si ricava $14a^2 - 8ab = 0$ o

anche $a(7a - 4b) = 0$. Quindi un piano si ottiene per esempio per $a = 0$ e $b = 1$ ed è $y = 1$. L'altro per esempio per $a = 4$ e $b = 7$ ed è $4x + 7y - 4z - 11 = 0$.

- f. I punti di r sono $(t + 1, 1, t)$. Per misurarne la distanza da s scriviamo i piani passanti per ciascuno di questi punti e ortogonali ad s : $2(x - t - 1) + 2(y - 1) + (z - t) = 0$.

Intersechiamo questi piani con s facendo attenzione che il parametro che scorre su s abbia un nome diverso da t . La retta s è $\{x = 2u - 5; y = 2u - 2; z = u\}$. Sostituendo si ha: $9u - 3t - 18 = 0$. Dato che stiamo ora cercando un punto di s , l'equazione va risolta rispetto a u : $u = (t + 6)/3$. Sostituendo in s si ottiene il punto dipendente da t che è la proiezione ortogonale di $(t + 1, 1, t)$ su s . Il punto è $((2t - 3)/3, (2t + 6)/3, (t + 6)/3)$. Poniamo uguale

a 6 la distanza tra i due punti: $\sqrt{\left(\frac{2t-3}{3} - (t+1)\right)^2 + \left(\frac{2t+6}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{t+6}{3} - t\right)^2} = 6$

da cui $t^2 = 27$ e $t = \pm 3\sqrt{3}$. Pertanto i punti di r cercati sono $(\pm 3\sqrt{3} + 1, 1, \pm 3\sqrt{3})$.

558. Il punto intersezione tra r e α è $P(2, 0, 4)$. Un vettore direzionale per r è $\vec{v}_r = (1, 1, 2)$, un vettore normale ad α è $\vec{n}_\alpha = (1, 1, 0)$.

- a. La retta che forma angolo massimo è quella ortogonale a r . Passa per P e ha vettore direzionale ortogonale sia a $\vec{v}_r$ che a $\vec{n}_\alpha$, per esempio $(1, -1, 0)$. È quindi: $\{x = 2 + t; y = -t; z = 4\}$.

- b. La retta che forma angolo minimo è la proiezione ortogonale di r sul piano. Scriviamo tutti i piani contenenti r : $a(x - y - 2) + b(z - 2x) = 0$. Hanno vettore normale $(a - 2b, -a, b)$. Quello tra essi che proietta r si ottiene imponendo che $(a - 2b, -a, b) \cdot (1, 1, 0) = 0$, per esempio per $a = 1$ $b = 0$. Il piano è quindi $x - y = 2$. Quindi la retta è $\{x - y = 2; x + y = 2\}$ che si può scrivere anche $\{x = 2; y = 0\}$.

- c. Sia (a, b, c) il vettore direzionale delle rette cercate. Perché giacciono sul piano occorre che $(a, b, c) \cdot (1, 1, 0) = 0$, cioè che $b = -a$, quindi il vettore è $(a, -a, c)$. Perché si abbia $\theta = \pi/3$, occorre che $\frac{|(a, -a, c) \cdot (1, 1, 2)|}{\sqrt{a^2 + a^2 + c^2} \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$, cioè $6a^2 - 5c^2 = 0$. Per esempio $a = \pm\sqrt{5}$ e $c = \sqrt{6}$.

Le rette passano per $P(2, 0, 4)$ e sono quindi: $\{x = 2 \pm \sqrt{5}t; y = \mp \sqrt{5}t; z = 4 + \sqrt{6}t\}$.

559. Osserviamo innanzitutto che r ha vettore direzionale $\vec{v}(2, 1, 2)$ e che α ha vettore normale $\vec{n}(3, -2, 1)$.

- a. Proiettiamo P su r . Per questo occorre il piano passante per P e ortogonale a r che è $2x + y + 2z = 6$; intersecandolo con r si trova la proiezione di P su r che è il punto $M(16/9, 8/9, 7/9)$; il punto simmetrico è $P' = 2M - P = (23/9, 16/9, -4/9)$.

- b. Proiettiamo P su α . Per questo occorre la retta passante per P e ortogonale ad α che è $\{x = 1 + 3t; y = -2t; z = 2 + t\}$; intersecandola con α si trova la proiezione di P su α che è $N(-1/14, 10/14, 23/14)$; il punto simmetrico è $P'' = 2N - P = (-8/7, 10/7, 9/7)$.

- c. È semplicemente $O' = 2P - O = (2, 0, 4)$.

- d. I punti di r si ottengono scrivendo una rappresentazione parametrica di r e sono $(2t, t, 2t - 1)$ al variare di t . Il punto simmetrico di $(2t, t, 2t - 1)$ rispetto a $P(1, 0, 2)$ è $(2 - 2t, -t, 5 - 2t)$. Questi sono tutti e soli i punti di r' . La retta r' è pertanto: $\{x = 2 - 2t; y = -t; z = 5 - 2t\}$.

- e. L'intersezione di r con α è il punto $I(1/3, 1/6, -2/3)$. Prendiamo un punto qualunque di r per esempio $R(0, 0, -1)$. La proiezione di R su α è il punto $N(3/14, -2/14, -13/14)$. Il simmetrico di R rispetto ad α è quindi $R' = 2N - R = (3/7, -2/7, -6/7)$.

Allora r'' è la retta IR' e cioè $\{x = 1/3 - 4t; y = 1/6 + 19t; z = -2/3 + 8t\}$.

- f. Un punto dell'asse x è $(u, 0, 0)$. La retta r ha vettore direzionale $(2, 1, 2)$.

Il punto simmetrico di $(u, 0, 0)$ rispetto a r è (x, y, z) tale che:

- $\frac{(x, y, z) + (u, 0, 0)}{2} \in r$, cioè $\left\{ \frac{x+u}{2} = 2 \frac{y}{2} = \frac{z}{2} + 1 \right\} \quad \{x - 2y = u; 2y - z = 2\}$
- $\left((x, y, z) - (u, 0, 0) \right) \cdot (2, 1, 2) = 0$, cioè $2(x - u) + y + 2z = 0$.

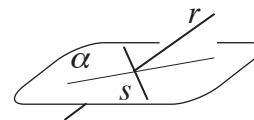
Le tre equazioni trovate formano un sistema lineare 3×3 in x, y, z dipendente da u la cui so-

luzione è $\{x = (8 - u)/9; y = (4 + 4u)/9; z = (8u - 10)/9\}$: questo è il punto simmetrico di $(u, 0, 0)$ e quindi questa è una rappresentazione parametrica della retta simmetrica x' .

g. Dato che α contiene $O(0, 0, 0)$ e il simmetrico di O rispetto a P è $(2, 0, 4)$ (trovato in c.), allora il piano α' è il piano parallelo ad α e passante per $O'(2, 0, 4)$: $3x - 2y + z = 10$.

h. Consideriamo la retta s giacente su α e ortogonale e incidente a r .

La retta s è la retta passante per $I(1/3, 1/6, -2/3)$ e avente vettore direzionale $\vec{v}_r \wedge \vec{n}_\alpha = (5, 4, -7)$. Ogni punto di s , che è un punto di α , ha come simmetrico rispetto a r sempre un punto di s . Quindi s giace anche sul piano simmetrico α'' .



Prendiamo ora un punto qualunque di α che non stia su r , per esempio $O(0, 0, 0)$. Il simmetrico di O rispetto a r si può calcolare come in a. ed è $Q(8/9, 4/9, -10/9)$. Allora α'' è il piano contenente s e Q e cioè: $x - 10y - 5z - 2 = 0$.

i. Il simmetrico di $(1, 0, 0)$ (che è un punto di $z = 0$) rispetto ad α è $Q(-2/7, 6/7, -3/7)$. Il piano β è il piano del fascio generato da α e $z = 0$ che contiene Q . La sua equazione è: $3x - 2y - 6z = 0$.

560. Simmetrici di P_0 sono risp. $(-x_0, -y_0, -z_0)$; $(-x_0, -y_0, z_0)$; $(x_0, y_0, -z_0)$

Simmetriche di r sono risp. $\{-x(y), -y(t), -z(t)\}$; $\{-x(y), -y(t), z(t)\}$; $\{x(y), y(t), -z(t)\}$.

Simmetrici di α sono risp. $ax + by + cz + d = 0$; $-ax - by + cz = d$; $ax + by - cz = d$.

561. La retta ha vettore direzionale $\vec{v}(1, 2, -1)$, quindi i piani cercati hanno vettore normale ortogonale a $\vec{v}$. I vettori ortogonali a $\vec{v}$ sono (l, m, n) tali che $(l, m, n) \cdot (1, 2, -1) = 0$, cioè $(-2m + n, m, n)$. I piani sono pertanto $(-2m + n)(x - 0) + m(y - 2) + n(z - 0) = 0$. Ha senso calcolarne la distanza da r , dato che sono retta e piano sono paralleli. Per far questo basta calcolare la distanza di un punto qualunque di r , per esempio $(0, 0, 0)$ da essi e imporla, come richiesto, uguale a 1.

$$\text{dist} = \frac{|(-2m + n)(0 - 0) + m(0 - 2) + n(0 - 0)|}{\sqrt{(-2m + n)^2 + m^2 + n^2}} = 1$$

Si ricava l'equazione $m^2 - 4mn + 2n^2 = 0$ che, risolta per esempio rispetto a m , ha le due soluzioni $m = (2 \pm \sqrt{2})n$. Ponendo $n = 1$ si ricavano i due piani:

$$(-2(2 \pm \sqrt{2}) + 1)x + (2 \pm \sqrt{2})(y - 2) + z = 0.$$

562. a. Se esiste, la retta cercata è complanare a r . Dato che passa per P , allora deve giacere sul piano α contenente P e r che è $x = 2y - 1$.

Analogamente, se esiste, è complanare a s e deve giacere sul piano β contenente P e s che è $2x - y + 3z - 4 = 0$.

La retta quindi dev'essere $\begin{cases} x = 2y - 1 \\ 2x - y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$. Ma va verificato che sia incidente sia r che s , dato che la complanarità non ne assicura l'incidenza. Dato che, come si calcola, incontra r in $(-3, 1, 3)$ e s in $(2, 1/2, 1/6)$, allora è proprio la retta cercata.

b. Come in a. si determinano il piano $\alpha: x - 2y + 3z - 2 = 0$ contenente r e P e il piano $\beta: 2x - y + 3z - 4 = 0$ contenente s e P , ma la retta $\begin{cases} x - 2y + 3z - 2 = 0 \\ 2x - y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$, come si verifica immediatamente, è parallela a r , non incidente. Pertanto la retta cercata non esiste.

Sfere e circonferenze nello spazio

571. a. Basta completare i quadrati:

$$x^2 + (y^2 + 4y + 4) + \left(z^2 - 3z + \frac{9}{4}\right) = 4 + \frac{9}{4} \quad x^2 + (y + 2)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

Quindi il centro è $C\left(0, -2, \frac{3}{2}\right)$ e il raggio è $R = \frac{5}{2}$.

b. Occorre calcolare la distanza tra il centro C della sfera e il piano α .

$$d = \frac{|x + 2y + z - 2|}{\sqrt{6}} = \frac{|0 + 2(-2) + (3/2) - 2|}{\sqrt{6}} = \frac{|-9/2|}{\sqrt{6}} = \frac{9}{2\sqrt{6}}$$

$$\text{Confrontiamo ora } d \text{ con } R: \quad d = \frac{9}{2\sqrt{6}} \quad R = \frac{5}{2} \quad \text{Eleviamo a quadrato: } d^2 = \frac{81}{24} \quad R^2 = \frac{25}{4}$$

Dato che $d^2 < R^2$, allora $d < R$ quindi l'intersezione è una circonferenza.

La cosa più semplice da scrivere è l'asse che è la retta a passante per C e ortogonale ad α :

Intersecando l'asse con il piano α si trova il centro:

$(t) + 2(-2 + 2t) + (3/2 + t) = 2$ da cui $t = 3/4$, quindi il centro della circonferenza è $C_1(3/4, -1/2, 9/4)$.

$$a: \begin{cases} x = t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3/2 + t \end{cases}$$

Infine il raggio R_1 della circonferenza si trova dalla relazione

$R_1^2 = R^2 - d^2$, quindi:

$$R_1 = \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{81}{24}} = \sqrt{\frac{23}{8}}$$

- c. Il piano cercato è del tipo $x + 2y + z + k = 0$ e occorre che il piano abbia distanza R dal centro della sfera, quindi:

$$\frac{|x + 2y + z + k|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{2} \quad \text{Sostituiamo } (x, y, z) \text{ con } (0, -2, 3/2) \quad \frac{|-4 + 3/2 + k|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{2} \quad |k - 5/2| = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

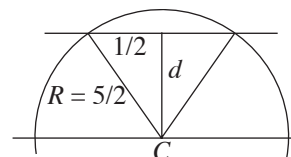
Quindi $k = \frac{5}{2}(1 \pm \sqrt{6})$ e i piani sono $x + 2y + z + \frac{5}{2}(1 \pm \sqrt{6}) = 0$

- d. Come si vede dallo schizzo, occorre che il piano abbia distanza d dal centro della sfera, dove

$$d^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2, \text{ cioè } d = \sqrt{6}.$$

Il piano cercato è del tipo $x + 2y + z + k = 0$ e la sua distanza da C è come nel conto fatto sopra:

$$d = \frac{|-4 + 3/2 + k|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \quad |k - 5/2| = 6 \quad k = 5/2 \pm 6.$$



I piani quindi sono due, un piano (segno $+$) è $x + 2y + z + 17/2 = 0$, l'altro (segno $-$) è $x + 2y + z - 7/2 = 0$

- e. Intersechiamo la sfera con la retta sostituendo le equazioni parametriche della retta nella sua equazione: $t^2 + t^2 + t^2 + 4t - 3t = 0$ da cui $3t^2 + t = 0$ e $t_1 = -1/3$; $t_2 = 0$.

Quindi i due punti sono $P_1 = (-1/3, -1/3, -1/3)$ $P_2 = (0, 0, 0)$.

Il piano tangente alla sfera in P_1 ha come vettore normale

$$(C - P_1) = \left(0, -2, \frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{11}{6}\right) \quad \text{Quindi il piano è:}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right)\left(y + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{11}{6}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right) = 0 \text{ o anche } 2x - 10y + 11z + 1 = 0.$$

Il piano tangente alla sfera in P_2 ha come vettore normale

$$(C - P_2) = (0, -2, 3/2) - (0, 0, 0) = (0, -2, 3/2)$$

Quindi il piano è $-2y + (3/2)z = 0$ o anche $4y - 3z = 0$.

Si può notare che, essendo il piano tangente alla sfera in $(0, 0, 0)$, la sua equazione è la parte di primo grado dell'equazione della sfera.

- f. Intersechiamo la sfera con le rette sostituendo le equazioni parametriche nella sua equazione: $(t + 1)^2 + (kt)^2 + 9 + 4(kt) - 3(3) = 0$. Riordinando rispetto a t :

$$(1 + k^2)t^2 + (2 + 4k)t + 1 = 0.$$

Al variare di k , le soluzioni dell'equazione di secondo grado in t forniscono i punti di intersezione della retta con la sfera.

La retta sarà incidente se le soluzioni sono due, tangente se le soluzioni sono una (con molteplicità 2), esterna se non ha soluzioni (o meglio se sono non reali).

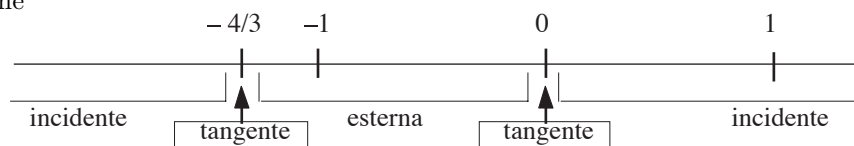
Per sapere in quale situazione ci troviamo esaminiamo il discriminante dell'equazione di secondo grado: $\Delta = (2 + 4k)^2 - 4(1 + k^2) = 12k^2 + 16k$.

Il discriminante è nullo se $k = 0$ o $k = -4/3$.

Il discriminante è positivo se $k < -4/3$ o $k > 0$.

Il discriminante è negativo se $-4/3 < k < 0$.

In conclusione



572. a. Il centro della circonferenza è la proiezione ortogonale di P su r . Per determinarla occorre il piano α perpendicolare a r e passante per P .

Scriviamo r in forma parametrica. Da essa si ricava subito che $(1, 0, 1)$ è un vettore parallelo a r e sarà anche il vettore normale del piano α che è quindi $1(x - 0) + 0(y - 2) + 1(z - 1) = 0$ cioè $x + z = 1$.

Intersechiamo r con α : $t + (t - 3) = 1$ da cui $t = 2$ e si ottiene da r il centro $C(2, 1, -1)$.

Il raggio della circonferenza è la distanza tra P e r :

$$\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, C) = |(0, 2, 1) - (2, 1, -1)| = |(-2, 1, 2)| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

Il piano di giacenza è proprio α .

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 9 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Una rappresentazione cartesiana di γ è perciò:

- b. La retta è ortogonale al vettore $(P - C) = (-2, 1, 2)$. Inoltre deve giacere sul piano α .

Quindi un vettore parallelo a t può essere $(P - C) \wedge \vec{n}_\alpha$

$$\begin{pmatrix} P - C \\ \vec{n}_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (1, 4, -1) \quad \text{Da qui la retta } t \text{ che deve passare per } P(0, 2, 1) \quad t \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 2 + 4t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

- c. Il centro delle sfere è un punto dell'asse cioè del tipo $A = (t, 1, t - 3)$.

Il raggio si può calcolare come la distanza tra A e un qualunque punto di γ , per esempio $P = (0, 2, 1)$.

$$|(t, 1, t - 3) - (0, 2, 1)| = |(t, -1, t - 4)| = \sqrt{t^2 + 1 + t^2 - 8t + 16} = \sqrt{2t^2 - 8t + 17}$$

Imponiamo che il raggio sia 9, quindi: $2t^2 - 8t - 64 = 81$ da cui $2t^2 - 8t - 64 = 0$. Si trovano $t_1 = 8$ e $t_2 = -4$.

Per $t_1 = 8$ si ha il centro $(8, 1, 5)$ e la sfera $(x - 8)^2 + (y - 1)^2 + (z - 5)^2 = 81$

Per $t_2 = -4$ si ha il centro $(-4, 1, -7)$ e la sfera $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 + (z + 7)^2 = 81$

- d. Come sopra il raggio è $\sqrt{2t^2 - 8t + 17}$. Perché la sfera sia tangente al piano $x = 5$ occorre che il raggio sia la distanza tra A e il piano $x = 5$.

La distanza tra A e il piano $x = 5$ è $|t - 5|$, da cui le eguaglianze:

$$\sqrt{2t^2 - 8t + 17} = |t - 5| \Rightarrow 2t^2 - 8t + 17 = t^2 - 10t + 25 \Rightarrow t^2 + 2t - 8 = 0$$

L'ultima equazione ha le soluzioni $t = -4, 2$, pertanto le sfere hanno centri rispettivamente $(-4, 1, -7)$ e $(2, 1, -1)$ e raggi $|-4 - 5| = 9$ e $|2 - 5| = 3$. Le sfere sono quindi:

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 + (z + 7)^2 = 81 \quad (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 9$$

La prima sfera è una di quelle già trovate in c.

573. a. Calcoliamo le tre distanze:

$$\text{dist}(C_0, A) = |(A - C_0)| = |(2, -1, -1)| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{dist}(C_0, B) = |(B - C_0)| = |(1, 2, 1)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{dist}(C_0, C) = |(C - C_0)| = |(1, -2, -1)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

La sfera esiste perché le tre distanze sono uguali. La rappresentazione è immediata dato che abbiamo centro e raggio: $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 6$

- b. La circonferenza può essere rappresentata come intersezione tra la sfera e il piano contenente i tre punti. Il piano ha come vettore normale per esempio $(A - B) \wedge (A - C)$.

$$\begin{pmatrix} A - B \\ A - C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3, -2 \\ 1, 1, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = (2, -2, 4) \text{ o anche } \vec{n} = (1, -1, 2).$$

Quindi il piano è $1(x - 2) - 1(y - 0) + 2(z - 0) = 0$ $x - y + 2z - 2 = 0$

La circonferenza è $\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 6 \\ x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$

- c. L'asse è la retta passante per C_0 e ortogonale ad α : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Il centro C_1 si trova intersecando α con il piano:

$$(t) - (1 - t) + 2(1 + 2t) = 2 \quad 6t - 1 = 0 \quad t = 1/6 \Rightarrow C_1 = (1/6, 5/6, 4/3)$$

Il raggio R_1 si ottiene per esempio dalla relazione $R_1^2 = R^2 - \text{dist}^2(C_1, C_0)$

$$\text{Ma } \text{dist}^2(C_1, C_0) = \left| (0, 1, 1) - \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3} \right) \right|^2 = \left| \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3} \right) \right|^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{9} = \frac{1}{6}$$

Quindi $R_1^2 = 6 - 1/6 = 35/6$

- d. La retta tangente è ortogonale al vettore $(A - C_0) = (2, -1, -1)$ e, dato che giace sul piano della circonferenza, è anche ortogonale al vettore normale del piano $\vec{n} = (1, -1, 2)$. Quindi un suo vettore direzionale si può ottenere dal prodotto vettoriale

$$(A - C_0) \wedge \vec{n} \quad \text{con} \quad (A - C_0) = (2, -1, -1) \quad \vec{n} = (1, -1, 2)$$

$$\frac{(A - C_0)}{\vec{n}} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{v} = (-3, -5, -1) \quad \text{La retta tangente è: } \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -5t \\ z = -t \end{cases}$$

574. a. I centri delle sfere sono punti della retta passante per $(1, 1, 0)$ e ortogonale a $x = y$. La retta è $\{x = 1 + t; y = 1 - t; z = 0\}$ e quindi i centri sono i punti $C(1 + t, 1 - t, 0)$. Il raggio delle sfere è la distanza tra C e $(1, 1, 0)$ e cioè $\sqrt{2} |t|$. Le sfere hanno quindi equazioni: $(x - (1 + t))^2 + (y - (1 - t))^2 + z^2 = 2t^2$.

- b. Basta imporre $2t^2 = 2$. Si ottiene $t = \pm 1$. Le sfere sono:

$$\text{Per } t_1 = 1 \quad (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 2$$

$$\text{Per } t_2 = -1 \quad x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 2.$$

- c. Bisogna che la distanza tra il centro $(1 + t, 1 - t, 0)$ e il piano $x + z = 3$ sia $\sqrt{2} |t|$, quindi si ha: $\frac{|x + z - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|(1 + t) + (0) - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|t - 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} |t|$ da cui $t - 2 = 2t$ e $t - 2 = -2t$.

Si ottengono $t_1 = -2$; $t_2 = 2/3$. Le sfere sono quindi:

$$\text{Per } t_1 = -2 \quad (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 8$$

$$\text{Per } t_2 = 2/3 \quad (x - 5/3)^2 + (y - 1/3)^2 + z^2 = 8/9$$

575. Un punto generico della retta è $(t, t, 0)$. La retta è esterna perché sostituendo nell'equazione della sfera si ha $8t^2 - 4t + 1 = 0$ e questa equazione di secondo grado non ha soluzioni.

La sfera è $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2z + 1/4 = 0$ o anche, completando i quadrati:

$$(x^2 - x + 1/4) + y^2 + (z^2 + 2z + 1) = -1/4 + 1/4 + 1, \text{ quindi ha centro } (1/2, 0, -1) \text{ e raggio } 1.$$

I piani del fascio sono $a(x - y) + bz = 0$. Per essere tangenti a S occorre che la loro distanza dal centro della sfera sia pari al raggio.

$$\text{Quindi } \frac{|a(x - y) + bz|}{\sqrt{a^2 + a^2 + b^2}} = 1 \text{ per } (x, y, z) = (1/2, 0, -1), \text{ cioè } \left| \frac{1}{2}a - b \right| = \sqrt{2a^2 + b^2}.$$

Elevando a quadrato i due termini positivi si ricava l'equazione omogenea in a, b di secondo grado $7a^2 + 4ab = 0$ che ha le soluzioni $[a = 0; b \text{ qualunque}]$ $[a = (-4/7)b]$.

Questi due insiemi di soluzioni danno luogo a due piani.

Per $a = 0$ e per esempio $b = 1$ si ha il piano $z = 0$,

Ponendo per esempio $a = 4$ e quindi $b = -7$ si ha il piano $4x - 4y - 7z = 0$.

576. Osserviamo innanzitutto che il piano α della circonferenza è il piano che contiene C e r .

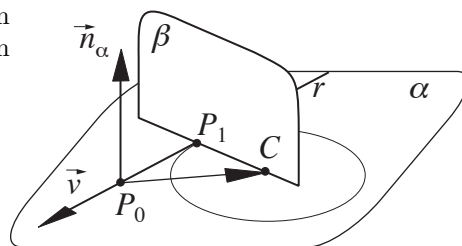
Un vettore direzionale per r è $\vec{v} = (2, 1, -1)$. Un punto di r è per esempio $P_0 = (1, 1, 0)$, quindi un vettore normale al piano α è $\vec{v} \wedge (C - P_0)$ dove

$$(C - P_0) = (0, 1, 2) - (1, 1, 0) = (-1, 0, 2)$$

$$\vec{v} \wedge (C - P_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (2, -3, 1) = \vec{n}_\alpha$$

$$\text{Il piano } \alpha \text{ è } 2(x - 0) - 3(y - 1) + 1(z - 2) = 0$$

$$\text{o anche } \alpha: 2x - 3y + z + 1 = 0$$



Per trovare il raggio della circonferenza occorre calcolare la distanza di C da r . Per questo occorre il piano β passante per C e ortogonale a r che è $2(x - 0) + 1(y - 1) - 1(z - 2) = 0$, cioè $2x + y - z + 1 = 0$.

Intersechiamo il piano trovato sopra con r : $2(1 + 2t) + (1 + t) - (-t) + 1 = 0$, da cui $6t + 4 = 0$. Per $t = -2/3$ otteniamo il punto $P_1(-1/3, 1/3, 2/3)$, proiezione ortogonale di C su r , che è anche il punto di tangenza.

Il raggio è la distanza di C da r cioè la distanza tra C e P_1 :

$$R = \sqrt{(0 + 1/3)^2 + (1 - 1/3)^2 + (2 - 2/3)^2} = \sqrt{7/3}.$$

$$\text{Ora possiamo scrivere la circonferenza: } \begin{cases} 2x - 3y + z + 1 = 0 \\ (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 7/3 \end{cases}$$

577. a. Scriviamo r in forma parametrica: $\{x = t + 1 ; y = 1 - 2t ; z = t\}$. Quindi i vettori direzionali sono: $\vec{v}_r(1, -2, 1)$ e $\vec{v}_s(1, 0, -1)$. Le rette sono quindi ortogonali. Per vedere se sono sghembe confrontiamole, dopo aver cambiato nome al parametro di s :

$$\begin{cases} t + 1 = u \\ 1 - 2t = 2 \\ t = 3 - u \end{cases} \quad \begin{cases} t - u = -1 \\ 2t = -1 \\ t + u = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} t - u = -1 \\ 2t = -1 \\ 2t = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Il sistema non ha soluzioni} \\ \text{e le rette non sono parallele,} \\ \text{quindi sono sghembe.} \end{array}$$

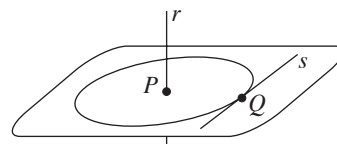
Per calcolare la distanza, scriviamo i punti di minima distanza imponendo che il vettore rappresentato dal segmento orientato di estremi $(t + 1, 1 - 2t, t)$ e $(u, 2, 3 - u)$ sia ortogonale a entrambe. Si deve perciò avere:

$$\begin{cases} (t + 1 - u, 1 - 2t - 2, t - 3 + u) \cdot (1, -2, 1) = 0 \\ (t + 1 - u, 1 - 2t - 2, t - 3 + u) \cdot (1, 0, -1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5t = 0 \\ 4 - 2u = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ u = 2 \end{cases}$$

Quindi per $t = 0$ si ha $P(1, 1, 0)$ su r e per $u = 2$ si ha $Q(2, 2, 1)$ su s . La loro distanza è $\sqrt{3}$ che è anche la distanza tra le due rette.

- b. La circonferenza esiste perché la retta tangente è ortogonale all'asse. Il centro della circonferenza è P , il raggio è la distanza tra le rette cioè $\sqrt{3}$. Il piano della circonferenza è il piano passante per P e ortogonale a r cioè $x - 2y + z + 1 = 0$. Quindi una sua rappresentazione cartesiana è:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$



578. I punti di r sono $(t, t, 1 + t)$. Sono centri della sfera cercata se la loro distanza da α è 2.

Quindi $\frac{|(t) - 3(t)|}{\sqrt{10}} = 2$. Si ricava $t = \pm\sqrt{10}$, quindi i centri sono $(\pm\sqrt{10}, \pm\sqrt{10}, 1 \pm \sqrt{10})$.

Le sfere cercate hanno equazioni: $(x \pm \sqrt{10})^2 + (y \pm \sqrt{10})^2 + (z - 1 \pm \sqrt{10})^2 = 4$

579. a. Basta scrivere i vettori direzionali dei cateti:

$$(B - A) = (2, 1, 0) - (1, 0, 2) = (1, 1, -2) \quad (A - C) = (1, 0, 2) - (0, -1, 1) = (1, 1, 1)$$

Si ha: $(B - A) \cdot (C - A) = (1, 1, -2) \cdot (1, 1, 1) = 1 + 1 - 2 = 0$, quindi il triangolo è rettangolo.

- b. Il punto H è sull'ipotenusa BC . L'ipotenusa ha rappresentazione parametrica:

$$\text{ip} \begin{cases} x = 2 + (0 - 2)t \\ y = 1 + (-1 - 1)t \\ z = 0 + (1 - 0)t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad \text{e ha vettore direzionale } \vec{v}_{ip} = (-2, -2, 1).$$

Il punto H è del tipo $H = (2 - 2t, 1 - 2t, t)$ e si deve avere: $(H - A) \cdot \vec{v}_{ip} = 0$, cioè $(2 - 2t - 1, 1 - 2t - 0, t - 2) \cdot (-2, -2, 1) = 0 \quad -2 + 4t - 2 + 4t + t - 2 = 0$.

Si ricava $t = 2/3$. Quindi $H = (2/3, -1/3, 2/3)$.

La misura dell'altezza è $\text{dist}(A, H) = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{9}} = \sqrt{2}$

- c. I due vettori $(B - A) = (1, 1, -2)$ e $(A - C) = (1, 1, 1)$ sono paralleli al piano α , per cui un vettore normale ad α sarà un qualunque vettore non nullo ortogonale a entrambi, cioè

$$\vec{n} = (a, b, c) \text{ con } (a, b, c) \cdot (1, 1, -2) = 0 \text{ e } (a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = 0, \text{ cioè } \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

Una soluzione non nulla del sistema omogeneo è per esempio $(1, -1, 0)$, quindi il piano (che passa per esempio per A) è $1(x - 1) - 1(y - 0) + 0(z - 2) = 0$, cioè $\alpha: x - y = 1$

- d. La circonferenza è circoscritta a un triangolo rettangolo, quindi il centro sarà il punto medio dell'ipotenusa, cioè $C_0 = \frac{B + C}{2} = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$. Il raggio è la metà della lunghezza dell'ipotenusa, cioè $r = \frac{1}{2} \text{dist}(BC) = \frac{\sqrt{(2 - 0)^2 + (1 + 1)^2 + (0 - 1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$.

La circonferenza si può quindi ottenere come intersezione della sfera di centro C_0 e raggio r con il piano α contenente i tre punti.

Quindi una sua rappresentazione cartesiana è

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1/2)^2 = 9/4 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

e. La retta $\overline{AC}$ è $\begin{cases} x = 0 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Il punto A_1 quindi è del tipo $(t, t-1, t+1)$. Per formare

un quadrato, occorre che $\text{dist}(A, A_1) = \text{dist}(A, B) = \sqrt{6}$

Quindi $\text{dist}(A, A_1) = \sqrt{(t-1)^2 + (t-1-0)^2 + (t+1-2)^2} = \sqrt{6}$ da cui $3(t-1)^2 = 6$. L'equazione di secondo grado $(t-1)^2 = 2$ ha le due soluzioni $t = 1 \pm \sqrt{2}$.

La retta $\overline{AC}$ è stata parametrizzata in modo che si ottenga C per $t = 0$ e A per $t = 1$, quindi per ottenere il punto A_1 che è oltre A , occorrerà un valore del parametro maggiore di 1, quindi la soluzione cercata è $t = 1 + \sqrt{2}$. In conclusione: $A_1 = (1 + \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$

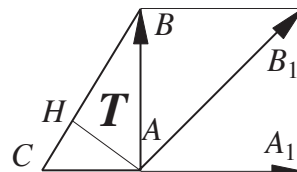
È evidente dalla figura la seguente relazione vettoriale

$$(A_1 - A) + (B - A) = (B_1 - A)$$

$$\text{Esplicitando: } (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) + (1, 1, -2) = (B_1 - A)$$

$$B_1 = A + (1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}) \text{ e infine}$$

$$B_1 = (2 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$$



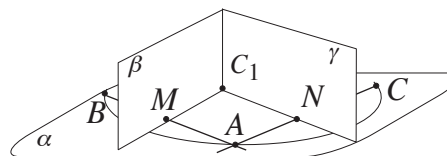
580. Si ha: $(B - A) = (1, 0, -1)$ e $(C - A) = (1, -2, 0)$. I due vettori non sono paralleli per cui A, B, C non sono allineati.

Il piano α contenente la circonferenza è il piano passante per i tre punti che ha come vettore normale $(C - A) \wedge (B - A) = (1, -2, 0) \wedge (1, 0, -1) = (2, 1, 2)$. Il piano è $\alpha: 2x + y + 2z = 3$. Il punto medio di $\overline{AB}$ è $M(1/2, 1, 1/2)$. Il piano β bisettore del segmento $\overline{AB}$ passa per M e ha vettore normale $(B - A) = (1, 0, -1)$ ed è quindi $\beta: x - z = 0$.

Il punto medio di $\overline{AC}$ è $N(1/2, 0, 1)$. Il piano γ bisettore del segmento $\overline{AC}$ passa per N e ha come vettore normale $(C - A) = (1, -2, 0)$ ed è quindi $\gamma: x - 2y = 1/2$.

Il centro C_1 della circonferenza è l'intersezione dei tre piani e si trova risolvendo il sistema 3×3 delle equazioni dei tre piani. Si trova $C_1 = (13/18, 1/9, 13/18)$.

Il raggio è la distanza tra C_1 e uno dei tre punti, per esempio $|C_1 - A| = \sqrt{25/18}$.



Questi dati bastano a scrivere una rappresentazione cartesiana per la circonferenza $\begin{cases} (x - 13/18)^2 + (y - 1/9)^2 + (z - 13/18)^2 = 25/18 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$

581. Un punto del piano è $(u - v, u, v)$. Imponendo che abbia distanza 1 da ciascuno degli altri due piani si hanno le relazioni: $|u - v| = 1$; $|u + v + 1| = \sqrt{2}$. Questi sono quattro sistemi lineari e hanno quindi quattro soluzioni. Le quattro sfere sono:

$$(x - 1)^2 + (y - 1 \pm \sqrt{2}/2)^2 + (z \pm \sqrt{2}/2)^2 = 1; \quad (x - 1)^2 + (y \pm \sqrt{2}/2)^2 + (z - 1 \pm \sqrt{2}/2)^2 = 1.$$

582. a. I centri di tutte le sfere che contengono la circonferenza sono sull'asse della circonferenza: $\{x = -1 + t; y = -3t; z = 0\}$; per essere tangenti a $x = 0$ le sfere devono avere raggio $R = |-1 + t|$, inoltre $R^2 = 1 + d^2$ (d distanza del centro dal piano della circonferenza). Si trovano i due valori $t = 0, -2/9$ per cui le due sfere sono $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $(x + 11/9)^2 + (y - 2/3)^2 + z^2 = 121/81$.

b. I punti sono $P_0(-1/7, 2/7, \pm 3/7)$. Le tangenti giacciono su $x = 3y - 1$, e quindi sono ortogonali a $\vec{n}(1, -3, 0)$; sono poi ortogonali anche a $(P_0 - C) = (6/7, 2/7, \pm 3/7)$. Inoltre passano per P_0 . Le tangenti sono quindi: $\{x = -1/7 + 9t; y = 2/7 + 3t; z = \pm 3/7 \mp 20t\}$.

c. Le rette del piano $x = 3y - 1$ che passano per $(2, 1, 1)$ possono essere scritte come $\begin{cases} x = 3y - 1 \\ z - 1 = m(y - 1) \end{cases}$ (ne manca solo una). Per vedere quali di esse sono tangenti basta calcolarne la distanza dal centro $(-1, 0, 0)$ e imporla uguale a 1.

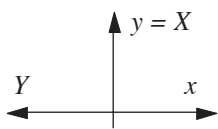
Per calcolare tale distanza occorre determinare la proiezione di $(-1, 0, 0)$ sulla retta che è $\left(\frac{2m^2 - 3m - 10}{10 + m^2}, \frac{m^2 - m}{10 + m^2}, \frac{10 - 10m}{10 + m^2}\right)$ da cui $m = 0, 20/9$. Oppure si possono intersecare le rette con la circonferenza e imporre la coincidenza delle soluzioni ($\Delta = 0$), ricavando gli stessi valori per m .

583. a. Si tratta di trovare a, b in modo che la retta di equazione $\{x = at; y = bt; z = at\}$ abbia distanza $d = \sqrt{1^2 - (1/2)^2} = \sqrt{3}/2$ dal centro $(0, 0, 1)$ della sfera. Per calcolare d si può trovare la proiezione ortogonale di C sulla retta che è $(a^2/(2a^2 + b^2), ab/(2a^2 + b^2), a^2/(2a^2 + b^2))$. Imponendo che la distanza tra $(0, 0, 1)$ e tale punto sia $\sqrt{3}/2$ si trova $4a^4 = b^4$ cioè $2a^2 = b^2$ o $b = \pm\sqrt{2}a$, p.es. $b = \pm\sqrt{2}$; $a = 1$. Le due rette sono: $\{x = t; y = \pm\sqrt{2}t; z = t\}$
- b. Basta intersecare la sfera col piano passante per P, Q e per il centro della sfera che è il piano $x = y$. Il cerchio è: $\{x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0; x = y\}$.
- c. Si considerano i piani passanti per la retta $PQ\{x = y; z = \sqrt{2}y\}$ e cioè i piani del tipo $\lambda(x - y) + \mu(z - \sqrt{2}y)$ e che hanno distanza $\sqrt{1^2 - (\sqrt{3}/2)^2} = 1/2$ dal centro della sfera. Si trova $\mu^2 - 2\sqrt{2}\lambda\mu - 2\lambda^2 = 0$ da cui p.es. $\lambda = 1$ e $\mu = \sqrt{2} \pm 2$. I piani sono $x + (\mp 2\sqrt{2} - 3)y + (\sqrt{2} \pm 2)z = 0$. Le circonferenze sono le intersezioni dei due piani con la sfera.
- d. La retta è tangente perché intersecandola con la sfera si trovano due punti coincidenti: $(0, 0, 2)$. Le circonferenze stanno sui piani che passano per la retta e hanno distanza $\sqrt{1^2 - (\sqrt{3}/2)^2} = 1/2$ da $(0, 0, 1)$. I piani sono quelli di equazione: $3\sqrt{3}x - \sqrt{3}y \pm \sqrt{10}(z - 2) = 0$. Le circonferenze sono perciò le intersezioni tra questi piani e la sfera.
584. Il punto di minima distanza da $(0, 0, 0)$ è il punto della retta congiungente $(0, 0, 0)$ con $(1, 1, 2)$ che ha distanza 2 da $(1, 1, 2)$ (ce ne sono ovviamente due tra i quali è facile scegliere quello cercato). Il punto è $P(1 - \sqrt{6}/3, 1 - \sqrt{6}/3, 2 - 2\sqrt{6}/3)$. Il piano tangente alla sfera in P è $\alpha: x + y + 2z = 6 - 2\sqrt{6}$.
- a. Basta intersecare α con il piano passante per P e ortogonale all'asse y . Si trova quindi:
$$\begin{cases} x + y + 2z = 6 - 2\sqrt{6} \\ y = 1 - \sqrt{6}/3 \end{cases}$$
- b. Basta intersecare α con l'asse y . Si trova il punto $Q(0, 6 - 2\sqrt{6}, 0)$. La retta cercata è perciò PQ :
$$\begin{cases} x = (1 - \sqrt{6}/3)t \\ y = (6 - 2\sqrt{6}) + (-5 + 5\sqrt{6}/3)t \\ z = (2 - 2\sqrt{6}/3)t \end{cases}$$
585. Il piano α delle circonferenze è quello contenente r, A e $B: x + z = 1$. Le circonferenze hanno centro sull'asse a del segmento AB . La retta a passa per il punto medio tra A e B ed è ortogonale a $(B - A)$ e a $\vec{n}_\alpha$ ed è perciò $\{x = 1/2 + t; y = 1/2 + 2t; z = 1/2 - t\}$. I centri sono i punti di a che sono equidistanti da A e dalla retta r . Dato che la proiezione su r del punto $(1/2 + t, 1/2 + 2t, 1/2 - t)$ è $(1/2 + t, 2, 1/2 - t)$, allora le due distanze sono rispettivamente $|2t - 3/2|$ e $\sqrt{(t - 1/2)^2 + (1/2 + 2t)^2 + (t - 1/2)^2}$; uguagliandole si trova $t = -3/2 \pm \sqrt{3}$. I centri sono i punti $(-1 \pm \sqrt{3}, -5/2 \pm 2\sqrt{3}, 2 \mp \sqrt{3})$; i raggi $2\sqrt{3} \mp 9/2$. Da questi dati si scrivono facilmente le equazioni delle due circonferenze.
586. Sono i punti P della retta r che hanno distanza $\sqrt{3}$ dal piano e cioè $(1/2, 2, 1/2)$ e $(-5/2, -4, 7/2)$.

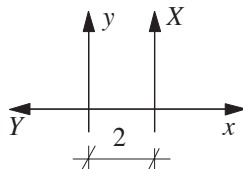
6. CONICHE: Cambi di coordinate

F 600. Scrivere le formule dirette e inverse dei seguenti cambi di coordinate nel piano:

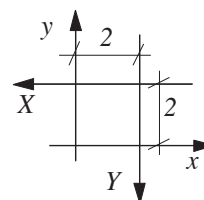
a.



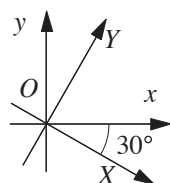
b.



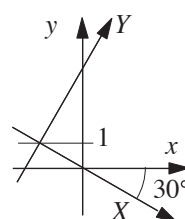
c.



d.



e.



6. CONICHE: Coniche da riconoscere

F 601. Coniche da riconoscere e disegnare subito (praticamente senza conti).

a. $x^2 + 2y^2 = 1$

b. $y^2 - 2x^2 = 3$

c. $2y^2 = 3x$

d. $2 - x^2 = y^2$

e. $x^2 - 3y^2 = 0$

f. $x^2 - 2x = 0$

g. $1 + x^2 + 2y^2 = 0$

h. $x^2 + 3y^2 = 0$

i. $xy = 0$

j. $x^2 + 1 = 0$

k. $y^2 = 9(x - 1)$

l. $3x^2 + 2y^2 = 5$

m. $x^2 + 3xy = 0$

n. $x^2 - 3x + 2 = 0$

o. $x^2 - 2xy + y^2 = 0$

p. $x^2 + 2x + y^2 + 1 = 0$

F 602. Disegnare l'ellisse seguente e determinarne centro, vertici, fuochi

$$(x - 1)^2 + 2(y - 1)^2 = 3$$

F 603. Disegnare le iperboli seguenti e determinarne centro, asintoti, vertici, fuochi.

a. $x^2 - y^2 + x - 3y = 0$

b. $-x^2 + 3y^2 + 2y + 1 = 0$

F 604. Disegnare le parabole seguenti e determinarne vertice, fuoco, direttrice.

a. $2x^2 + 3x + 2y = 0$

b. $2x + y + 3y^2 - 1 = 0$

F 605. Altre coniche da riconoscere e disegnare (completamento quadrati o simili).

a. $x^2 + 2y^2 - y = 0$

b. $3x^2 - y^2 - y = 1$

c. $x^2 - 2y^2 - 4x + 4 = 0$

d. $2y^2 + y = 2x$

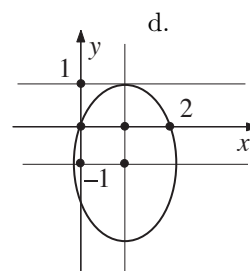
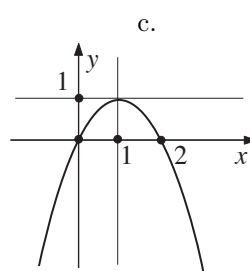
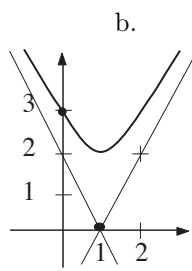
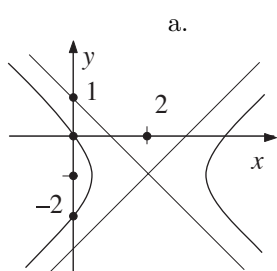
e. $xy = 5$

f. $3x^2 + 4y^2 - x + 1 = 0$

g. $x^2 - 3y^2 - 2xy = 0$

h. $x^2 + x + 1 = 0$

- F 606. a. Determinare la rappresentazione cartesiana dell'iperbole disegnata sotto (della quale sono evidenti centro, asintoti e un punto: l'origine).
 b. Determinare la rappresentazione cartesiana dell'iperbole di cui è sotto disegnato un ramo (sono evidenti centro, asintoti e un punto).
 c. Determinare la rappresentazione cartesiana della parabola disegnata sotto (sono evidenti vertice, asse e due punti).
 d. Determinare la rappresentazione cartesiana dell'ellisse disegnata sotto (sono evidenti centro, assi, un vertice e due punti).
 e. Determinare la rappresentazione cartesiana della conica formata dall'unione delle due rette $x - y + 1 = 0$ e $x + 3y = 0$.



- C 607. Dire, al variare di $a \in \mathbb{R}$ che conica è la seguente, distinguendo tra parabole, ellissi, circonferenze, coppie di rette etc.: $x^2 + ay^2 + 2ax + 2 = 0$.
 C 608. Dire che conica è $ax^2 + (1 - a)y^2 + (a - 2)x = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

6. CONICHE: Studio completo di coniche

- F 611. Coniche da riconoscere (mediante i criteri noti).
- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------|
| a. $4x^2 + 4xy + y^2 - x = 0$ | b. $x^2 + 3xy = 1$ |
| c. $x^2 + 2xy - 3y^2 + x - y = 0$ | d. $2x^2 - 6xy + 5y^2 = 0$ |
| e. $x^2 + 2xy + 2y^2 + y + 1 = 0$ | f. $x^2 + xy + y^2 + x = 0$ |
| g. $3x^2 + 3y^2 - x = 0$ | h. $xy + x + y = 1$ |
- A 612. Riconoscere le seguenti coniche al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ (distinguendo ellissi a punti reali e non, circonferenze ed iperboli equilateri):
- | | |
|--|--|
| a. $(\lambda + 6)x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2x - 4y = 0$ | b. $x^2 + 2\lambda xy + 3y^2 + 2\lambda x + 1 = 0$ |
| c. $\lambda x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ | d. $x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2x + 2y = 0$ |
| e. $\lambda x^2 + 4xy + (\lambda - 3)y^2 + (\lambda + 1)y = 0$ | f. $4\lambda^2 x^2 + (2\lambda + 2)xy + y^2 - \lambda = 0$ |
- F 613. Determinare gli asintoti delle seguenti iperboli:
- | | | |
|---------------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| a. $3x^2 + 2xy - y^2 = 1$ | b. $x^2 + xy - 2x + y = 0$ | c. $x^2 + 3xy + y^2 + x - 2y = 0$ |
|---------------------------|----------------------------|-----------------------------------|
- F 614. Determinare la lunghezza dei semiassi delle seguenti ellissi:
- | | |
|----------------------------|--------------------------------------|
| a. $3x^2 + 4xy + 3y^2 = 7$ | b. $3x^2 + 4xy + 3y^2 - 2x - 8y = 7$ |
|----------------------------|--------------------------------------|
- C 615. Determinare gli assi di simmetria dell'ellisse $3x^2 + 6xy - 5y^2 - 6x + 10y = 0$.
- C 616. Coniche da studiare completamente.
- | | |
|--|---------------------------------------|
| a. $3x^2 - 4xy - 6x + 4y = 0$ | b. $9x^2 + 6y^2 - 4xy = 3$ |
| c. $x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x + y = 0$ | d. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x = 0$ |
| e. $2x^2 + xy - 4x + 2y - y^2 = 0$ | f. $9x^2 + 4y^2 - 12xy + 3x - 2y = 0$ |
| g. $5x^2 + 5y^2 - 8xy + 4x - 2y + 1 = 0$ | h. $x^2 + 2xy + y^2 + 1 = 0$ |

600. a. Rotazione di $\pi/2$, la matrice di rotazione è $\begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Quindi le formule sono: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ cioè: $\begin{cases} x = -Y \\ y = X \end{cases}$ e inversamente $\begin{cases} X = y \\ Y = -x \end{cases}$

b. Rotazione di $\pi/2$ come sopra, ma nuova origine in $\{x = 2 ; y = 0\}$: $\begin{cases} x - 2 = -Y \\ y = X \end{cases} \begin{cases} X = y \\ Y = -x + 2 \end{cases}$

c. Rotazione di π e nuova origine in $\{x = 2 ; y = 2\}$: $\begin{cases} x = -X + 2 \\ y = -Y + 2 \end{cases} \begin{cases} X = -x + 2 \\ Y = -y + 2 \end{cases}$

d. Rotazione di $-\pi/6$, matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = (\sqrt{3}X + Y)/2 \\ y = (-X + \sqrt{3}Y)/2 \end{cases} \begin{cases} X = (\sqrt{3}x - y)/2 \\ Y = (x + \sqrt{3}y)/2 \end{cases}$

e. Rotazione di $-\pi/6$ e nuova origine nel punto $\{x = x_0 ; y = 1\}$.

$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ quindi: $\begin{cases} x = x_0 + (\sqrt{3}X + Y)/2 \\ y = 1 + (-X + \sqrt{3}Y)/2 \end{cases}$

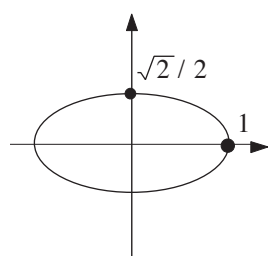
La trasformazione inversa si ha trasponendo la matrice: $\begin{cases} X = (\sqrt{3}(x - x_0) - (y - 1))/2 \\ Y = ((x - x_0) + \sqrt{3}(y - 1))/2 \end{cases}$

che si scrive anche come $\begin{cases} X = (\sqrt{3}x - y - \sqrt{3}x_0 + 1)/2 \\ Y = (x + \sqrt{3}y - x_0 - \sqrt{3})/2 \end{cases}$.

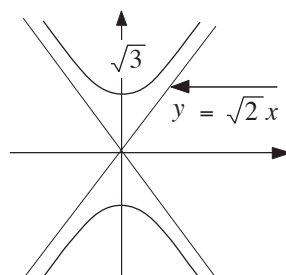
La vecchia origine giace sull'asse X , quindi, sostituendo $\{x = 0 ; y = 0\}$ nelle seconde formule, si ha $\{X = (-\sqrt{3}x_0 + 1)/2 ; Y = (-x_0 - \sqrt{3})/2\}$ e dev'essere $Y = 0$, cioè $x_0 = -\sqrt{3}$.

Le formule sono quindi: $\begin{cases} x = -\sqrt{3} + (\sqrt{3}X + Y)/2 \\ y = 1 + (-X + \sqrt{3}Y)/2 \end{cases} \begin{cases} X = (\sqrt{3}x - y + 4)/2 \\ Y = (x + \sqrt{3}y)/2 \end{cases}$

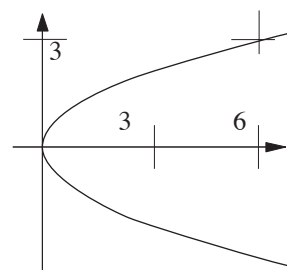
601. a. Ellisse



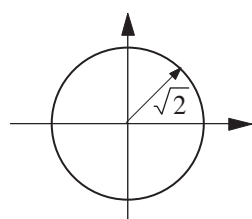
b. Iperbole



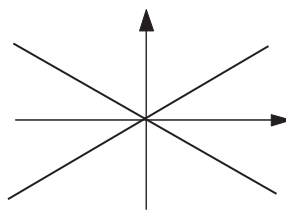
c. Parabola



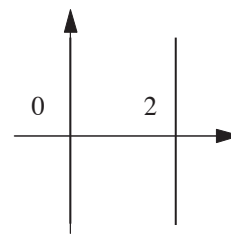
d. Circonferenza



e. Due rette incidenti
 $x = \pm\sqrt{3}y$



f. Due rette parallele:
 $x = 2 \quad x = 0$



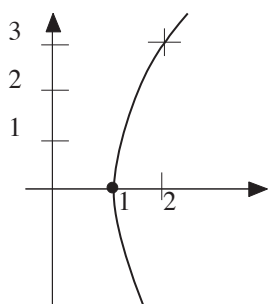
g. Ellisse senza punti reali.

h. Un solo punto: $(0, 0)$ (due rette incidenti complesse coniugate).

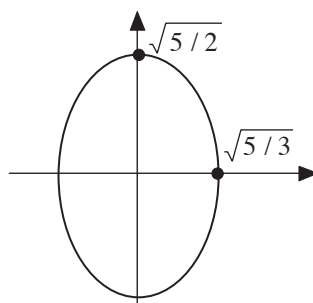
i. Unione di due rette : gli assi $x = 0$ e $y = 0$.

j. Nessun punto reale (due rette parallele complesse coniugate).

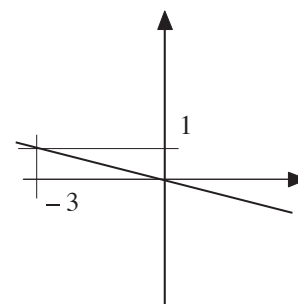
k. Parabola



l. Ellisse



m. Due rette incidenti:
 $x = 0$ $x = -3y$



n. Unione di due rette parallele: $x = 1$ e $x = 2$.

o. Una retta (contata due volte): $x = y$.

p. Un solo punto: $(-1, 0)$ (due rette incidenti complesse coniugate).

602. L'ellisse si può scrivere come:

$$\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{3/2} = 1$$

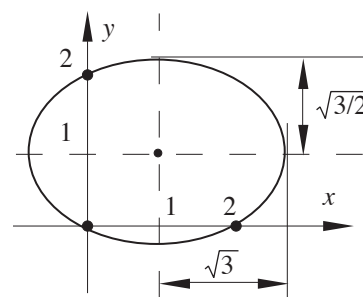
Il centro è quindi $(1, 1)$ e i semiassi misurano rispettivamente $\sqrt{3}$ e $\sqrt{3/2}$, per cui i vertici sono $V_{1,2} = (1 \pm \sqrt{3}, 1)$ e $V_{3,4} = (1, 1 \pm \sqrt{3/2})$.

Dato che $a^2 = 3$ e $b^2 = 3/2$, si ha $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3/2}$.

I fuochi sono pertanto $F_{1,2} = (1 \pm \sqrt{3/2}, 1)$.

Intersecando l'ellisse con gli assi coordinati si trovano i punti $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$.

Tenendo conto di questi punti è possibile eseguire un disegno più accurato.



603. a. Completiamo i quadrati:

$$(x^2 + x + 1/4) - (y^2 + 3y + 9/4) = 1/4 - 9/4$$

$$(x + 1/2)^2 - (y + 3/2)^2 = -2$$

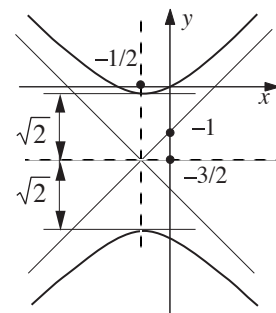
$$-\frac{(x + 1/2)^2}{2} + \frac{(y + 3/2)^2}{2} = 1$$

Si tratta quindi di una iperbole di centro $(-1/2, -3/2)$ con asintoti paralleli alle due bisettrici degli assi cartesiani. Gli asintoti sono perciò $(x + 1/2) \pm (y + 3/2) = 0$.

Inoltre ha i vertici lungo l'asse di simmetria parallelo all'asse y .

I vertici sono $V_{1,2} = (-1/2, -3/2 \pm \sqrt{2})$. Il fatto che passi per l'origine aiuta a disegnarla con maggior precisione.

Per quanto riguarda i fuochi: $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2 + 2} = 2$ e quindi sono $F_{1,2} = (-1/2, -3/2 \pm 2)$



b. Completiamo i quadrati:

$$-x^2 + 3y^2 + 2y + 1 = 0$$

$$-x^2 + 3\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) = -1 + 3 \cdot \frac{1}{9}$$

$$-x^2 + 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{2}{3}$$

$$x^2 - 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x^2}{2/3} - \frac{(y + 1/3)^2}{2/9} = 1$$

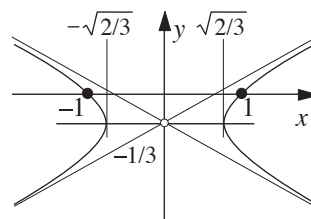
L'iperbole ha centro in $(0, -1/3)$. Gli asintoti sono le rette $x/(\sqrt{2/3}) \pm (y + 1/3)/(\sqrt{2/9}) = 0$, rette che hanno coefficiente angolare $\sqrt{3}/3$ e che quindi formano angoli di $\pm\pi/6$ con l'asse delle ascisse.

I vertici distano $\sqrt{2/3}$ dal centro e sono quindi:

$$V_{1,2} = (\pm\sqrt{2/3}, -1/3).$$

I fuochi sono:

$F_{1,2} = (\pm\sqrt{2/3 + 2/9}, -1/3) = (\pm\sqrt{8/9}, -1/3)$. Per disegnarla meglio cerchiamone anche due punti. Per esempio le intersezioni con l'asse x sono i due punti $(\pm 1, 0)$.



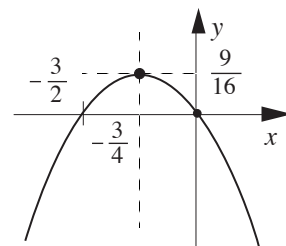
604. a. Completiamo i quadrati:

$$2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) = -2y + 2 \cdot \frac{9}{16}$$

$$2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = -2\left(y - \frac{9}{16}\right) \quad \left(y - \frac{9}{16}\right) = -\left(x + \frac{3}{4}\right)^2$$

Quindi il vertice è $V(-3/4, 9/16)$. La parabola ha la concavità verso il basso e passa per l'origine. Questo basta a disegnarla.

Il fuoco è $F = (-3/4, 9/16 - 1/4) = (-3/4, 5/16)$, la direttrice è $y = 9/16 + 1/4$ cioè $y = 13/16$.



b. Completiamo i quadrati:

$$2x - 1 = -3y^2 - y \quad 2x - 1 - 3 \cdot \frac{1}{36} = -3\left(y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{36}\right)$$

$$2\left(x - \frac{13}{24}\right) = -3\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 \quad \left(x - \frac{13}{24}\right) = -\frac{3}{2}\left(y + \frac{1}{6}\right)^2$$

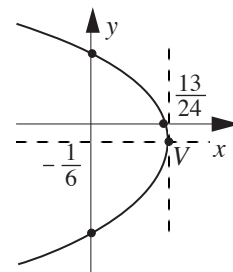
Quindi il vertice è $V(13/24, -1/6)$. La parabola ha la concavità verso sinistra.

Per disegnarla intersechiamola con gli assi: ponendo $y = 0$ troviamo il punto $(1/2, 0)$, ponendo $x = 0$ troviamo i punti

$\left(0, \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}\right)$ cioè circa $(0, 0.43)$ e $(0, -0.76)$. Questo basta a disegnarla.

Il fuoco è $F(13/24 - 1/(4 \cdot 3/2), -1/6) = (-3/8, -1/6)$, la direttrice è $x = 13/24 + 1/(4 \cdot 3/2)$, cioè $x = 17/24$.

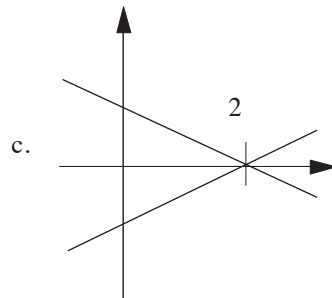
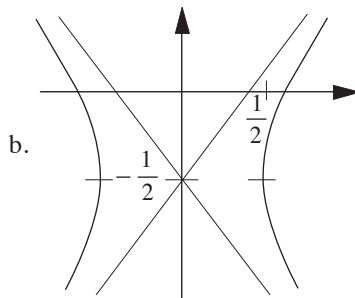
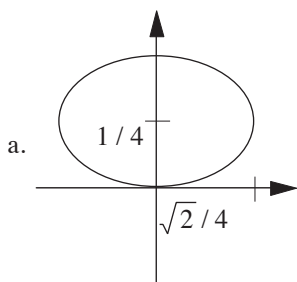
$$2x - \frac{13}{12} = -3\left(y + \frac{1}{6}\right)^2$$



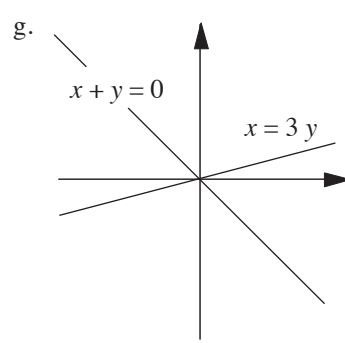
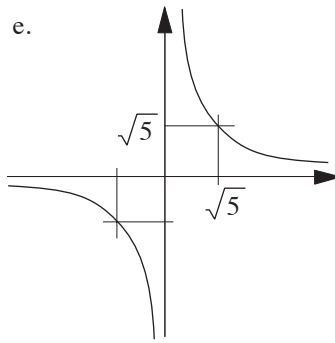
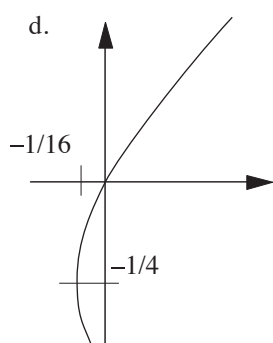
605. a. Ellisse: $\frac{x^2}{1/8} + \frac{(y - 1/4)^2}{1/4} = 1$

b. Iperbole: $\frac{x^2}{1/4} - \frac{(y + 1/2)^2}{3/4} = 1$. Gli asintoti sono: $(y + 1/2) = \pm\sqrt{3}x$

c. Unione di due rette incidenti: $y = \pm\sqrt{2}/2(x - 2)$



- d. Parabola: $(y + 1/4)^2 = 2(x + 1/16)$
 e. Iperbole di asintoti: $x = 0$ e $y = 0$.
 f. Ellisse senza punti reali.
 g. Unione di due rette incidenti: $x + y = 0$ e $x = 3y$.



- h. Due rette parallele non reali.

606. a. L'iperbole ha centro $(2, -1)$ ed è $\frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$. Gli asintoti sono paralleli alle bisettrici degli assi e sono $\frac{x-2}{a} \pm \frac{y+1}{b} = 0$, da cui $a = b$.
 L'iperbole passa per $(0, 0)$, quindi $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{a^2} = 1$, da cui $a^2 = 3$.
 L'iperbole è pertanto $\frac{(x-2)^2}{3} - \frac{(y+1)^2}{3} = 1$.

b. Gli asintoti sono le rette $y = \pm 2(x-1)$ che si possono scrivere anche come $\frac{y}{2} \pm (x-1) = 0$, per cui l'iperbole ha equazione $\frac{y^2}{4} - (x-1)^2 = a^2$. Perché passi per il punto $(0, 3)$ occorre che $\frac{9}{4} - 1 = a^2$, quindi $a^2 = 5/4$. L'iperbole è perciò: $y^2 - 4(x-1)^2 = 5$.

c. La parabola ha vertice $(1, 1)$ ed è quindi $(y-1) = a(x-1)^2$. Passa per $(0, 0)$, quindi $-1 = a$. La parabola è $(y-1) = -(x-1)^2$.

d. L'ellisse ha centro $(1, -1)$ ed è $\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$. Il semiasse parallelo all'asse y misura 2, quindi $b = 2$. Inoltre passa per $(0, 0)$, quindi $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{4} = 1$, da cui $a^2 = 4/3$.
 L'ellisse è: $\frac{3(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$.

e. Basta scrivere il prodotto delle equazioni delle due rette. La conica è: $(x-y+1)(x+3y) = 0$.

607. Completiamo i quadrati (anzi l'unico quadrato): $(x+a)^2 + ay^2 = a^2 - 2$.
 La parte di secondo grado, che decide se una conica è di tipo parabolico, iperbolico o ellittico, dipende solo da a come coefficiente di y^2 . Pertanto:

Se $a = 0$ è di tipo parabolico: precisamente $x^2 = -2$ cioè coppia di rette parallele, ma non reali.

Se $a < 0$ è di tipo iperbolico ed è un'iperbole, purché non si annulli il termine noto. Il termine noto si annulla per $a = \pm\sqrt{2}$. Quindi, se $a < 0$ e $a \neq -\sqrt{2}$, si tratta di un'iperbole, se $a = -\sqrt{2}$ è una coppia di rette reali.

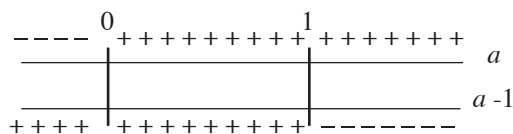
Se $a > 0$ è di tipo ellittico ed è un'ellisse, purché il termine noto sia positivo. Il termine noto è positivo per $a > \sqrt{2}$, quindi, se $a > \sqrt{2}$, si tratta di un'ellisse, se $0 < a < \sqrt{2}$ non ha punti reali. Se infine $a = \sqrt{2}$ si tratta di un'ellisse degenera che di reale ha solo il punto $(-a, 0)$.

Non è mai una circonferenza (dovrebbe essere $a = 1$, ma in questo caso non ha punti reali).

In conclusione:

$a < -\sqrt{2}$	$a = -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < a < 0$	$a = 0$	$0 < a < \sqrt{2}$	$a = \sqrt{2}$	$a > \sqrt{2}$
iperbole	2 rette reali	iperbole	rette // non reali	non reale	un punto	ellisse

608. Esaminiamo i segni dei coefficienti di x^2 e y^2 per ogni $a \in \mathbb{R}$:



Per cui:

Se $a > 0$ tipo iperbolico

Se $0 < a < 1$ tipo ellittico

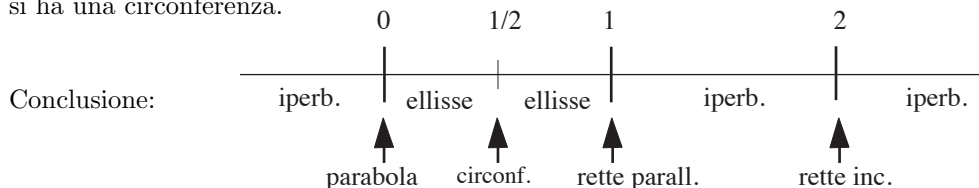
Se $a > 1$ tipo iperbolico

Se $a = 0, 1$ tipo parabolico

Quelle di tipo iperbolico sono tutte iperboli, tranne $a = 2$ per cui è coppia di rette incidenti.

Quelle di tipo parabolico sono tutte parabole, tranne $a = 1$ per cui è coppia di rette parallele.

Quelle di tipo ellittico sono tutte ellissi a punti reali dato che passano per $(0,0)$. Per $a = 1/2$ si ha una circonferenza.



STUDIO DI CONICHE

Nota: Per studiare le coniche si esaminano il determinante della matrice associata (che chiameremo A) e il carattere di definizione della forma quadratica che è dato dal segno del determinante della matrice 2×2 associata (che chiameremo B). Per vedere se un'ellisse ha punti reali si cerca di intersecarla con rette passanti per il centro di simmetria. Per vedere se è una circonferenza si cerca se $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$ e se ha punti reali. Infine un'iperbole è equilatera se $a_{11} = -a_{22}$.

611. a. La matrice B della forma quadratica ha determinante 0, quindi la f.q. è semidefinita. La matrice A ha determinante non nullo quindi si tratta di una parabola.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & -1/2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

b. La matrice B ha determinante negativo, quindi la f.q. è indefinita. La matrice A ha determinante non nullo quindi si tratta di una iperbole non equilatera (dato che $a_{11} \neq -a_{22}$).

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

c. La matrice B ha determinante negativo, quindi la f.q. è indefinita. La matrice A ha determinante 0, quindi si tratta di una coppia di rette incidenti.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & -3 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{array} \right)$$

d. La matrice B ha determinante positivo, quindi la f.q. è definita. La matrice A ha determinante 0, quindi si tratta di una coppia di rette coniugate non reali che di reale ha solo il punto $(0,0)$.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

e. La matrice B ha determinante positivo, quindi la f.q. è definita. La matrice A ha determinante non nullo quindi si tratta di un'ellisse. Per vedere se ha punti reali, senza cercare il centro, intersechiamola con tutte le rette del tipo $y = k$. Si trova un'equazione di secondo grado il cui discriminante è $\Delta = -k^2 - k - 1$ è sempre negativo per ogni $k \in \mathbb{R}$, quindi l'ellisse non ha punti reali.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{array} \right)$$

f. La matrice B della forma quadratica ha determinante positivo, quindi la f.q. è definita. La matrice A ha determinante non nullo quindi si tratta di un'ellisse. Ha punti reali, perché passa per $(0,0)$.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

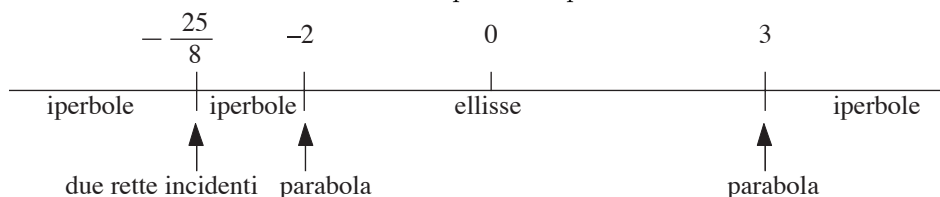
g. Basta completare i quadrati per vedere che si tratta di una circonferenza di centro $C(1/6, 0)$ e raggio $1/6$.

h. La matrice B della forma quadratica ha determinante negativo, quindi la f.q. è indefinita. La matrice A ha determinante non nullo quindi si tratta di una iperbole equilatera ($a_{11} = a_{22} = 0$).

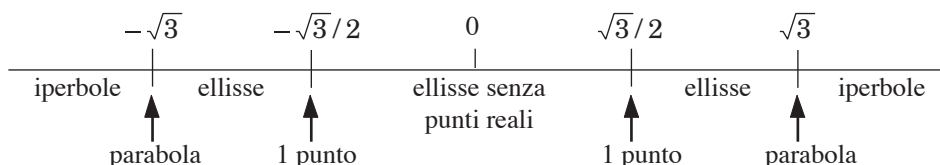
$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{array} \right)$$

612. a. Si ha: $\det(B) = 6 + \lambda - \lambda^2$, quindi $\det(B) > 0$ per $-2 < \lambda < 3$. La matrice A ha determinante 0 per $\lambda = -25/8$. Le ellissi sono tutte a punti reali perché passano per $(0,0)$. Non ci sono

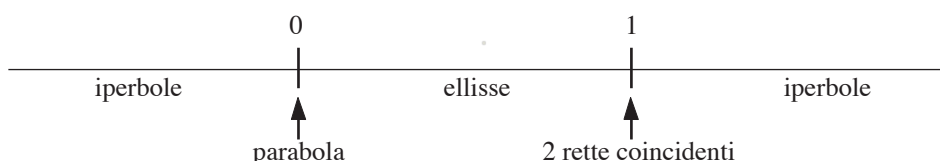
circonferenze. Per $\lambda = -7$ c'è l'unica iperbole equilatera.



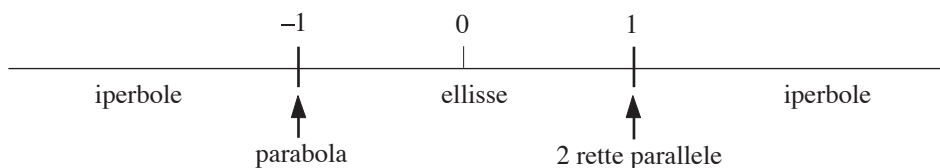
- b. Si ha: $\det(B) = 3 - \lambda^2$, quindi $\det(B) > 0$ per $-\sqrt{3} < \lambda < \sqrt{3}$. La matrice A ha determinante 0 per $\lambda = \pm\sqrt{3}/2$. Per distinguere le ellissi a punti reali dalle altre si può considerare la retta $2\lambda x + 6y = 0$ che è la derivata parziale rispetto a y e quindi passa sempre per il centro di simmetria. Ponendola a sistema con l'equazione della conica, si trova che solo per $|\lambda| \geq \sqrt{3}/2$ ci sono intersezioni reali, quindi solo quelle ellissi hanno punti reali. Un altro modo più empirico è il seguente: per $\lambda = 0$ l'ellisse non ha evidentemente punti reali, mentre per $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ ne ha. "Per continuità", allora, nell'intervallo $(-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$, le ellissi non hanno punti reali. Non ci sono circonferenze. Non ci sono iperboli equilatera.



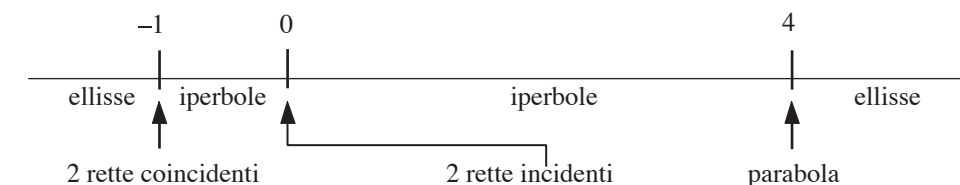
- c. Si ha: $\det(B) = \lambda - \lambda^2$, quindi $\det(B) > 0$ per $0 < \lambda < 1$. La matrice A ha determinante 0 per $\lambda = 1$. Per $\lambda = 1$ la conica si scrive come $(x + y + 1)^2 = 0$ ed è una coppia di rette coincidenti. Non ci sono circonferenze. Le ellissi hanno tutte punti reali (intersecandole con $x = 0$ si trova sempre $y = -1$). Iperbole equilatera per $\lambda = -1$.



- d. Si ha: $\det(B) = 1 - \lambda^2$, quindi $\det(B) > 0$ per $-1 < \lambda < 1$. La matrice A ha determinante 0 per $\lambda = 1$. Per $\lambda = 1$ la conica si scrive subito come $(x + y)(x + y + 2) = 0$ ed è quindi una coppia di rette parallele. Le ellissi sono tutte a punti reali perché contengono il punto $(0, 0)$. Per $\lambda = 0$ si ha una circonferenza. Non ci sono iperboli equilatera.

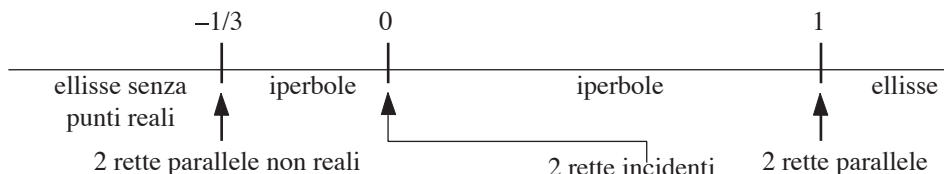


- e. Si ha: $\det(B) = -4 - 3\lambda + \lambda^2$, quindi $\det(B) > 0$ per $\lambda < -1$ e per $\lambda > 4$. La matrice A ha determinante $-\lambda/4 - \lambda^2/2 - \lambda^3/4$ che si annulla per $\lambda = 0$ e per $\lambda = -1$. Non ci sono circonferenze. Le ellissi sono tutte a punti reali perché contengono il punto $(0, 0)$. Per $\lambda = -1$ la conica è $-x^2 + 4xy - 4y^2 = -(x - 2y)^2 = 0$ ed è una coppia di rette coincidenti. Per $\lambda = 3/2$ iperbole equilatera.



- f. Si ha: $\det(B) = -1 - 2\lambda + 3\lambda^2$, quindi $\det(B) > 0$ per $\lambda < -1/3$ e per $\lambda > 1$. La matrice A ha determinante $-\lambda - 2\lambda^2 + 3\lambda^3$ e si annulla per $\lambda = -1, 0, 1/3$. Tutte le ellissi hanno

centro $(0,0)$, dato che la conica non ha termini di grado 1. Quindi per distinguere quelle a punti reali basta intersecarle con la retta $x = 0$ che passa sempre per il centro e si vede che ha intersezione solo per $\lambda > 0$. Per $\lambda = -1/3$ la conica è $((2/3)x + y)^2 + 1/3 = 0$, quindi non ha punti reali (due rette parallele non reali). Per $\lambda = 1$ la conica è $(2x + y)^2 - 1 = 0$, quindi è costituita dalle due rette parallele $2x + y = \pm 1$. Non ci sono circonferenze. Non ci sono iperboli equilateri.



613. a. Per scomporre la forma quadratica uguagliamola a zero: $3x^2 + 2xy - y^2 = 0$. Dividendo per y^2 , si ottiene un'equazione di secondo grado in x/y : $3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0$. Le soluzioni sono $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}, -1$ per cui la forma quadratica è $3\left(\frac{x}{y} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{y} + 1\right)$ e, moltiplicando per y^2 si ha: $(3x - y)(x + y)$. Dato che mancano i termini di grado 1, il centro è $(0,0)$. Gli asintoti sono quindi le rette parallele a $3x - y = 0$ e $x + y = 0$ e passanti per $(0,0)$, cioè proprio $3x - y = 0$ e $x + y = 0$.

b. La forma quadratica si scompone subito come $x \cdot (x + y) = 0$. Il centro della conica si trova con il sistema delle derivate parziali $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$. La soluzione è $C(-1,4)$. Gli asintoti sono le rette parallele a $x = 0$ e $x + y = 0$ e passanti per C , cioè: $x + 1 = 0$ e $x + y = 3$.

c. Per scomporre la forma quadratica scriviamo $x^2 + 3xy + y^2 = 0$ e risolviamo l'equazione di 2° grado $(x/y)^2 + 3(x/y) + 1 = 0$. Si trova: $\frac{x}{y} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Il centro della conica si trova risolvendo il sistema delle derivate parziali ed è $\left(\frac{8}{5}, -\frac{7}{5}\right)$, quindi gli asintoti sono: $2(x - 8/5) = (-3 \pm \sqrt{5})(y + 7/5)$.

614. a. La forma quadratica è associata alla matrice simmetrica $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ i cui autovalori sono 5 e 1. Il centro è $(0,0)$, quindi la forma canonica è $5X^2 + Y^2 = 7$ o meglio $\frac{X^2}{7/5} + \frac{Y^2}{7} = 1$.

I semiassi misurano perciò $\sqrt{7/5}$ e $\sqrt{7}$.

b. Come sopra gli autovalori della matrice B della forma quadratica sono 5 e 1. Ma il centro è $(-1,2)$, quindi, prima di scrivere la forma canonica, occorre traslare: $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$ e l'equazione diventa $3X^2 + 4XY + 3Y^2 = 14$. La forma canonica è perciò $5\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 = 14$ e i semiassi misurano $\sqrt{14/5}$ e $\sqrt{14}$.

615. Il sistema delle derivate parziali è $\begin{cases} 6x + 6y - 6 = 0 \\ 6x - 10y + 10 = 0 \end{cases}$. La soluzione è il centro: $C(0,1)$.

Le direzioni degli assi sono date dagli autovettori della forma quadratica che è associata alla matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di B sono 4, -6. Rispettivi autovettori sono $v_1(3,1)$ e $v_2(1,-3)$. Quindi gli assi sono le rette che passano per C e hanno questi vettori direzionali, cioè: $x - 3y + 3 = 0$ e $3x + y - 1 = 0$.

616. a. La matrice A ha determinante non nullo e $\det(B) < 0$, quindi è un'iperbole. Gli autovalori della forma quadratica sono -1,4. Autovettori rispettivi sono $(1,2)$, $(2,-1)$. Il sistema delle derivate parziali è $\{6x - 4y - 6 = 0; -4x + 4 = 0\}$, quindi il centro della conica è $C(1,0)$. Gli assi di simmetria hanno come versori gli autovettori e passano per C . La forma quadratica della conica si spezza in $x(3x - 4y)$, quindi gli asintoti passano per C e sono

paralleli a $x = 0$ e $3x - 4y = 0$.

Gli assi, gli asintoti e un suo punto qualunque, per esempio $(0, 0)$, permettono di disegnarla con buona precisione.

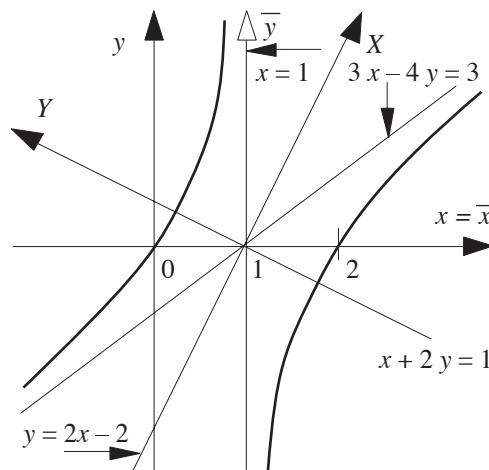
Per avere la forma canonica, prima operiamo la traslazione di O in C :

$$\begin{cases} \bar{x} = x - 1 \\ \bar{y} = y \end{cases} \quad \begin{cases} x = \bar{x} + 1 \\ y = \bar{y} \end{cases} \quad \text{e si ha:}$$

$3\bar{x}^2 - 4\bar{x}\bar{y} - 3 = 0$. Per la rotazione si assumono come versori degli assi gli autovettori normalizzati e orientati in modo che la coppia sia positiva, per esempio $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$, $(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. La rotazione si scrive ponendo gli autovettori in colonna:

$$\begin{cases} x - 1 = \bar{x} = (X - 2Y)/\sqrt{5} \\ y = \bar{y} = (2X + Y)/\sqrt{5} \end{cases}$$

La forma canonica $-X^2 + 4Y^2 - 3 = 0$ si scrive conoscendo gli autovalori e il termine noto che si ricava dall'equazione in $\bar{x}, \bar{y}$.



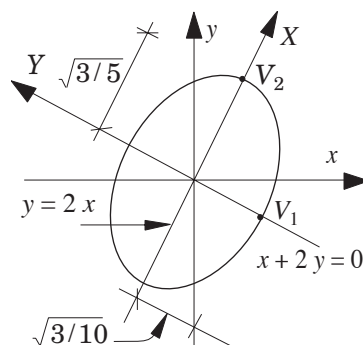
- b. La matrice A ha determinante non nullo e $\det(B) > 0$, quindi è un'ellisse con punti reali; per esempio ponendo $y = 0$ si trovano $(\pm\sqrt{3}/3, 0)$. Gli autovalori della forma quadratica sono 5, 10. Autovettori rispettivi sono $(1, 2)$, $(-2, 1)$.

Normalizzandoli si ottiene una base ortonormale destrorsa. Gli assi sono le rette passanti per C e parallele agli autovettori. Non essendoci termini di primo grado, il centro è $C(0, 0)$, quindi la forma canonica è immediata ed è $5x^2 + 10y^2 = 3$ (autovalori come coefficienti). Dalla forma canonica si ricavano immediatamente le lunghezze dei semiassi: $a = \sqrt{3/5}$ e $b = \sqrt{3/10}$.

La rotazione è $\begin{cases} x = (X - 2Y)/\sqrt{5} \\ y = (2X + Y)/\sqrt{5} \end{cases}$.

Due vertici si hanno trovando due punti sugli assi che abbiano distanza a e b da C e si ha:

$$V_1 = (\sqrt{6}/5, -\sqrt{6}/10) \quad V_2 = (\sqrt{3}/5, 2\sqrt{3}/5).$$



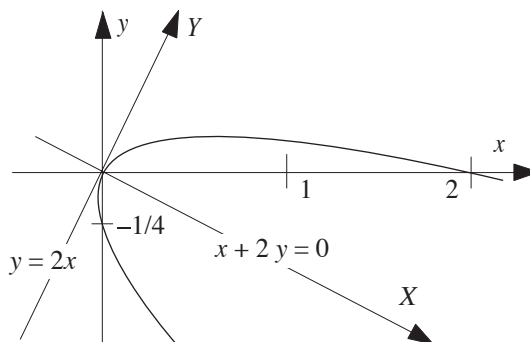
- c. La matrice A ha determinante non nullo e $\det(B) = 0$, quindi è una parabola. Gli autovalori della forma quadratica sono 0, 5. Gli autospazi sono rispettivamente $(2t, -t)$, $(t, 2t)$. Un versore per l'asse è l'autovettore relativo all'autovalore 0.

Dalla trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} x = (2X + Y)/\sqrt{5} \\ y = (-X + 2Y)/\sqrt{5} \end{cases} \quad \text{che usa i versori } (2, -1), (1, 2) \text{ normalizzati o inversamente}$$

si ricavano $\begin{cases} X = (2x - y)/\sqrt{5} \\ Y = (x + 2y)/\sqrt{5} \end{cases}$ la forma canonica $X = 5Y^2$ e il vertice $V(0, 0)$. Per disegnarla basta un punto per esempio $(2, 0)$.

Altro modo: L'equazione si scrive come $(x + 2y)^2 - 2x + y = 0$. Dato che $x + 2y = 0$ e $-2x + y = 0$ sono ortogonali, si arriva subito al cambio di coordinate di sopra (e si vede che $V = (0, 0)$).



- d. La matrice A ha determinante non nullo e $\det(B) = 0$, quindi è una parabola. Gli autovalori della matrice B sono 0, 5. Autovettori rispettivamente $(1, -1)$, $(1, 1)$. L'asse è parallelo all'autovettore relativo a 0.

Per trovare V si interseca la parabola con una retta ortogonale all'asse, per esempio $y = x$, e si trovano i punti $(0, 0)$ e $(2, 2)$. Il loro punto medio $M(1, 1)$ è sull'asse. L'asse è quindi $x + y = 2$. Intersecando la parabola con l'asse si trova il vertice $V(1/2, 3/2)$. La si può disegnare usando il suo punto $(0, 0)$.

Inoltre, la parte non di secondo grado dell'equazione è $-8x = 0$, quindi questa è la retta tangente in $(0, 0)$. Traslando in modo che V diventi O con

$$\begin{cases} \bar{x} = x - 1/2 \\ \bar{y} = y - 3/2 \end{cases} \quad \text{l'equazione diventa}$$

$$(\bar{x} + \bar{y})^2 - 4\bar{x} + 4\bar{y} = 0.$$

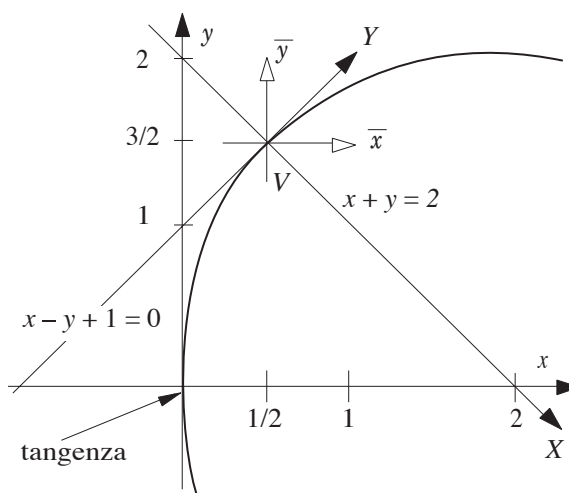
La rotazione è

$$\begin{cases} \bar{x} = (X + 2Y)/\sqrt{2} \\ \bar{y} = (-X + Y)/\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{o anche:}$$

$$\begin{cases} X = (\bar{x} - \bar{y})/\sqrt{2} \\ Y = (\bar{x} + \bar{y})/\sqrt{2} \end{cases}.$$

La forma canonica è allora

$$X = (\sqrt{2}/4)Y^2$$



Altro modo: La si scrive come $(x + y)^2 - 8x = 0$. Aggiungendo λ alla forma quadratica si ottiene $(x + y + \lambda)^2 - 8x - 2\lambda x - 2\lambda y - \lambda^2 = 0$ o anche $(x + y + \lambda)^2 - ((8 + 2\lambda)x + 2\lambda y + \lambda^2) = 0$.

Si sceglie λ in modo che le due rette $x + y + \lambda = 0$ e $(8 + 2\lambda)x + 2\lambda y + \lambda^2 = 0$ siano ortogonali e si trova $\lambda = -2$, per cui l'equazione diventa $(x + y - 2)^2 - 4(x - y + 1) = 0$. A questo punto è chiaro che mediante la trasformazione $\begin{cases} X = (x - y + 1)/\sqrt{2} \\ Y = (x + y - 2)/\sqrt{2} \end{cases}$ si arriva alla forma canonica

$2Y^2 - 4\sqrt{2}X = 0$ e che quindi l'asse è $x + y - 2 = 0$ e la tangente in V è $x - y + 1 = 0$.

- e. La matrice A ha determinante nullo e $\det(B) < 0$, quindi è l'unione di due rette reali incidenti. Il centro della conica si trova risolvendo il sistema lineare delle due derivate parziali $\{4x + y - 4 = 0; x + 2 - 2y = 0\}$ ed è $C(2/3, 4/3)$. Tagliando la conica con una retta non passante per C per esempio $y = 0$ e si trovano i punti $(2, 0)$ e $(0, 0)$. Le rette passanti per C e per essi sono $x + y - 2 = 0$ e $2x - y = 0$. Si verifica subito che il loro prodotto dà l'equazione di partenza. Non è quindi necessaria la riduzione a forma canonica.
- f. La matrice A ha determinante nullo e $\det(B) = 0$, quindi è l'unione di due rette parallele o parallele non reali o coincidenti. La decomposizione è immediata:
 $(9x^2 - 12xy + 4y^2) + 3x - 2y = 0 \quad (3x - 2y)^2 + 3x - 2y = 0 \quad (3x - 2y + 1) \cdot (3x - 2y) = 0$
 Quindi è l'unione di due rette parallele reali. Non è necessaria la riduzione a forma canonica.
- g. La matrice A ha determinante nullo e $\det(B) > 0$, quindi la conica ha un solo punto reale. Il punto è $C(-2/3, -1/3)$ centro della conica che si trova risolvendo il sistema lineare delle due derivate parziali $\{10x - 8y + 4 = 0; 10y - 8x - 2 = 0\}$. Intersecando la conica con la retta $y = 0$ non passante per il centro si trovano i due punti non reali $P_1((-2 + i)/5, 0)$ e $P_2((-2 - i)/5, 0)$. Le rette non reali CP_1 e CP_2 sono: $5x + (-4 \pm 3i)y + 2 \pm i = 0$. Si verifica subito che il loro prodotto dà l'equazione di partenza. Non è quindi necessaria la riduzione a forma canonica.
- h. La matrice A ha determinante nullo e $\det(B) = 0$, quindi è l'unione di due rette parallele o parallele non reali o coincidenti. La decomposizione algebrica è immediata: $(x + y)^2 + 1 = 0$ cioè $(x + y + i) \cdot (x + y - i) = 0$. Quindi si tratta di due rette parallele non reali.

8. FUNZIONI E SCRIPT IN MATLAB

801. Scrivere il listato di un file **funzione** MatLab **alfa(x)** che, dato un numero reale x dia come risultato la matrice p calcolata come segue:

Innanzitutto costruisca la matrice m così fatta:

$$m = \begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 & \cdots & \cdots & x+10 \\ 1 & 0 & & 0 & x & x \\ 0 & 1 & & 0 & x & x \\ \cdots & \cdots & \ddots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & 1 & x & x \\ x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 & \cdots & \cdots & (x+10)^2 \end{pmatrix}$$

m è una matrice 11×11 in cui ci sono una sottomatrice identica 9×9 e una sottomatrice 9×2 tutta fatta di x .

Il risultato della funzione sarà una matrice p tale che $p^T \cdot (m^T m) \cdot p$ sia diagonale.

Spiegare perché una tale matrice esiste.

802. Scrivere il listato di un file **funzione** MatLab **alfa(n)** che, dato un numero intero positivo n dia come risultato la matrice x calcolata come segue:

Innanzitutto costruirà usando al più *un solo ciclo for* la matrice $n \times n$ così fatta:

$$m = \begin{pmatrix} n & n-1 & \cdots & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

In seguito costruirà la matrice $2n \times 2n$ seguente

$$p = I + \left(\begin{array}{ccc|ccc} n & 0 & \cdots & & & \\ 0 & n & \cdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ \hline n & n & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ n & n & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right)$$

Il risultato sarà la matrice colonna x soluzione del sistema $px = [1 \ 2 \ 3 \ \dots \ 2n]^T$

803. Scrivere il listato di un file **funzione** MatLab **alfa(x,y)** che ha come variabili di input due numeri reali x e y e come output la matrice costruita come segue:

Sia innanzitutto
$$a = \left(\begin{array}{c|ccccc} 2 & x+2 & x+4 & x+6 & \cdots & x+20 \\ \hline x+2 & y & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x+4 & 1 & y-1 & 1 & \cdots & 1 \\ x+6 & 1 & 1 & y-2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \ddots & \cdots \\ x+20 & 1 & 1 & 1 & \cdots & y-9 \end{array} \right)$$

Il risultato della funzione sarà la matrice a^{-1} se a è invertibile e la matrice nulla dello stesso ordine di a in caso contrario.

804. Scrivere il listato di un file **funzione** MatLab **alfa(x)** che ha come variabile di input una matrice riga x e come output la matrice d costruita come segue:

Sia innanzitutto
$$a = \left(\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline I & x' \end{array} \right)$$

Nella prima riga di a il vettore x seguito da 0
Nell'ultima colonna 0 e il vettore x'
In basso a sinistra una matrice identica.

Il risultato della funzione sarà la matrice diagonale $d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di $a + a^T$.

Se x non è una matrice riga, la funzione dovrebbe dare errore e arrestare l'esecuzione.

805. Scrivere il listato di un file **funzione** MatLab **alfa(v)** che abbia come variabile di input un vettore riga $v = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ e come output la matrice colonna x costruita come segue:

Sia innanzitutto $b =$

x_1	x_2				x_n
x_2	x_2	0	$\cdots$	0	x_n
	0		$\cdots$	0	x_n
			v		
	0	0	$\cdots$		x_n
x_n	0	0	$\cdots$	0	x_n

La prima riga di b è v , la prima colonna è v^T , la diagonale è pure v . L'ultima colonna è riempita dall'ultima componente di v

Se il sistema lineare $b \cdot X = [1 \ 1 \ 1 \cdots 1]^T$ ha un'unica soluzione la matrice di output sarà la soluzione.

In caso contrario sarà la matrice nulla (dello stesso formato di X).

806. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab **alfa(v)** che abbia come variabile di input un vettore riga v e come output la matrice a costruita come segue:

$a = v \cdot v^T + d$ dove (con n opportuno) d è la matrice diagonale seguente:

$$d = \begin{pmatrix} 1/n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/(n-1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(n-2) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La funzione deve controllare se effettivamente v è un vettore riga, sostituire v con la sua trasposta se v è un vettore colonna e usare la prima riga di v se v è una matrice (usare comando **warning**)

807. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab denominata **alfa(a)** che abbia come variabile di input una matrice *a* e come output la matrice *b* fatta come segue:

$$\begin{array}{l} \text{Se } a \text{ è ret-} \\ \text{tangolare} \end{array} \quad b = \left(\begin{array}{ccc|c} a & & & I \\ \hline 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & \dots \\ \dots & \dots & & \dots \end{array} \right) \quad \text{Se } a \text{ è} \\ \text{quadrata} \quad b = \left(\begin{array}{ccc|c} a & & & a^T \\ \hline 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & \dots \\ \dots & \dots & & \dots \end{array} \right)$$

808. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab **alfa(v)** che abbia come variabile di input v . Se v è un vettore riga $v = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ l'output sarà la matrice colonna a costruita come segue:

Consideriamo innanzitutto la matrice quadrata

$$m = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-2} & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n & x_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice di output sarà la colonna degli autovalori della matrice $m \cdot m^T$.

Se v è vettore colonna, come sopra, ma usando v^T .

Se v è una matrice né riga né colonna come output si avranno gli autovalori della matrice $v \cdot v^T$

809. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab **alfa(a,b,n)** (a, b numeri reali, n numero intero ≥ 4). Il risultato sarà la matrice $n \times n$ fatta come segue:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} a & \dots & a & \dots & a \\ a+1 & \dots & a & \dots & a \\ \hline \dots & \dots & b & \dots & 0 \\ \dots & b+1 & & \ddots & \\ \dots & b & 0 & \dots & b \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Per esempio} \\ \mathbf{alfa}(3,7,6) \\ \text{darebbe co-} \\ \text{me risultato} \\ \text{la matrice} \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc} 3 & 12 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 11 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & 7 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & 7 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 & 7 \\ 8 & 7 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right)$$

810. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab denominata **alfa(a)**.

Il file funzione avrà come variabile di input un numero reale a e come output la tabulazione

della funzione $f(x) = \frac{a+x}{x^2+1}$ nell'intervallo $[0, 2]$ con passo 0.1.

La tabulazione consisterà in una matrice di due colonne. Per esempio, se $a = 1$, sarà così strutturata:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1.0000 \\ 0.1000 & 1.0891 \\ 0.2000 & \dots \\ \dots & \dots \\ 2.0000 & 0.6000 \end{pmatrix}$$

Inoltre verrà disegnato il grafico della funzione nell'intervallo dato.

811. Scrivere il listato di una file funzione MatLab **alfa(n)** avente come input un numero intero n e come output la matrice $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n-4 & 2n-2 & 2n \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ \pi & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e & e \\ 0 & \pi & 0 & 0 & \dots & 0 & e & e \\ 0 & 0 & \pi & 0 & \dots & 0 & e & e \\ 0 & 0 & 0 & \pi & \dots & 0 & e & e \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \pi & e & e \end{pmatrix}$$

Se n non è un numero intero o è minore di 4 la funzione darà errore e non verrà eseguita.

812. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab **alfa(n)** che abbia come variabile di input un numero n e come output la matrice a costruita come segue:

Se $n \geq 3$ poniamo $m = [n]$ (parte intera), se invece $n < 3$, poniamo $m = [6 - n]$ (sempre parte intera).

Il risultato sarà la matrice

$$a = \left(\begin{array}{cccc|cc} m & m-1 & \dots & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2^2 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 3^2 \\ & & \ddots & & & \dots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & \dots \\ n & 0 & & 0 & 1 & m^2 \end{array} \right)$$

813. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab **alfa(x)** che abbia come variabile di input una matrice x e come output la matrice a costruita come segue:

Se x non è un vettore con una sola riga, ma una matrice, il risultato sarà la matrice stessa e verrà emesso un avviso (comando **warning**).

Se invece x è un vettore riga $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, il risultato sarà la matrice

$$a = \left(\begin{array}{cccc|cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots & \dots & x_{n-2} & x_{n-1} & x_n \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \dots & \dots & x_n & x_1 & x_2 \\ x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & x_{n-3} & \dots & \dots & x_3 & x_2 & x_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & n & n & \dots & n & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & n & \dots & n & n & n \end{array} \right)$$

814. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab

Il file funzione **alfa(x, n)** avrà come variabili di input un numero reale x e un numero intero $n \geq 3$ e come output la matrice costruita come segue:

Sia innanzitutto
$$a = \left(\begin{array}{c|cccc} x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ n & & & & \\ \dots & & & & \\ n & & & & \end{array} \right)$$

Il risultato della funzione sarà il numero 1 se la matrice a ha tutti autovalori reali, sarà 0 in caso contrario.

815. Scrivere il listato di due files MatLab : un file *funzione* e uno script

- Il file funzione **alfa(z,n)** avrà come variabili di input un numero reale z e un numero intero $n \geq 4$ e come output una matrice b costruita come segue.

Il file deve creare innanzitutto il vettore $1 \times n$ così fatto:

$$v = (z, z+1, z+2, \dots, z+n-1)$$

e poi costruire la matrice $a = 2 \frac{v^T \cdot v}{\|v\|} - I$ (I identica).

La matrice b di output sarà la matrice 4×4 costituita dalle prime 4 righe e colonne di a .

NB: opzionalmente il file può controllare che n sia effettivamente un numero intero e maggiore o uguale a 4 e dare errore in caso contrario.

- Lo script esaminerà la matrice b ottenuta dalla funzione precedente per $n = 5$ e $z \in [0, 5]$ (con passo 0.1), risolverà il sistema lineare $bx = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ e scriverà su schermo la soluzione x solo nel caso in cui $|x| > 1$.

816. Scrivere il listato di **due** files MatLab : un file *funzione* e uno di tipo script

- Il file funzione **alfa(x,n)** avrà come variabili di input un numero reale x e un numero intero $n \geq 3$ e come output la matrice b che contiene una sottomatrice $(n-2) \times (n-2)$ tutta fatta di x .

$$b = \begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & \boxed{x \quad \dots \quad x} & & & 2 \\ n-2 & x & \dots & x & 3 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 2 & x & \dots & x & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

- Prima di calcolare b il file controllerà se effettivamente $n \geq 3$ e se è intero. Se $n < 3$ darà errore e interromperà il calcolo; se n non è intero lo sostituirà con la sua parte intera.

- Lo script esaminerà la matrice b ottenuta dalla funzione precedente per $n = 5$ e $x \in [0, 5]$ (con passo 0.1), ne calcolerà il massimo autovalore λ e lo scriverà su schermo nel caso in cui $12 > |\lambda| > 10$.

817. Scrivere il listato di due files MatLab : un file *funzione* e uno script

- Il file funzione **alfa(x,n)** avrà come variabili di input un numero reale x e un numero intero $n \geq 3$ e come output la matrice $n \times n$ costruita come segue:

Sia innanzitutto b la matrice $2 \times n$ così fatta:

$$b = \begin{pmatrix} x & x-0.1 & x-0.2 & \dots \\ x \cdot e^x & (x-0.1) \cdot e^{x-0.1} & (x-0.2) \cdot e^{x-0.2} & \dots \end{pmatrix}$$

La matrice di output sarà $b^T \cdot b + I$

- Lo script esaminerà le matrici ottenute per $n = 5$ e $x \in [0, 3]$ (con passo 0.1) per stabilire quale abbia il determinante più piccolo.

818. Scrivere il listato di due file *script* MatLab

1. Uno script che tracci, usando il passo 0.01, il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2+1} & \text{se } x \in [0, 1] \\ e^{1-x^2} & \text{se } x \in [1, 2] \end{cases}$$

2. Uno script che esamini ogni matrice del tipo $a = \begin{pmatrix} 2 & 2 & k \\ 2 & 3 & k^2-2 \\ k & k^2-2 & 3 \end{pmatrix}$ con $k \in [-3, 3]$

(ovviamente non tutte, usare il passo 0.1) e scriva su schermo il k se tutti gli autovalori sono positivi.

819. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab **alfa(a,n)** che, dati due numeri a, n costruisca come vettore riga la successione ricorsiva così definita

$$a_{i+1} = a_i^2 - 1$$

La successione avrà lunghezza n e inizierà con $a_1 = a$.

Per esempio, con $a = 2$, $n = 4$, il risultato sarebbe il vettore 2, 3, 8, 63.

Prima di essere eseguita la funzione dovrà controllare che n sia effettivamente un numero intero e maggiore o uguale a 4 e che a sia uno scalare e dare errore in caso contrario.

820. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab **alfa(v,w)** che, dati due vettori riga v, w calcoli il seguente vettore:

Se v e w hanno la stessa lunghezza il risultato sarà il vettore $\frac{v}{|v|} + \frac{w}{|w|}$.

Se v è più lungo di w , calcoli il vettore v_1 ottenuto eliminando le ultime componenti di v , in modo che abbia la stessa lunghezza di w e dia come risultato $\frac{v_1}{|v_1|} + \frac{w}{|w|}$.

Analogamente se w è più lungo di v . Prima di essere seguita la funzione controllerà che v e w siano effettivamente vettori riga e darà errore in caso contrario.

Dovrà inoltre controllare che né v né w siano il vettore nullo e dare errore in caso contrario.

801.

```
function p=alfa(x)
r1=x:x+10;
M=eye(9);
N=ones(9,2)*x;
rn=r1.^2;
m=[r1;M,N;rn];
[p,d]=eig(m'*m);
```

La matrice $\mathbf{p}$ esiste in quanto la matrice $m^T m$ è una matrice simmetrica.

802.

```
function x=alfa(n)
v=n:-1:1;
for id=1:n
    m(id,:)=v;
end
p1=[eye(n)*n,m;ones(n)*n,zeros(n)];
p=eye(2*n)+p1;
x=p\ (1:2*n)';
```

803.

```
function b=alfa(x,y)
r1=[2,x+2:2:x+20];
c1=(x+2:2:x+20)';
M=diag(y:-1:y-9);
N=M+ones(10)-eye(10);
a=[r1;c1,N];
if det(a)~=0
    b=inv(a);
else
    b=zeros(size(a));
end
```

804.

```
function m=alfa(x)
[r,c]=size(x);
if r~=1
    error('x non matrice riga')
end
a=[x,0;eye(c),x'];
s=eig(a+a');
m=diag(s);
```

805.

```
function x=alfa(v)
n=length(v);
w=(v(2:n))';
b=[v;w, diag(w)];
b(:,n)=ones(n,1)*v(n);
if det(b)~=0
    x=b\ones(n,1);
else
    x=zeros(n,1);
end
```

806.

```
function a=alfa(v)
[r,c]=size(v);
if r>1 & c==1
    v=v';
end
if r>1 & c>1
    v=v(1,:);
    warning('v ha più di una riga, verrà usata solo la prima')
end
n=length(v);
di=n:-1:1;
di1=1./di;
d=diag(di1);
a=v*v'+d;
```

807.

```
function b=alfa(a)
[r,c]=size(a);
if r==c
    b=[a,a';diag(1:r), zeros(r)];
else
    b=[a,eye(r);diag(1:c),a'];
end
```

808.

```
function b=alfa(v)
[r,c]=size(v);
if r>1 & c>1
    b=eig(v*v');
    return
end
if r>1 & c==1
    v=v';
end
n=length(v);
v1=[v(2:n),v(1)];
m=[v;v1;eye(n-2),zeros(n-2,2)];
b=eig(m*m');
```

809.

```
function b=alfa(a,b,n)
c1=(a:a+n-1)';
c2=(b+n-1:-1:b)';
M=ones(2,n-2)*a;
N=eye(n-2)*b;
b=[c1,c2,[M;N]];
```

810.

```
function b=alfa(a)
x=0:1:2;
y=(a+x)./(x.^2+1);
b=[x',y'];
plot(x,y)
shg
```

811.

```
function a=alfa(n)
if n<4 | fix(n)~=n
    error('n non valido')
end
r1=2:2:2*n;
r2=n:-1:1;
M=eye(n-2)*pi;
N=exp(1)*ones(n-2,2);
a=[r1;r2;M,N];
```

812.

```
function a=alfa(n)
if n>=3
    m=floor(n);
else
    m=floor(6-n);
end
r1=m:-1:1;
M=eye(m-1);
cn=((2:m).^2)';
a=[r1;M,cn];
a(m,1)=n;
```

813.

```
function a=alfa(x)
[r,n]=size(x);
if r~=1
    a=x;
    warning('x non vettore riga')
    return
end
r1=x;
r2=[x(3:n),x(1:2)];
r3=x(n:-1:1);
M=zeros(n-3,3);
N=ones(n-3)*n;
N1=tril(N);
a=[r1;r2;r3;M,N1];
```

814.

```
function flag=alfa(x,n)
r1=1:n;
a=[x.^r1;n*ones(n-1,1),eye(n-1)];
r=eig(a);
flag=1;
for id=1:n
    if real(r(id))~=r(id)
        flag=0;
    end
end
```

815.

```
function b=alfa(z,n)
if n~=fix(n) | n<4
    error('n non valido')
end
v=z:z+n-1;
a=2*(v'*v)/norm(v)-eye(n);
b=a(1:4,1:4);
```

```

for z=0:.1:5
    b=alfa(z,5);
    x=b\[1,1,1,1]';
    if norm(x)>1
        disp(x)
    end
end

```

816.

```

function b=alfa(x,n)
if n<3
    error('n minore di 3')
end
if n~=fix(n)
    n=fix(n);
end
r1=n:-1:1;
c1=(n-1:-1:2)';
M=ones(n-2)*x;
cn=(2:n-1)';
rn=1:n;
b=[r1;c1,M,cn;rn];

```

```

for x=0:.1:5
b=alfa(x,5);
s=eig(b);
lambda=max(s);
if abs(lambda)>10 & abs(lambda)<12
    disp(lambda)
end
end

```

817.

```

function c=alfa(x,n)
r1=x-(0:0.1:(n-1)/10);
r2=r1.*exp(r1);
b=[r1;r2];
c=b'*b+eye(n);

```

```

ris=Inf;
for id=0:0.1:3
    c=alfa(id,5);
    d=det(c);
    if d<ris
        ris=d;
        c1=c;
    end
end
disp(c1)

```

818. La funzione è continua, quindi per il secondo pezzo si può evitare di ricalcolarla nel punto 1

```

x1=0:.1:1;
x2=1.1:.1:2;
y1=(x1+1)./(x1.^2+1);
y2=exp(1-x2^2);
x=[x1,x2];
y=[y1,y2];
plot(x,y)

```



```
for k=-3:0.1:3
    a=[2,2,k;2,3,k^2-2;k,k^2-2,3];
    d=eig(a);
    flag=1;
    for id=1:3
        if d(id)<0
            flag=0;
        end
    end
    if flag==1
        disp(k)
    end
end
```

819.

```
function v=alfa(a,n)
[r,c]=size(a);
if r~=1 | c~=1
    error('a non scalare')
end
[r,c]=size(n);
if r~=1 | c~=1
    error('n non numero')
end
if n~=fix(n) | n<4
    error('n non valido')
end
v(1)=a;
for id=2:n
    v(id)=v(id-1)^2-1;
end
```

820.

```
function u=alfa(v,w)
[rv,nv]=size(v);
if rv~=1
    error('v non vettore riga')
end
[rw,nw]=size(w);
if rw~=1
    error('w non vettore riga')
end
if norm(v)==0 | norm(w)==0
    error('uno dei vettori è nullo')
end
n=min(nv,nw);
v1=v(1:n);
w1=w(1:n);
u=v1/norm(v1)+w1/norm(w1);
end
```