Spazi Euclidei

BASI ORTONORMALI, MATRICI ORTOGONALI

F 01. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalla base $\mathcal{B}$: $(1,0,2),(0,2,-1)$. Verificare che anche $\mathcal{C}$: $(1,2,1),(1,4,0)$ è base per V, ortonormalizzare le due basi mediante l'algoritmo di Gram-Schmidt e scrivere la matrice ortogonale di passaggio tra le due basi ortonormali.

F 02. Dati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$, determinare una base per il loro complemento ortogonale
$V_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x+2y-z+t=0\}$ $\qquad V_2 = L\{(1,0,-1,1)\ ,\ (1,1,1,0)\}$
$V_3 = L\{(1,3,-1,1)\}$

F 03. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare euclideo, completare i due vettori ortogonali $v_1(1,0,-1,1)$, $v_2(1,1,1,0)$ a base ortogonale di $\mathbb{R}^4$, mediante due vettori v_3, v_4. Dimostrare poi che $L\{v_3,v_4\} = L\{v_1,v_2\}^{\perp}$.

F 04. Data la matrice reale incompleta $P \in M_{33}(\mathbb{R})$, completarla *in tutti i modi possibili* in modo che sia ortogonale.
$$P = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & * \\ 2/3 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

F 05. Determinare una base ortonormale per ognuno dei seguenti spazi euclidei.

a. $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x-2y+z=0\}$ $\qquad$ b. $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x+2y-z=t\}$

c. $U = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 \ : \ x+z=2y=t-2u\}$

d. $U^{\perp}$ complemento ortogonale di U.

A 06. Sia $V = L\{1,x,x^2\}$ sottospazio di $C^{\infty}([0,1])$ col prodotto scalare $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$.
Determinare una base ortonormale per V prima utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt e poi in altro modo più semplice.

TRASFORMAZIONI LINEARI AUTOAGGIUNTE

F 11. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice A tramite la base canonica.

a. Dire perché φ è autoaggiunta.

b. Determinare una base *ortonormale* di autovettori per φ.

c. Scrivere due matrici P e D, P <u>ortogonale</u>, D diagonale, tali che $P^{-1}AP = D$.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

F 12. Sia $W = L\{(1,1,0,1),(1,0,1,2),(0,-1,1,1)\}$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$

a. Calcolare una base ortonormale per W.

b. Definire un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker(f) = W$, $\mathrm{Im}(f) = W^{\perp}$ e 2 sia l'unico autovalore non nullo.

c. Dire perché f è necessariamente autoaggiunta.

F 13. Diagonalizzare le seguenti matrici simmetriche reali mediante una matrice ortogonale speciale (determinare cioè P matrice ortogonale *con determinante* 1 e Δ matrice diagonale tali che $P^T AP = \Delta$).
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

C 14. Diagonalizzare le seguenti matrici simmetriche per mezzo di una matrice ortogonale speciale.
A matrice $n \times n$ tutta costituita da 1 ($a_{ij} = 1\,,\ \forall\, i,j$)
B matrice $n \times n$ tutta costituita da 1 tranne la diagonale che è nulla, ($a_{ij} = 1\,,\ \forall\, i \neq j$, $a_{ii} = 0\,,\ \forall\, i$), cioè $B = A - I$.

F 15. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che soddisfa le seguenti condizioni
$$f(1,2,0) = (2,4,0) \qquad f(2,-1,1) = (0,0,0) \qquad f(1,0,1) = (0,1,1)$$

a. Scrivere $A_f^{\mathcal{BB}}$, matrice associata a f tramite la base $\mathcal{B}$: $(1,2,0),(2,-1,1),(1,0,1)$

b. Scrivere tutti gli autovalori e tutti gli autovettori di f.

c. Dire perché f è autoaggiunta, scrivere una base <u>ortonormale</u> $\mathcal{C}$ di autovettori per f e la matrice $A_f^{\mathcal{CC}}$, associata a f tramite $\mathcal{C}$.

F 16. Definire $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ autoaggiunta con unici autovalori 2 e 3 tale che l'autospazio relativo a $\lambda = 2$ sia $L\{(1,1,0,1),(0,1,1,0)\}$. È φ unica ?

A 17. Dire per quale $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste una trasformazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ autoaggiunta con polinomio caratteristico $P_\varphi(x) = (x-1)(x-\lambda)$ e tale che $\varphi(1,3) = (2,0)$. Descrivere poi φ.

T 18. Siano φ, ψ trasformazioni lineari autoaggiunte di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V di dimensione n in sé, φ invertibile. Dire quali delle seguenti applicazioni sono anche sicuramente autoaggiunte.

$$2\varphi \qquad \varphi + 1 \qquad \varphi + \psi \qquad \varphi^2 \qquad \varphi^{-1} \qquad \psi \circ \varphi$$

T 19. Dimostrare che se φ è autoaggiunta allora $\operatorname{Im}\varphi = (\ker\varphi)^\perp$.

T 20. Provare con un controesempio che se $\operatorname{Im}\varphi = (\ker\varphi)^\perp$, φ non è necessariamente autoaggiunta.

FORME QUADRATICHE

F 21. È data la matrice simmetrica $A \in M_{44}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Scrivere la forma quadratica $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ associata ad A tramite la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
b. Determinare il carattere di definizione di Q.
c. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la matrice $A + aI$ è definita positiva.

F 22. Scrivere in forma canonica ciascuna delle due forme quadratiche $Q_1, Q_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e determinare i vettori v tali che $Q_1(v) = 0$ e quelli tali che $Q_2(v) = 0$.

$$Q_1(x,y,z) = (x\ y\ z)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad Q_2(x,y,z) = (x\ y\ z)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

F 23. Data la forma quadratica $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$.

$$Q(x,y,z) = ax^2 + 6xy + ay^2 + az^2 + 8yz$$

a. Scriverla in forma matriciale.
b. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ è definita positiva, usando il criterio dei minori principali.

F 24. Studiare mediante riduzione a forma di Sylvester il carattere di definizione e i segni degli autovalori delle matrici simmetriche A e B al variare di $a \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a-4 & a-4 \\ 1 & a-4 & a-1 \end{pmatrix}$$

C 25. Data la forma quadratica $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$Q(x,y,z,t) = x^2 + 4xy + 4y^2 + 4yz + z^2 + 4zt + t^2$$

Dimostrare che esistono una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ e quattro numeri reali positivi a, b, c, d tali che se $v \in \mathbb{R}^4$ ha coordinate $[x_0\ y_0\ z_0\ t_0]^T$ rispetto a $\mathcal{B}$, allora $Q(v) = ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 - dt_0^2$ (si chiede di provare l'esistenza di $\mathcal{B}$ e di a, b, c, d, non di determinarli).

F 26. Determinare il carattere di definizione delle seguenti forme quadratiche definite su $\mathbb{R}^3$, scegliendo ogni volta il metodo più opportuno.

a. $x^2 + y^2 + xy$	b. $x^2 + 2xy + y^2 + z^2$	c. $xy + xz + yz$
d. $x^2 + yz$	e. $3x^2 - y^2$	f. $y^2 + z^2 - xy$
g. $x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz$	h. $x^2 + 4xy + 2y^2 + 2yz + 3z^2$	i. $x^2 + xy + xz - z^2$

C 27. Determinare il carattere di definizione della forma quadratica $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita a lato.

$$Q(x,y,z) = (x\ y\ z)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

C 28. Sia $V = L\{(1,2,0,1),(0,1,1,-2)\}$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Determinare una forma quadratica $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tale che $Q(v) > 0$ per ogni $v \in V$ $(v \neq 0)$ e $Q(v) < 0$ per ogni $v \in V^\perp$ $(v \neq 0)$.