

600. a. Rotazione di  $\pi/2$ , la matrice di rotazione è  $\begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Quindi le formule sono:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  cioè:  $\begin{cases} x = -Y \\ y = X \end{cases}$  e inversamente  $\begin{cases} X = y \\ Y = -x \end{cases}$

b. Rotazione di  $\pi/2$  come sopra, ma nuova origine in  $\{x = 2; y = 0\}$ :  $\begin{cases} x - 2 = -Y \\ y = X \end{cases}$   $\begin{cases} X = y \\ Y = -x + 2 \end{cases}$

c. Rotazione di  $\pi$  e nuova origine in  $\{x = 2; y = 2\}$ :  $\begin{cases} x = -X + 2 \\ y = -Y + 2 \end{cases}$   $\begin{cases} X = -x + 2 \\ Y = -y + 2 \end{cases}$

d. Rotazione di  $-\pi/6$ , matrice  $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$   $\begin{cases} x = (\sqrt{3}X + Y)/2 \\ y = (-X + \sqrt{3}Y)/2 \end{cases}$   $\begin{cases} X = (\sqrt{3}x - y)/2 \\ Y = (x + \sqrt{3}y)/2 \end{cases}$

e. Rotazione di  $-\pi/6$  e nuova origine nel punto  $\{x = x_0; y = 1\}$ .

$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  quindi:  $\begin{cases} x = x_0 + (\sqrt{3}X + Y)/2 \\ y = 1 + (-X + \sqrt{3}Y)/2 \end{cases}$

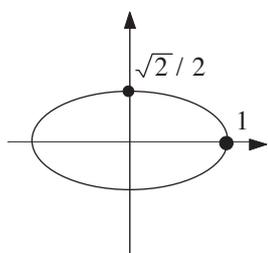
La trasformazione inversa si ha trasponendo la matrice:  $\begin{cases} X = (\sqrt{3}(x - x_0) - (y - 1))/2 \\ Y = ((x - x_0) + \sqrt{3}(y - 1))/2 \end{cases}$

che si scrive anche come  $\begin{cases} X = (\sqrt{3}x - y - \sqrt{3}x_0 + 1)/2 \\ Y = (x + \sqrt{3}y - x_0 - \sqrt{3})/2 \end{cases}$ .

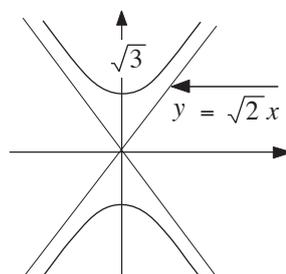
La vecchia origine giace sull'asse  $X$ , quindi, sostituendo  $\{x = 0; y = 0\}$  nelle seconde formule, si ha  $\{X = (-\sqrt{3}x_0 + 1)/2; Y = (-x_0 - \sqrt{3})/2\}$  e dev'essere  $Y = 0$ , cioè  $x_0 = -\sqrt{3}$ .

Le formule sono quindi:  $\begin{cases} x = -\sqrt{3} + (\sqrt{3}X + Y)/2 \\ y = 1 + (-X + \sqrt{3}Y)/2 \end{cases}$   $\begin{cases} X = (\sqrt{3}x - y + 4)/2 \\ Y = (x + \sqrt{3}y)/2 \end{cases}$

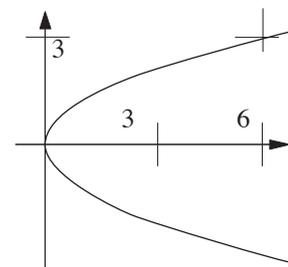
601. a. Ellisse



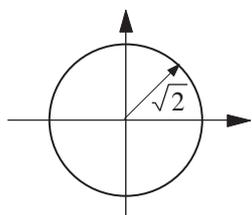
b. Iperbole



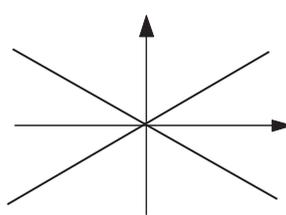
c. Parabola



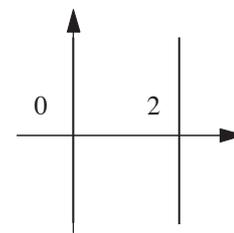
d. Circonferenza



e. Due rette incidenti  
 $x = \pm\sqrt{3}y$



f. Due rette parallele:  
 $x = 2$   $x = 0$



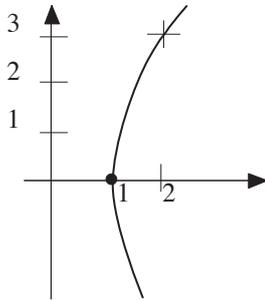
g. Ellisse senza punti reali.

h. Un solo punto:  $(0, 0)$  (due rette incidenti complesse coniugate).

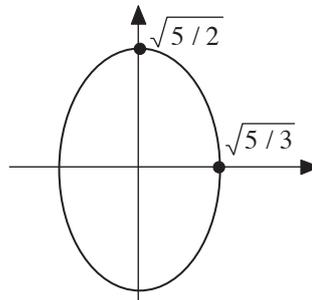
i. Unione di due rette : gli assi  $x = 0$  e  $y = 0$ .

j. Nessun punto reale (due rette parallele complesse coniugate).

k. Parabola

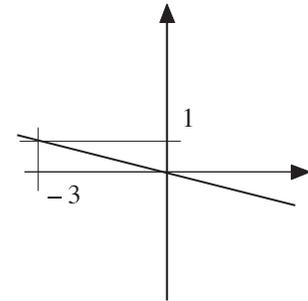


l. Ellisse



m. Due rette incidenti:

$$x = 0 \quad x = -3y$$



n. Unione di due rette parallele:  $x = 1$  e  $x = 2$ .

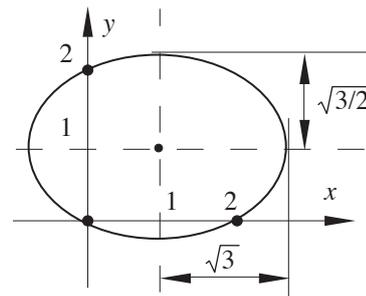
o. Una retta (contata due volte):  $x = y$ .

p. Un solo punto:  $(-1, 0)$  (due rette incidenti complesse coniugate).

602. L'ellisse si può scrivere come:

$$\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{3/2} = 1$$

Il centro è quindi  $(1, 1)$  e i semiassi misurano rispettivamente  $\sqrt{3}$  e  $\sqrt{3/2}$ , per cui i vertici sono  $V_{1,2} = (1 \pm \sqrt{3}, 1)$  e  $V_{3,4} = (1, 1 \pm \sqrt{3/2})$ . Dato che  $a^2 = 3$  e  $b^2 = 3/2$ , si ha  $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3/2}$ . I fuochi sono pertanto  $F_{1,2} = (1 \pm \sqrt{3/2}, 1)$ . Intersecando l'ellisse con gli assi coordinati si trovano i punti  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$ . Tenendo conto di questi punti è possibile eseguire un disegno più accurato.



603. a. Completiamo i quadrati:

$$(x^2 + x + 1/4) - (y^2 + 3y + 9/4) = 1/4 - 9/4$$

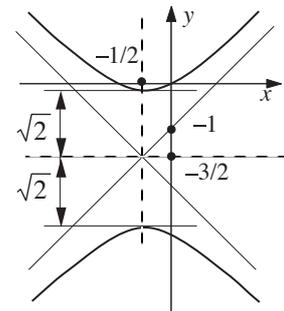
$$(x + 1/2)^2 - (y + 3/2)^2 = -2$$

$$-\frac{(x + 1/2)^2}{2} + \frac{(y + 3/2)^2}{2} = 1$$

Si tratta quindi di una iperbole di centro  $(-1/2, -3/2)$  con asintoti paralleli alle due bisettrici degli assi cartesiani. Gli asintoti sono perciò  $(x + 1/2) \pm (y + 3/2) = 0$ .

Inoltre ha i vertici lungo l'asse di simmetria parallelo all'asse  $y$ . I vertici sono  $V_{1,2} = (-1/2, -3/2 \pm \sqrt{2})$ . Il fatto che passi per l'origine aiuta a disegnarla con maggior precisione.

Per quanto riguarda i fuochi:  $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2 + 2} = 2$  e quindi sono  $F_{1,2} = (-1/2, -3/2 \pm 2)$



b. Completiamo i quadrati:

$$-x^2 + 3y^2 + 2y + 1 = 0$$

$$-x^2 + 3\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) = -1 + 3 \cdot \frac{1}{9}$$

$$-x^2 + 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{2}{3}$$

$$x^2 - 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \quad \frac{x^2}{2/3} - \frac{(y + 1/3)^2}{2/9} = 1$$

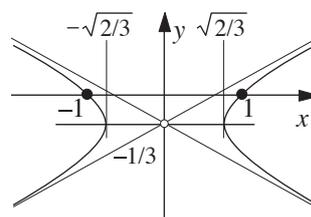
L'iperbole ha centro in  $(0, -1/3)$ . Gli asintoti sono le rette  $x/(\sqrt{2/3}) \pm (y + 1/3)/(\sqrt{2/9}) = 0$ , rette che hanno coefficiente angolare  $\sqrt{3}/3$  e che quindi formano angoli di  $\pm\pi/6$  con l'asse delle ascisse.

I vertici distano  $\sqrt{2/3}$  dal centro e sono quindi:

$$V_{1,2} = (\pm\sqrt{2/3}, -1/3).$$

I fuochi sono:

$F_{1,2} = (\pm\sqrt{2/3 + 2/9}, -1/3) = (\pm\sqrt{8/9}, -1/3)$ . Per disegnarla meglio cerchiamone anche due punti. Per esempio le intersezioni con l'asse  $x$  sono i due punti  $(\pm 1, 0)$ .



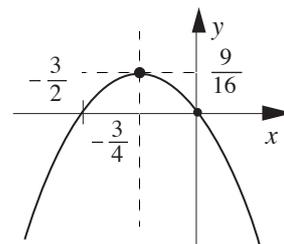
604. a. Completiamo i quadrati:

$$2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) = -2y + 2 \cdot \frac{9}{16}$$

$$2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = -2\left(y - \frac{9}{16}\right) \quad \left(y - \frac{9}{16}\right) = -\left(x + \frac{3}{4}\right)^2$$

Quindi il vertice è  $V(-3/4, 9/16)$ . La parabola ha la concavità verso il basso e passa per l'origine. Questo basta a disegnarla.

Il fuoco è  $F = (-3/4, 9/16 - 1/4) = (-3/4, 5/16)$ , la direttrice è  $y = 9/16 + 1/4$  cioè  $y = 13/16$ .



b. Completiamo i quadrati:

$$2x - 1 = -3y^2 - y \quad 2x - 1 - 3 \cdot \frac{1}{36} = -3\left(y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{36}\right)$$

$$2\left(x - \frac{13}{24}\right) = -3\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 \quad \left(x - \frac{13}{24}\right) = -\frac{3}{2}\left(y + \frac{1}{6}\right)^2$$

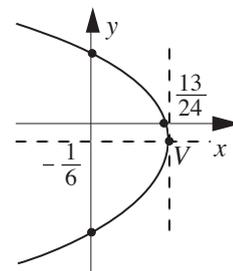
Quindi il vertice è  $V(13/24, -1/6)$ . La parabola ha la concavità verso sinistra.

Per disegnarla intersechiamola con gli assi: ponendo  $y = 0$  troviamo il punto  $(1/2, 0)$ , ponendo  $x = 0$  troviamo i punti

$\left(0, \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}\right)$  cioè circa  $(0, 0.43)$  e  $(0, -0.76)$ . Questo basta a disegnarla.

Il fuoco è  $F(13/24 - 1/(4 \cdot 3/2), -1/6) = (-3/8, -1/6)$ , la direttrice è  $x = 13/24 + 1/(4 \cdot 3/2)$ , cioè  $x = 17/24$ .

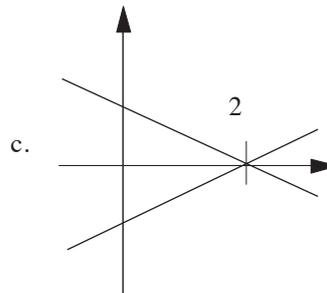
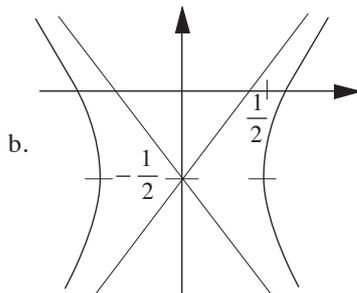
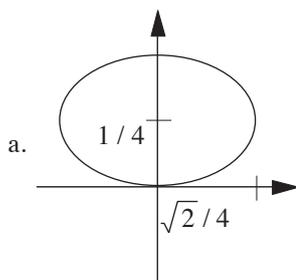
$$2x - \frac{13}{12} = -3\left(y + \frac{1}{6}\right)^2$$



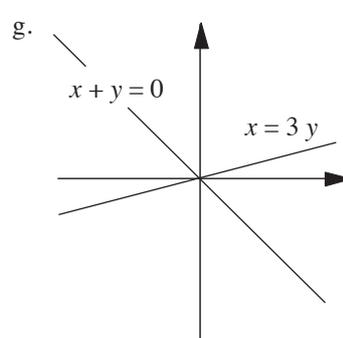
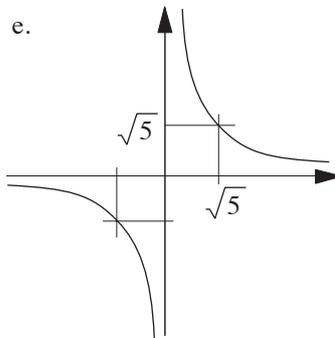
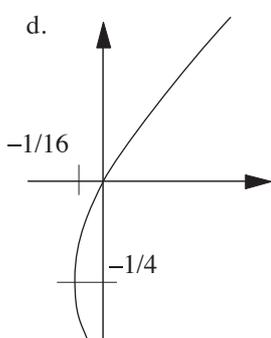
605. a. Ellisse:  $\frac{x^2}{1/8} + \frac{(y - 1/4)^2}{1/4} = 1$

b. Iperbole:  $\frac{x^2}{1/4} - \frac{(y + 1/2)^2}{3/4} = 1$ . Gli asintoti sono:  $(y + 1/2) = \pm\sqrt{3}x$

c. Unione di due rette incidenti:  $y = \pm\sqrt{2}/2(x - 2)$



- d. Parabola:  $(y + 1/4)^2 = 2(x + 1/16)$   
 e. Iperbole di asintoti:  $x = 0$  e  $y = 0$ .  
 f. Ellisse senza punti reali.  
 g. Unione di due rette incidenti:  $x + y = 0$  e  $x = 3y$ .



- h. Due rette parallele non reali.

606. a. L'iperbole ha centro  $(2, -1)$  ed è  $\frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$ . Gli asintoti sono paralleli alle bisettrici degli assi e sono  $\frac{x-2}{a} \pm \frac{y+1}{b} = 0$ , da cui  $a = b$ .

L'iperbole passa per  $(0, 0)$ , quindi  $(4/a^2) - (1/a^2) = 1$ , da cui  $a^2 = 3$ .

L'iperbole è pertanto  $\frac{(x-2)^2}{3} - \frac{(y+1)^2}{3} = 1$ .

b. Gli asintoti sono le rette  $y = \pm 2(x-1)$  che si possono scrivere anche come  $\frac{y}{2} \pm (x-1) = 0$ , per cui l'iperbole ha equazione  $\frac{y^2}{4} - (x-1)^2 = a^2$ . Perché passi per il punto  $(0, 3)$  occorre che  $\frac{9}{4} - 1 = a^2$ , quindi  $a^2 = 5/4$ . L'iperbole è perciò:  $y^2 - 4(x-1)^2 = 5$ .

c. La parabola ha vertice  $(1, 1)$  ed è quindi  $(y-1) = a(x-1)^2$ . Passa per  $(0, 0)$ , quindi  $-1 = a$ . La parabola è  $(y-1) = -(x-1)^2$ .

d. L'ellisse ha centro  $(1, -1)$  ed è  $\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$ . Il semiasse parallelo all'asse  $y$  misura 2, quindi  $b = 2$ . Inoltre passa per  $(0, 0)$ , quindi  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{4} = 1$ , da cui  $a^2 = 4/3$ .

L'ellisse è:  $\frac{3(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ .

e. Basta scrivere il prodotto delle equazioni delle due rette. La conica è:  $(x-y+1)(x+3y) = 0$ .

607. Completiamo i quadrati (anzi l'unico quadrato):  $(x+a)^2 + ay^2 = a^2 - 2$ .

La parte di secondo grado, che decide se una conica è di tipo parabolico, iperbolico o ellittico, dipende solo da  $a$  come coefficiente di  $y^2$ . Pertanto:

Se  $a = 0$  è di tipo parabolico: precisamente  $x^2 = -2$  cioè coppia di rette parallele, ma non reali.

Se  $a < 0$  è di tipo iperbolico ed è un'iperbole, purché non si annulli il termine noto. Il termine noto si annulla per  $a = \pm\sqrt{2}$ . Quindi, se  $a < 0$  e  $a \neq -\sqrt{2}$ , si tratta di un'iperbole, se  $a = -\sqrt{2}$  è una coppia di rette reali.

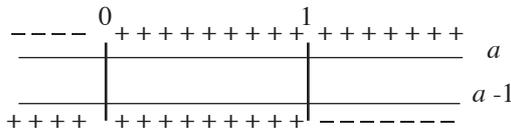
Se  $a > 0$  è di tipo ellittico ed è un'ellisse, purché il termine noto sia positivo. Il termine noto è positivo per  $a > \sqrt{2}$ , quindi, se  $a > \sqrt{2}$ , si tratta di un'ellisse, se  $0 < a < \sqrt{2}$  non ha punti reali. Se infine  $a = \sqrt{2}$  si tratta di un'ellisse degenera che di reale ha solo il punto  $(-a, 0)$ .

Non è mai una circonferenza (dovrebbe essere  $a = 1$ , ma in questo caso non ha punti reali).

In conclusione:

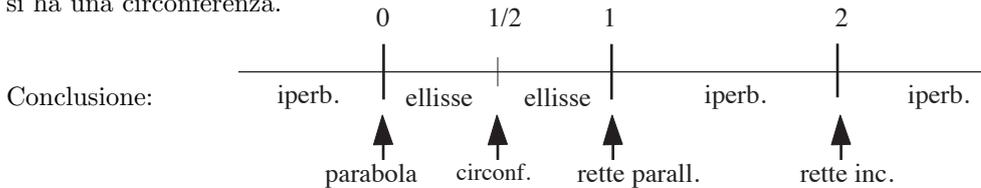
$a < -\sqrt{2}$	$a = -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < a < 0$	$a = 0$	$0 < a < \sqrt{2}$	$a = \sqrt{2}$	$a > \sqrt{2}$
iperbole	2 rette reali	iperbole	rette // non reali	non reale	un punto	ellisse

608. Esaminiamo i segni dei coefficienti di  $x^2$  e  $y^2$  per ogni  $a \in \mathbb{R}$ :



- Per cui:
- Se  $a > 0$  tipo iperbolico
- Se  $0 < a < 1$  tipo ellittico
- Se  $a > 1$  tipo iperbolico
- Se  $a = 0, 1$  tipo parabolico

Quelle di tipo iperbolico sono tutte iperboli, tranne  $a = 2$  per cui è coppia di rette incidenti. Quelle di tipo parabolico sono tutte parabole, tranne  $a = 1$  per cui è coppia di rette parallele. Quelle di tipo ellittico sono tutte ellissi a punti reali dato che passano per  $(0, 0)$ . Per  $a = 1/2$  si ha una circonferenza.



**STUDIO DI CONICHE**

**Nota:** Per studiare le coniche si esaminano il determinante della matrice associata (che chiameremo  $A$ ) e il carattere di definizione della forma quadratica che è dato dal segno del determinante della matrice  $2 \times 2$  associata (che chiameremo  $B$ ). Per vedere se un'ellisse ha punti reali si cerca di intersecarla con rette passanti per il centro di simmetria. Per vedere è una circonferenza si cerca se  $a_{11} = a_{22}$  e  $a_{12} = 0$  e se ha punti reali. Infine un'iperbole è equilatera se  $a_{11} = -a_{22}$ .

- 611. a. La matrice  $B$  della forma quadratica ha determinante 0, quindi la f.q. è semidefinita. La matrice  $A$  ha determinante non nullo quindi si tratta di una parabola.
- b. La matrice  $B$  ha determinante negativo, quindi la f.q. è indefinita. La matrice  $A$  ha determinante non nullo quindi si tratta di una iperbole non equilatera (dato che  $a_{11} \neq -a_{22}$ ).
- c. La matrice  $B$  ha determinante negativo, quindi la f.q. è indefinita. La matrice  $A$  ha determinante 0, quindi si tratta di una coppia di rette incidenti.
- d. La matrice  $B$  ha determinante positivo, quindi la f.q. è definita. La matrice  $A$  ha determinante 0, quindi si tratta di una coppia di rette *coniugate non reali* che di reale ha solo il punto  $(0, 0)$ .
- e. La matrice  $B$  ha determinante positivo, quindi la f.q. è definita. La matrice  $A$  ha determinante non nullo quindi si tratta di un'ellisse. Per vedere se ha punti reali, senza cercare il centro, intersechiamola con tutte le rette del tipo  $y = k$ . Si trova un'equazione di secondo grado il cui discriminante è  $\Delta = -k^2 - k - 1$  è sempre negativo per ogni  $k \in \mathbb{R}$ , quindi l'ellisse non ha punti reali.
- f. La matrice  $B$  della forma quadratica ha determinante positivo, quindi la f.q. è definita. La matrice  $A$  ha determinante non nullo quindi si tratta di un'ellisse. Ha punti reali, perché passa per  $(0, 0)$ .
- g. Basta completare i quadrati per vedere che si tratta di una circonferenza di centro  $C(1/6, 0)$  e raggio  $1/6$ .
- h. La matrice  $B$  della forma quadratica ha determinante negativo, quindi la f.q. è indefinita. La matrice  $A$  ha determinante non nullo quindi si tratta di una iperbole equilatera ( $a_{11} = a_{22} = 0$ ).

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} 4 & 2 & -1/2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & -3 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{array} \right)$$

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

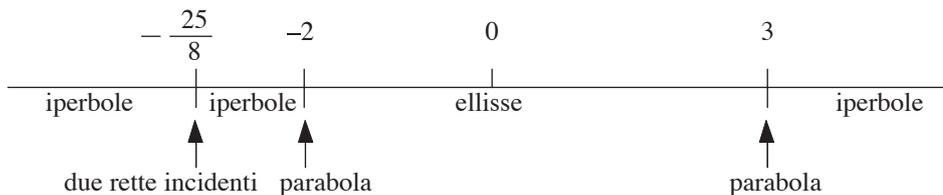
$$A = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{array} \right)$$

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

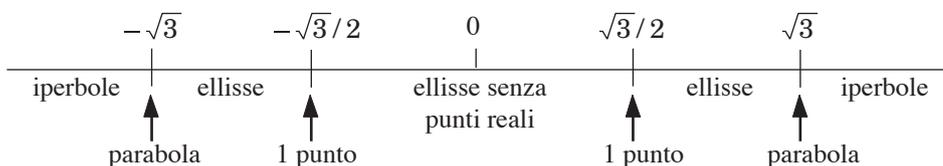
$$A = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{array} \right)$$

612. a. Si ha:  $\det(B) = 6 + \lambda - \lambda^2$ , quindi  $\det(B) > 0$  per  $-2 < \lambda < 3$ . La matrice  $A$  ha determinante 0 per  $\lambda = -25/8$ . Le ellissi sono tutte a punti reali perché passano per  $(0, 0)$ . Non ci sono

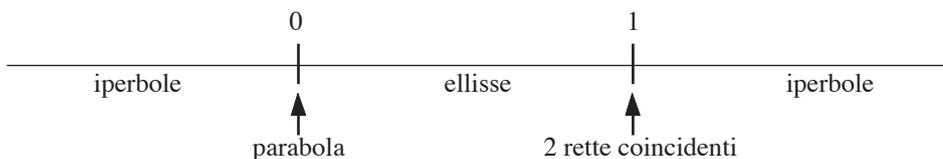
circonferenze. Per  $\lambda = -7$  c'è l'unica iperbole equilatera.



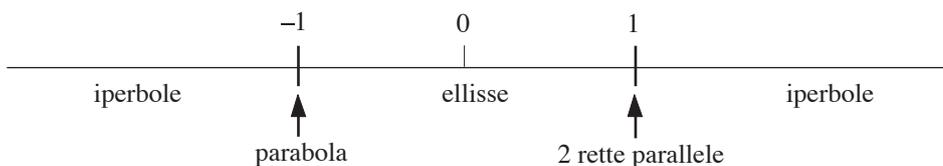
- b. Si ha:  $\det(B) = 3 - \lambda^2$ , quindi  $\det(B) > 0$  per  $-\sqrt{3} < \lambda < \sqrt{3}$ . La matrice  $A$  ha determinante 0 per  $\lambda = \pm\sqrt{3}/2$ . Per distinguere le ellissi a punti reali dalle altre si può considerare la retta  $2\lambda x + 6y = 0$  che è la derivata parziale rispetto a  $y$  e quindi passa sempre per il centro di simmetria. Ponendola a sistema con l'equazione della conica, si trova che solo per  $|\lambda| \geq \sqrt{3}/2$  ci sono intersezioni reali, quindi solo quelle ellissi hanno punti reali. Un altro modo più empirico è il seguente: per  $\lambda = 0$  l'ellisse non ha evidentemente punti reali, mentre per  $\lambda = 1$  e  $\lambda = -1$  ne ha. "Per continuità", allora, nell'intervallo  $(-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$ , le ellissi non hanno punti reali. Non ci sono circonferenze. Non ci sono iperboli equilatera.



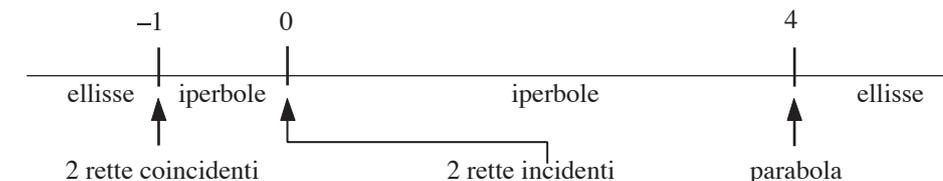
- c. Si ha:  $\det(B) = \lambda - \lambda^2$ , quindi  $\det(B) > 0$  per  $0 < \lambda < 1$ . La matrice  $A$  ha determinante 0 per  $\lambda = 1$ . Per  $\lambda = 1$  la conica si scrive come  $(x + y + 1)^2 = 0$  ed è una coppia di rette coincidenti. Non ci sono circonferenze. Le ellissi hanno tutte punti reali (intersecandole con  $x = 0$  si trova sempre  $y = -1$ ). Iperbole equilatera per  $\lambda = -1$ .



- d. Si ha:  $\det(B) = 1 - \lambda^2$ , quindi  $\det(B) > 0$  per  $-1 < \lambda < 1$ . La matrice  $A$  ha determinante 0 per  $\lambda = 1$ . Per  $\lambda = 1$  la conica si scrive subito come  $(x + y)(x + y + 2) = 0$  ed è quindi una coppia di rette parallele. Le ellissi sono tutte a punti reali perché contengono il punto  $(0, 0)$ . Per  $\lambda = 0$  si ha una circonferenza. Non ci sono iperboli equilatera.

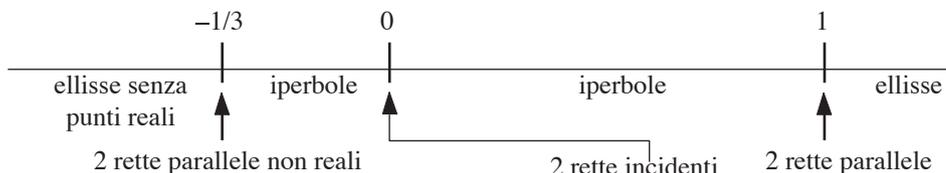


- e. Si ha:  $\det(B) = -4 - 3\lambda + \lambda^2$ , quindi  $\det(B) > 0$  per  $\lambda < -1$  e per  $\lambda > 4$ . La matrice  $A$  ha determinante  $-\lambda/4 - \lambda^2/2 - \lambda^3/4$  che si annulla per  $\lambda = 0$  e per  $\lambda = -1$ . Non ci sono circonferenze. Le ellissi sono tutte a punti reali perché contengono il punto  $(0, 0)$ . Per  $\lambda = -1$  la conica è  $-x^2 + 4xy - 4y^2 = -(x - 2y)^2 = 0$  ed è una coppia di rette coincidenti. Per  $\lambda = 3/2$  iperbole equilatera.



- f. Si ha:  $\det(B) = -1 - 2\lambda + 3\lambda^2$ , quindi  $\det(B) > 0$  per  $\lambda < -1/3$  e per  $\lambda > 1$ . La matrice  $A$  ha determinante  $-\lambda - 2\lambda^2 + 3\lambda^3$  e si annulla per  $\lambda = -1, 0, 1/3$ . Tutte le ellissi hanno

centro  $(0, 0)$ , dato che la conica non ha termini di grado 1. Quindi per distinguere quelle a punti reali basta intersecarle con la retta  $x = 0$  che passa sempre per il centro e si vede che ha intersezione solo per  $\lambda > 0$ . Per  $\lambda = -1/3$  la conica è  $((2/3)x + y)^2 + 1/3 = 0$ , quindi non ha punti reali (due rette parallele non reali). Per  $\lambda = 1$  la conica è  $(2x + y)^2 - 1 = 0$ , quindi è costituita dalle due rette parallele  $2x + y = \pm 1$ . Non ci sono circonferenze. Non ci sono iperboli equilateri.



613. a. Per scomporre la forma quadratica uguagliamola a zero:  $3x^2 + 2xy - y^2 = 0$ . Dividendo per  $y^2$ , si ottiene un'equazione di secondo grado in  $x/y$ :  $3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0$ . Le soluzioni sono  $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}, -1$  per cui la forma quadratica è  $3\left(\frac{x}{y} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{y} + 1\right)$  e, moltiplicando per  $y^2$  si ha:  $(3x - y)(x + y)$ . Dato che mancano i termini di grado 1, il centro è  $(0, 0)$ . Gli asintoti sono quindi le rette parallele a  $3x - y = 0$  e  $x + y = 0$  e passanti per  $(0, 0)$ , cioè proprio  $3x - y = 0$  e  $x + y = 0$ .

b. La forma quadratica si scompone subito come  $x \cdot (x + y) = 0$ . Il centro della conica si trova con il sistema delle derivate parziali  $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$ . La soluzione è  $C(-1, 4)$ . Gli asintoti sono le rette parallele a  $x = 0$  e  $x + y = 0$  e passanti per  $C$ , cioè:  $x + 1 = 0$  e  $x + y = 3$ .

c. Per scomporre la forma quadratica scriviamo  $x^2 + 3xy + y^2 = 0$  e risolviamo l'equazione di 2° grado  $(x/y)^2 + 3(x/y) + 1 = 0$ . Si trova:  $\frac{x}{y} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Il centro della conica si trova risolvendo il sistema delle derivate parziali ed è  $\left(\frac{8}{5}, -\frac{7}{5}\right)$ , quindi gli asintoti sono:  $2(x - 8/5) = (-3 \pm \sqrt{5})(y + 7/5)$ .

614. a. La forma quadratica è associata alla matrice simmetrica  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  i cui autovalori sono 5 e 1. Il centro è  $(0, 0)$ , quindi la forma canonica è  $5X^2 + Y^2 = 7$  o meglio  $\frac{X^2}{7/5} + \frac{Y^2}{7} = 1$ . I semiassi misurano perciò  $\sqrt{7/5}$  e  $\sqrt{7}$ .

b. Come sopra gli autovalori della matrice  $B$  della forma quadratica sono 5 e 1. Ma il centro è  $(-1, 2)$ , quindi, prima di scrivere la forma canonica, occorre traslare:  $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$  e l'equazione diventa  $3X^2 + 4XY + 3Y^2 = 14$ . La forma canonica è perciò  $5\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 = 14$  e i semiassi misurano  $\sqrt{14/5}$  e  $\sqrt{14}$ .

615. Il sistema delle derivate parziali è  $\begin{cases} 6x + 6y - 6 = 0 \\ 6x - 10y + 10 = 0 \end{cases}$ . La soluzione è il centro:  $C(0, 1)$ . Le direzioni degli assi sono date dagli autovettori della forma quadratica che è associata alla matrice simmetrica  $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ . Gli autovalori di  $B$  sono 4, -6. Rispettivi autovettori sono  $v_1(3, 1)$  e  $v_2(1, -3)$ . Quindi gli assi sono le rette che passano per  $C$  e hanno questi vettori direzionali, cioè:  $x - 3y + 3 = 0$  e  $3x + y - 1 = 0$ .

616. a. La matrice  $A$  ha determinante non nullo e  $\det(B) < 0$ , quindi è un'iperbole. Gli autovalori della forma quadratica sono -1, 4. Autovettori rispettivi sono  $(1, 2)$ ,  $(2, -1)$ . Il sistema delle derivate parziali è  $\{6x - 4y - 6 = 0; -4x + 4 = 0\}$ , quindi il centro della conica è  $C(1, 0)$ . Gli assi di simmetria hanno come versori gli autovettori e passano per  $C$ . La forma quadratica della conica si spezza in  $x(3x - 4y)$ , quindi gli asintoti passano per  $C$  e sono

paralleli a  $x = 0$  e  $3x - 4y = 0$ .

Gli assi, gli asintoti e un suo punto qualunque, per esempio  $(0, 0)$ , permettono di disegnarla con buona precisione.

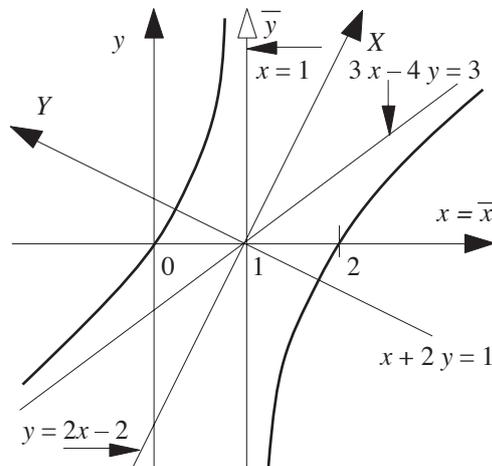
Per avere la forma canonica, prima operiamo la traslazione di  $O$  in  $C$ :

$$\begin{cases} \bar{x} = x - 1 \\ \bar{y} = y \end{cases} \quad \begin{cases} x = \bar{x} + 1 \\ y = \bar{y} \end{cases} \quad \text{e si ha:}$$

$3\bar{x}^2 - 4\bar{x}\bar{y} - 3 = 0$ . Per la rotazione si assumono come versori degli assi gli autovettori normalizzati e orientati in modo che la coppia sia positiva, per esempio  $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ ,  $(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ . La rotazione si scrive ponendo gli autovettori in colonna:

$$\begin{cases} x - 1 = \bar{x} = (X - 2Y)/\sqrt{5} \\ y = \bar{y} = (2X + Y)/\sqrt{5} \end{cases}$$

La forma canonica  $-X^2 + 4Y^2 - 3 = 0$  si scrive conoscendo gli autovalori e il termine noto che si ricava dall'equazione in  $\bar{x}, \bar{y}$ .



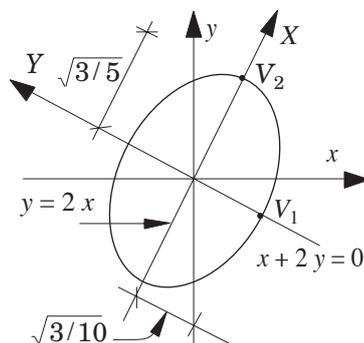
- b. La matrice  $A$  ha determinante non nullo e  $\det(B) > 0$ , quindi è un'ellisse con punti reali; per esempio ponendo  $y = 0$  si trovano  $(\pm\sqrt{3}/3, 0)$ . Gli autovalori della forma quadratica sono 5, 10. Autovettori rispettivi sono  $(1, 2)$ ,  $(-2, 1)$ .

Normalizzandoli si ottiene una base ortonormale destrorsa. Gli assi sono le rette passanti per  $C$  e parallele agli autovettori. Non essendoci termini di primo grado, il centro è  $C(0, 0)$ , quindi la forma canonica è immediata ed è  $5x^2 + 10y^2 = 3$  (autovalori come coefficienti). Dalla forma canonica si ricavano immediatamente le lunghezze dei semiassi:  $a = \sqrt{3/5}$  e  $b = \sqrt{3/10}$ .

La rotazione è  $\begin{cases} x = (X - 2Y)/\sqrt{5} \\ y = (2X + Y)/\sqrt{5} \end{cases}$ .

Due vertici si hanno trovando due punti sugli assi che abbiano distanza  $a$  e  $b$  da  $C$  e si ha:

$$V_1 = (\sqrt{6}/5, -\sqrt{6}/10) \quad V_2 = (\sqrt{3}/5, 2\sqrt{3}/5).$$



- c. La matrice  $A$  ha determinante non nullo e  $\det(B) = 0$ , quindi è una parabola. Gli autovalori della forma quadratica sono 0, 5. Gli autospazi sono rispettivamente  $(2t, -t)$ ,  $(t, 2t)$ . Un versore per l'asse è l'autovettore relativo all'autovalore 0.

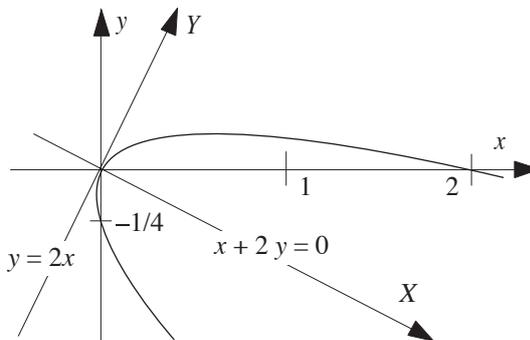
Dalla trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} x = (2X + Y)/\sqrt{5} \\ y = (-X + 2Y)/\sqrt{5} \end{cases} \quad \text{che usa i versori}$$

$(2, -1)$ ,  $(1, 2)$  normalizzati o inversamente  $\begin{cases} X = (2x - y)/\sqrt{5} \\ Y = (x + 2y)/\sqrt{5} \end{cases}$  si ricavano

la forma canonica  $X = 5Y^2$  e il vertice  $V(0, 0)$ . Per disegnarla basta un punto per esempio  $(2, 0)$ .

Altro modo: L'equazione si scrive come  $(x + 2y)^2 - 2x + y = 0$ . Dato che  $x + 2y = 0$  e  $-2x + y = 0$  sono ortogonali, si arriva subito al cambio di coordinate di sopra (e si vede che  $V = (0, 0)$ ).



- d. La matrice  $A$  ha determinante non nullo e  $\det(B) = 0$ , quindi è una parabola. Gli autovalori della matrice  $B$  sono  $0, 5$ . Autovettori rispettivamente  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$ . L'asse è parallelo all'autovettore relativo a  $0$ .

Per trovare  $V$  si interseca la parabola con una retta ortogonale all'asse, per esempio  $y = x$ , e si trovano i punti  $(0, 0)$  e  $(2, 2)$ . Il loro punto medio  $M(1, 1)$  è sull'asse. L'asse è quindi  $x + y = 2$ . Intersecando la parabola con l'asse si trova il vertice  $V(1/2, 3/2)$ . La si può disegnare usando il suo punto  $(0, 0)$ .

Inoltre, la parte non di secondo grado dell'equazione è  $-8x = 0$ , quindi questa è la retta tangente in  $(0, 0)$ . Traslando in modo che  $V$  diventi  $O$  con

$$\begin{cases} \bar{x} = x - 1/2 \\ \bar{y} = y - 3/2 \end{cases} \text{ l'equazione diventa}$$

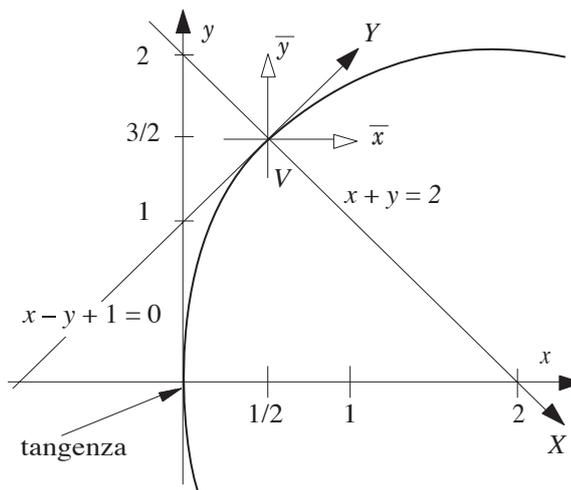
$$(\bar{x} + \bar{y})^2 - 4\bar{x} + 4\bar{y} = 0.$$

La rotazione è

$$\begin{cases} \bar{x} = (X + 2Y)/\sqrt{2} \\ \bar{y} = (-X + Y)/\sqrt{2} \end{cases} \text{ o anche:}$$

$$\begin{cases} X = (\bar{x} - \bar{y})/\sqrt{2} \\ Y = (\bar{x} + \bar{y})/\sqrt{2} \end{cases}.$$

La forma canonica è allora  $X = (\sqrt{2}/4)Y^2$



Altro modo: La si scrive come  $(x + y)^2 - 8x = 0$ . Aggiungendo  $\lambda$  alla forma quadratica si ottiene  $(x+y+\lambda)^2 - 8x - 2\lambda x - 2\lambda y - \lambda^2 = 0$  o anche  $(x+y+\lambda)^2 - ((8+2\lambda)x + 2\lambda y + \lambda^2) = 0$ .

Si sceglie  $\lambda$  in modo che le due rette  $x + y + \lambda = 0$  e  $(8 + 2\lambda)x + 2\lambda y + \lambda^2 = 0$  siano ortogonali e si trova  $\lambda = -2$ , per cui l'equazione diventa  $(x + y - 2)^2 - 4(x - y + 1) = 0$ . A questo punto è chiaro che mediante la trasformazione  $\begin{cases} X = (x - y + 1)/\sqrt{2} \\ Y = (x + y - 2)/\sqrt{2} \end{cases}$  si arriva alla forma canonica

$2Y^2 - 4\sqrt{2}X = 0$  e che quindi l'asse è  $x + y - 2 = 0$  e la tangente in  $V$  è  $x - y + 1 = 0$ .

- e. La matrice  $A$  ha determinante nullo e  $\det(B) < 0$ , quindi è l'unione di due rette reali incidenti. Il centro della conica si trova risolvendo il sistema lineare delle due derivate parziali  $\{4x + y - 4 = 0; x + 2 - 2y = 0\}$  ed è  $C(2/3, 4/3)$ . Tagliando la conica con una retta non passante per  $C$  per esempio  $y = 0$  e si trovano i punti  $(2, 0)$  e  $(0, 0)$ . Le rette passanti per  $C$  e per essi sono  $x + y - 2 = 0$  e  $2x - y = 0$ . Si verifica subito che il loro prodotto dà l'equazione di partenza. Non è quindi necessaria la riduzione a forma canonica.
- f. La matrice  $A$  ha determinante nullo e  $\det(B) = 0$ , quindi è l'unione di due rette parallele o parallele non reali o coincidenti. La decomposizione è immediata:  
 $(9x^2 - 12xy + 4y^2) + 3x - 2y = 0 \quad (3x - 2y)^2 + 3x - 2y = 0 \quad (3x - 2y + 1) \cdot (3x - 2y) = 0$   
 Quindi è l'unione di due rette parallele reali. Non è necessaria la riduzione a forma canonica.
- g. La matrice  $A$  ha determinante nullo e  $\det(B) > 0$ , quindi la conica ha un solo punto reale. Il punto è  $C(-2/3, -1/3)$  centro della conica che si trova risolvendo il sistema lineare delle due derivate parziali  $\{10x - 8y + 4 = 0; 10y - 8x - 2 = 0\}$ . Intersecando la conica con la retta  $y = 0$  non passante per il centro si trovano i due punti non reali  $P_1((-2 + i)/5, 0)$  e  $P_2((-2 - i)/5, 0)$ . Le rette non reali  $CP_1$  e  $CP_2$  sono:  $5x + (-4 \pm 3i)y + 2 \pm i = 0$ . Si verifica subito che il loro prodotto dà l'equazione di partenza. Non è quindi necessaria la riduzione a forma canonica.
- h. La matrice  $A$  ha determinante nullo e  $\det(B) = 0$ , quindi è l'unione di due rette parallele o parallele non reali o coincidenti. La decomposizione algebrica è immediata:  $(x + y)^2 + 1 = 0$  cioè  $(x + y + i) \cdot (x + y - i) = 0$ . Quindi si tratta di due rette parallele non reali.