Geometria piana

01. a. Un vettore direzionale è $(B-A)=(3,-2)$. Una rappr. parametrica è $\begin{cases} x &= -1+3t \\ y &= 3-2t \end{cases}$

b. Per esempio $\begin{cases} x &= 2 \\ y &= t \end{cases}$

c. Un suo punto è $(4,0)$. Un vettore direzionale è per esempio $(3,1)$ (ortogonale a $(1,-3)$). Una rappresentazione parametrica è $\begin{cases} x &= 3t+4 \\ y &= t \end{cases}$

02. La sua intersezione con $x=0$ è $(0,-5/2)$. La sua intersezione con $y=0$ è $(5,0)$. Basta scrivere la retta passante per $(0,-5/2)$ e con vettore direzionale $(5,0)-(0,-5/2)=(5,5/2)$: $\begin{cases} x &= 0+5t \\ y &= -5/2+5/2t \end{cases}$

03. Le rette r_1 e r_2 coincidono perché hanno gli stessi vettori direzionali e il punto $(1,-1)$ di r_1 sta su r_2 (per $t=-1$).
Le rette s_1 e s_2 non coincidono perché pur avendo gli stessi vettori direzionali, il punto $(-2,2)$ di s_1 non sta su s_2.

04. La retta passante per $P=(1,1)$ e ortogonale a $x-2y=1$ è $2x+y=3$. Intersecandola con essa si trova il punto $M=(7/5\ ,\ 1/5)$. Il punto simmetrico è $2M-P=(9/5,-3/5)$.
La retta simmetrica è $r: 21x+3y=36$.

05. Si parametrizza la retta che li unisce in modo che per $t=0$ si abbia il primo punto e per $t=1$ si abbia il secondo e si ha: $\begin{cases} x &= 5t \\ y &= 1+2t \end{cases}$. Allora per $t=0\ ,\ 1/2\ ,\ 1$ si hanno i punti della divisione in due parti ; per $t=0\ ,\ 1/3\ ,\ 2/3\ ,\ 1$ quelli della divisione in tre.

06. È la retta passante per $M(1/2\ ,\ -1)$ (punto medio del segmento AB) e ortogonale al vettore $(B-A)=(1,-6)$: $2x-12y+11=0$.

07. Le bisettrici sono: $\dfrac{2x-y}{\sqrt{5}}=\pm\dfrac{x+y-1}{\sqrt{2}}$.

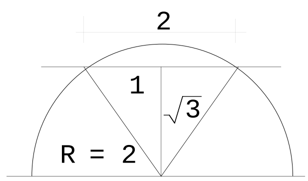
08. I centri sono i punti della retta $\{x=2t\ ;\ y=-3t\}$ (ortogonale a r in $(0,0)$, che distano $\sqrt{5}$ da $(0,0)$. Le circonferenze sono: $\left(x\pm\sqrt{20/13}\right)^2+\left(y\mp\sqrt{45/13}\right)^2=5$.

09. I centri sono i punti dell'asse x che hanno distanza 1 da $y=2x$. Le circonferenze sono: $(x\pm\sqrt{5}/2)^2+y^2=1$.

10. La circonferenza ha centro $(-1,-4)$ e raggio $\sqrt{17}$. Le rette sono quelle passanti per $(1,2)$ che hanno distanza $\sqrt{17}$ dal centro $(-1,-4)$. Le rette sono: $(x-1)(12\pm\sqrt{391})+13(y-2)=0$.

11. La circonferenza ha centro $(2,0)$ e raggio 2. Le rette sono quelle del fascio di centro $(-1,4)$ la cui distanza dal centro è $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. Le rette sono:
$(y+1)=(-2\pm\sqrt{6})(x-4)$.

12. L'equazione è: $(x-y)(x-3y)(x-1)=0$.



Geometria nello spazio

01. a. $x+y+z-3=0$

b. P.es. $x-2y+z=0$

c. $x-3y+z+1=0$

d. P.es. $x+y+2z-5=0$

02. a. $\begin{cases} x &= 3t \\ y &= t+1 \\ z &= 2-t \end{cases}$

b. P.es. $\begin{cases} x = 0 \\ y = t+1 \\ z = t+2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = 6t \\ y = 1-31t \\ z = 2-13t \end{cases}$

03. Per $a = 2$.

04. I vettori $(B-A) = (2,0,1)$ e $(B-C) = (2,2,-1)$ non sono paralleli per cui A, B, C non sono allineati. Il piano è $x-2y-2z+2=0$.

05. Il piano è $x-2y-z+2=0$.

06. Per $a = 2$. Il piano è $3x+2y-z=2$.

07. a. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0+t \\ z = -1+2t \end{cases}$

b. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0+2t \\ z = -1+3t \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = 1-7t \\ y = 0-2t \\ z = -1+3t \end{cases}$

08.

a. $\begin{cases} x-2y+7z = 0 \\ x-3y = z \end{cases}$

b. $P\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$

09. La retta ha come vettore direzionale il vettore $\vec{v}(1,0,-1)$ ortogonale sia a $\vec{n}_\alpha$ che a $\vec{v}_r$ e passa per il punto di intersezione di a e r che è $P.\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. La retta è $\begin{cases} x = 1/4+t \\ y = 1/4 \\ z = 1/4-t \end{cases}$

10. Intersecando r con il piano passante per $(0,1,0)$ e ortogonale a r si trova il punto $P'\left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{1}{7}\right)$ per cui $d = \sqrt{6/7}$.

11. a. I punti di r e s che definiscono la retta ortogonale a entrambe sono $P_r(-1,-1,2)$ e $P_s(-2,0,0)$. La retta è: $\{x = -2+t; y = 1-t; z = 2t\}$.

b. I punti di r e s che definiscono la retta parallela a $x = y = z$ sono rispettivamente $P_r(4,4,2)$ e $P_s(1,1,-1)$. La retta è: $\{x = 1+t\ ;\ y = 1+t\ ;\ z = -1+t\}$.

12. a. Non sono parallele e hanno intersezione vuota.

b. $d = 3$.

c. $P_r(1,1,0)$, $P_s(-1,2,2)$ e la retta è $\{x = 1-2t\ ;\ y = 1+t\ ;\ z = 2t\}$.

d. Il piano è $2x-y-2z+7/2$ (passante per il punto medio tra P_r e P_s).

13. a. $\{2x+3z = 6\ ;\ x = y\}$ interesezione tra il piano per $(0,0,2)$ e ortogonale a r e il piano contenente s e $(0,0,2)$.

b. $\{x = t\ ;\ y = -t\ ;\ z = 2\}$ cioè $\{x+y = 0\ ;\ z = 2\}$, retta per $(0,0,2)$ e parallela a $\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s$.

Sfere e circonferenze nello spazio

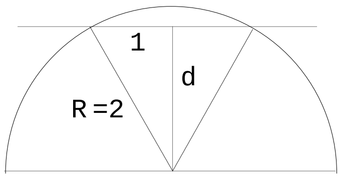
01. a. Le sfere hanno centro sulla retta passante per $(1,1,0)$ e ortogonale a $x = y$ e cioè nel punto $(1+t, 1-t, 0)$. Il loro raggio è la distanza tra il centro e $(1,1,0)$ e cioè $\sqrt{2}\mid t\mid$. le sfere hanno quindi equazioni: $(x-(1+t))^2 + (y-(1-t))^2 + z^2 = 2t^2$.

b. Basta imporre $2t^2 = 2$. Le sfere sono: $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2 \qquad x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 2$.

c. Bisogna che la distanza tra il centro $(1+t, 1-t, 0)$ e il piano $x + z = 3$ sia $\sqrt{2} \mid t \mid$ da cui $t = -2, 2/3$. Le sfere sono quindi:
$(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 8 \qquad (x - 5/3)^2 + (y - 1/3)^2 + z^2 = 8/9$.

02. Sono i piani del fascio la cui distanza dal centro $(1/2, 0, -1)$ della sfera è pari al raggio 1 della sfera. I piani sono $z = 0$ e $4x - 4y - 7z = 0$.

03. Bisogna intersecare la sfera coi piani del tipo $x - z = \lambda$ che hanno distanza $d = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ dal centro $(1, 0, 0)$. Si ricava $\lambda = 1 \pm \sqrt{6}$. Le circonferenze sono pertanto:



$$\begin{cases} x - z - 1 \pm \sqrt{6} &= 0 \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 &= 4 \end{cases}$$

04. Le sfere hanno centro nei punti dell'asse che distano $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ da $(1, 0, 0)$ e cioè in $(2, 1, 1)$ e in $(0, -1, -1)$ e sono quindi: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$$x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4$.

05. I punti della retta data che hanno distanza 2 dal piano sono: $(\pm\sqrt{10}, \pm\sqrt{10}, 1 \pm \sqrt{10})$. Quindi le sfere cercate hanno equazioni: $(x \pm \sqrt{10})^2 + (y \pm \sqrt{10})^2 + (z - 1 \pm \sqrt{10})^2 = 4$.

06. Un punto del piano è $(\beta - \gamma, \beta, \gamma)$. Imponendo che abbia distanza 1 da ciascuno dei piani si hanno le relazioni: $\mid \beta - \gamma \mid = 1$; $\mid \beta + \gamma + 1 \mid = \sqrt{2}$ ci sono quindi quattro soluzioni. Le quattro sfere sono:
$(x-1)^2 + (y - 1 \pm \sqrt{2}/2)^2 + (z \pm \sqrt{2}/2)^2 = 1$; $(x-1)^2 + (y \pm \sqrt{2}/2)^2 + (z - 1 \pm \sqrt{2}/2)^2 = 1$.

07. La sfera ha centro $(0, 0, 1)$ e raggio 1. Le rette passanti per O e parallele al piano sono $\{x = at; y = bt; z = at\}$. Si tratta di trovare a, b in modo che le rette abbiano distanza $d = \sqrt{1^2 - (1/2)^2} = \sqrt{3}/2$ dal centro $(0, 0, 1)$ della sfera. Per calcolare d si può trovare la proiezione ortogonale di C sulle rette che è $\big(a^2/(2a^2 + b^2)\ ,\ ab/(2a^2 + b^2)\ ,\ a^2/(2a^2 + b^2)\big)$. Imponendo che la distanza tra $(0, 0, 1)$ e tale punto sia $\sqrt{3}/2$ si trova $4a^4 = b^4$ cioè $2a^2 = b^2$ o $b = \pm\sqrt{2}a$, p.es. $b = \pm\sqrt{2}$; $a = 1$. Le due rette sono: $\{x = t; y = \pm\sqrt{2}t; z = t\}$

08. a. Basta intersecare la sfera col piano passante per P, Q e per il centro della sfera che è il piano $x = y$. Il cerchio è : $\{x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0; x = y\}$.

b. Si considerano i piani passanti per la retta $PQ\{x = y; z = \sqrt{2}y\}$ e cioè i piani del tipo $\lambda(x - y) + \mu(z - \sqrt{2}y)$ e che hanno distanza $\sqrt{1^2 - (\sqrt{3}/2)^2} = 1/2$ dal centro della sfera. Si trova $\mu^2 - 2\sqrt{2}\lambda\mu - 2\lambda^2 = 0$ da cui p.es. $\lambda = 1$ e $\mu = \sqrt{2} \pm 2$.
I piani sono $x + (\mp 2\sqrt{2} - 3)y + (\sqrt{2} \pm 2)z = 0$. Le circonferenze sono le intersezioni dei due piani con la sfera.

c. La retta è tangente perché intersecandola con la sfera si trovano due punti coincidenti: $(0, 0, 2)$. Le circonferenze stanno sui piani che passano per la retta e hanno distanza $\sqrt{1^2 - (\sqrt{3}/2)^2} = 1/2$ da $(0, 0, 1)$.
I piani sono quelli di equazione: $3\sqrt{3}x - \sqrt{3}y \pm \sqrt{10}(z - 2) = 0$. Le circonferenze sono perciò le intersezioni tra questi piani e la sfera.

09. a. Occorre innanzitutto calcolare la distanza tra r e P.

Scriviamo r in forma parametrica: $\begin{cases} x &= t \\ y &= 1 \\ z &= t - 3 \end{cases}$

Un vettore parallelo a r è quindi $(1, 0, 1)$. Il piano α perpendicolare a r e passante per P è $1(x - 0) + 0(y - 2) + 1(z - 1) = 0$ cioè $x + z = 1$.
Intersechiamo r con α : $t + (t - 3) = 1$ da cui $t = 2$ e si ottiene da r il punto $C(2, 1, -1)$.
Si ha perciò:
$\mathrm{dist}(P, r) = \mathrm{dist}(P, C) = \mid (0, 2, 1) - (2, 1, -1) \mid = \mid (-2, 1, 2) \mid = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$

Il centro della circonferenza è il punto C proiezione di P su r, determinato in precedenza, il raggio è la distanza tra P e r. Il piano di giacenza è proprio α. Una rappresentazione cartesiana di γ è perciò:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 9 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

b. La retta giace sul piano α ed è ortogonale al vettore $(P-C)=(-2,1,2)$. Quindi un vettore parallelo a t è $(P-C)\wedge\vec{n}_\alpha$: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow (1,4,-1)$.

Quindi t è la retta $\begin{cases} x &= 0+t \\ y &= 2+4t \\ z &= 1-t \end{cases}$

c. Il centro di ogni sfera contenente γ giace su r ed è quindi del tipo : $A=(t,1,t-3)$: Perché la sfera sia tangente al piano $x=5$ occorre che il raggio sia dist(A, "$x=5$").

• Il raggio si può calcolare come la distanza tra A e P ed è :
$\mid (t,1,t-3)-(0,2,1) \mid = \mid (t,-1,t-4) \mid = \sqrt{t^2+1+t^2-8t+16} = \sqrt{2t^2-8t+17}$

• La distanza tra A e il piano $x=5$ è $\mid t-5 \mid$, da cui le eguaglianze:

$$\sqrt{2t^2-8t+17} = \mid t-5 \mid \quad \Rightarrow \quad 2t^2-8t+17=t^2-10t+25 \quad \Rightarrow \quad t^2+2t-8=0$$

L'ultima equazione ha le soluzioni $t=-4,2$, pertanto le sfere hanno centri risp. $(-4,1,-7)$ e $(2,1,-1)$ e raggi $\mid -4-5 \mid = 9$ e $\mid 2-5 \mid = 3$. Le sfere sono quindi:

$$(x+4)^2+(y-1)^2+(z+7)^2=81 \qquad (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$$

10. Il raggio della circonferenza è la distanza tra il centro e la tangente e cioè $\sqrt{2}$. Il piano della circonferenza è quello che contiene centro e tangente e cioè $x-y+z=0$. La circonferenza si può scrivere: $\begin{cases} x-y+z &= 0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2+z^2 &= 2 \end{cases}$