Classificazione degli esercizi:	F : Fondamentale	C : Consigliato
	A : Approfondimento	T : Teorico

Geometria nel piano

È fissato nel piano un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche Oxy.

F 01. Scrivere equazioni parametriche per le seguenti rette:

a. La retta che congiunge $A(-1,3)$ con $B(2,1)$

b. La retta di equazione cartesiana $x = 2$. c. La retta di equazione cartesiana $x - 3y = 4$.

F 02. Sia r la retta rappresentata parametricamente a lato. Scrivere un'altra rappresentazione parametrica per r tale che il punto di r di ascissa 0 si ottenga per $t = 0$ e quello di ordinata 0 per $t = 1$.
$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 2 \end{cases}$$

F 03. Dire se le rette r_1 e r_2 coincidono e se le rette s_1 e s_2 coincidono
$$r_1 \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = t - 1 \end{cases} \quad r_2 \begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = t \end{cases} \qquad s_1 \begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 2 \end{cases} \quad s_2 \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 2 \end{cases}$$

F 04. Determinare, se possibile, il coefficiente angolare delle seguenti rette:
$$x - 10 = 0 \quad ; \quad y + 4 = 0 \quad ; \quad 2x - y = 4 \quad ; \quad \frac{x-3}{5} = \frac{y+7}{1} \quad ; \quad x = 3y \quad ; \quad \begin{cases} x = 3t \\ y = t - 1 \end{cases}$$

C 05. Verificare che le tre rette $x - 2y + 3 = 0$; $3x + y + 2 = 0$; $x - 6y + 7 = 0$ appartengono ad un fascio e determinarne il centro.

F 06. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le tre rette $2ax - ay = 1$; $2x = ay$; $-2ax + y = 1$ appartengono ad un fascio ?

F 07. Nel fascio di rette $x + 3ky - 5k + 2 = 0$ determinare (se esistono)

a. La retta un cui vettore direzionale sia $(2,1)$.

b. La retta parallela all'asse x e quella parallela all'asse y.

c. Il centro del fascio.

d. Le rette s tali che il triangolo determinato da s e dai due assi coordinati abbia area 7.

C 08. Determinare le rette passanti per $P(0,1)$ e formanti con la retta $y = 2x$ un angolo di $\pi/6$..

F 09. Determinare il punto simmetrico di $(1,1)$ e la retta simmetrica di $x + y = 2$ rispetto alla retta $x - 2y = 1$.

F 10. Dividere il segmento $(0,1) - (5,3)$ in due e in tre parti uguali.

F 11. Scrivere la retta r rispetto alla quale siano simmetrici $A(0,4)$ e $B(1,-2)$.

T 12. Determinare il baricentro del triangolo $A(a_1,a_2)$ $B(b_1,b_2)$ $C(c_1,c_2)$

A 13. Dati i tre punti $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(6,0)$, determinare un quarto punto D in modo che i quattro punti formino un parallelogramma. In quanti modi è possibile ?

F 14. Determinare le due bisettrici degli angoli formati dalle rette $2x - y = 0$ e $x + y = 1$ e dire quale di esse è situata nell'angolo minore.

C 15. Tra i punti P della retta $r : 4x - 3y + 2 = 0$ determinare quello il cui simmetrico rispetto alla retta $s : x - 2y = 2$ ha distanza minima da $(0,0)$.

C 16. Date le due rette $r : x + 2y = 2$ $s : \{x = 2 - t ; y = 3 + 2t\}$ e il loro punto comune P, determinare i punti di r la cui proiezione ortogonale su s dista 5 da P.

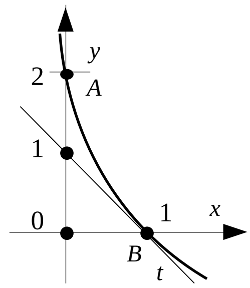
F 21. Scrivere le equazioni delle circonferenze di raggio $\sqrt{5}$, passanti per il punto $(0,0)$ e ivi tangenti alla retta $2x = 3y$.

F 22. Scrivere l'equazione delle circonferenze di raggio 1 aventi il centro sull'asse x e tangenti alla retta $y = 2x$.

F 23. Scrivere le equazioni delle circonferenze passanti per i punti $(-2,2)$ e $(2,0)$ e tangenti alla retta $x+y+2=0$.

F 24. Scrivere le equazioni delle rette passanti per $(1,2)$ e tangenti alla circonferenza di equazione $x^2+y^2+2x+8y=0$.

F 25. Scrivere l'equazione della circonferenza γ di cui è raffigurato un arco. Sono evidenti due suoi punti A e B e la retta t tangente a γ in B.



C 26. Scrivere l'equazione di una circonferenza di raggio 3 con centro sulla retta $r: y=3x+2$ e che sia tagliata dalla retta $s: x+y=2$ in una corda di lunghezza 2.

C 27. Tra le circonferenze tangenti alle rette parallele $y=2x+1$ e $y=2x+3$ determinare le due che sono tangenti anche alla retta $s: 3x=y$.

C 28. Scrivere le equazioni delle circonferenze con centro sull'asse y e tangenti a $x+y+1=0$ e a $2x-y=4$.

F 29. Tra le rette del fascio di centro $(4,-1)$ determinare quelle che tagliano la circonferenza di equazione $x^2+y^2=4x$ in una corda di lunghezza 2.

A 30. Che raggio deve avere una circonferenza di centro $(3,0)$ affinché una delle rette ad essa tangenti in una delle sue intersezioni con $y=2x$ intercetti l'asse x nel punto $(-3,0)$?

A 31. Siano $r: 2x=y$; $s: 3x+y=0$ due rette; determinare tra le due bisettrici degli angoli di r e s quella situata nell'angolo minore. Determinare quindi le circonferenze di raggio 2 situate negli angoli minori tra r e s e tangenti sia a r che a s.

C 32. Date le circonferenze $\gamma_1 : (x-1)^2+(y-1)^2=1$ e $\gamma_2 : (x-2)^2+(y-3)^2=R^2$.

a. Discutere al variare di $R \in \mathbb{R}$ la reciproca posizione.

b. Nei casi in cui sono tangenti determinare la comune retta tangente.

c. Per $R=3$ scrivere la retta passante per i punti di intersezione.

A 33. Date le circonferenze $\gamma_1 : (x-1)^2+(y+2)^2=1$ e $\gamma_2 : (x-1)^2+(y-2)^2=2$, determinare le equazioni delle quattro rette tangenti a entrambe.

F 41. Scrivere un'equazione che sia soddisfatta da tutti e soli i punti dell'insieme costituito dall'unione delle rette $x=y$; $x=3y$; $x=1$.

A 42. Scrivere l'equazione cartesiana del luogo dei punti $P(x,y)$ tali che:

$$\left.\begin{array}{l}\text{il punto simmetrico di } P \text{ rispetto all'asse } x.\\ \text{il punto medio tra } P \text{ e } O(0,0).\\ \text{la proiezione ortogonale di } P \text{ su } x+2y-1=0\end{array}\right\}\text{ siano allineati}$$

A 43. Scrivere l'equazione cartesiana del luogo dei punti $P(x,y)$ tali che il triangolo $PP'P''$ abbia area 1, dove:
P' è il simmetrico di P rispetto a $x+y=1$.
P'' è la proiezione ortogonale di P sulla retta $y=2$.

Geometria lineare nello spazio

È fissato nello spazio un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche destrorso Oxyz.

F 01. Determinare:

a. il piano passante per $P(0,1,2)$ e ortogonale alla retta $r: x=y=z-2$.

b. un piano passante per $P(0,1,2)$ e parallelo alla retta $r: x=y=z-2$.

c. il piano passante per $P(0,1,2)$ e parallelo al piano $\alpha : x-3y+z=0$.

d. un piano passante per $P(0,1,2)$ e ortogonale al piano $\alpha : x-3y+z=0$.

F 02. Determinare:

a. la retta passante per $P(0,1,2)$ e parallela a r.

b. una retta passante per $P(0,1,2)$ e ortogonale a r.

c. la distanza di $P(0,1,2)$ da r.

d. la retta passante per $P(0,1,2)$ e perpendicolare (e incidente) a r.

$$r: \begin{cases} x=3t \\ y=t-2 \\ z=1-t \end{cases}$$

F 03. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, qual è la posizione reciproca della retta $\{x + y = a\ ;\ z + a^2 y = 1\}$ e del piano $x + 2y + z = 0$?

F 04. Dati i tre punti $A(0, 1, 0)$ $B(2, 1, 1)$ $C(0, -1, 2)$, dimostrare che non sono allineati e determinare il piano che li contiene.

F 05. Determinare il piano che contiene il punto $(1, 0, 3)$ e la retta $x = y = 2 - z$.

F 06. Dire per quale $a \in \mathbb{R}$ le rette $r : \{x + y - 1 = x - z = 0\}$ $s : \{2x + y - a = x + z - 2 = 0\}$ sono incidenti e per tale a determinare il piano che le contiene.

F 07. Determinare sul piano $x - 2y + z = 0$ che contiene il punto $P(1, 0, -1)$:

a. la retta passante per P e ortogonale all'asse x.

b. la retta passante per P e parallela al piano $3x = z$.

c. la retta passante per P e incidente la retta $x - 3y = z - 2 = 0$.

F 08. Dati il punto $P(1, 0, 1)$, la retta $r : x - 2y = z = 0$ e il piano $\alpha : x - 3y = z$.

a. Trovare la proiezione ortogonale di P su r e quella su α.

b. Trovare la proiezione ortogonale di r su α.

C 09. Determinare il punto della retta $r :\ x = y = z - 1$ la cui proiezione ortogonale sulla retta $s :\ x - 2y = z + x = 0$ sia l'origine delle coordinate.

F 10. Determinare la retta del piano $x + 2y + z = 1$ perpendicolare e incidente $r : \{x = y = z\}$

C 11. Data la retta $r : \{x - 2y = z - 3y + 1 = 0\}$, determinare la distanza tra r e la retta passante per $P(0, 1, 0)$ e parallela a r. Tra i piani per P paralleli a r determinare quello che ha distanza massima da r.

F 12. Tra le rette incidenti $r : \{x = y\ ;\ z = 2\}$ e $s : \{x = 3y - 2\ ;\ z + y = 0\}$ determinare:

a. Quella ortogonale a entrambe.

b. Quella parallela alla retta $x = y = z$.

C 13. Tra le rette uscenti da $P(1, 2, -1)$ e parallele al piano $x + 3y - z = 1$ determinare quella incidente la retta $r : \{x = 3y\ ;\ z = x + 1\}$.

C 14. Per ogni retta s giacente sul piano $x + y = 2$ e incidente la retta r sia α l'angolo più piccolo che s forma con r. Determinare s in modo che: $\quad r : \begin{cases} x = y + 2 \\ z = 2x \end{cases}$

a. α sia massimo. b. α sia minimo. c. $\alpha = \pi/3$.

F 15. Date le rette r e s: $\quad r : \begin{cases} x - z = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x - 2z + 5 = 0 \end{cases}$

a. Dimostrare che r e s sono sghembe.

b. Determinare la loro distanza d.

c. Determinare la perpendicolare comune e i punti P_r, P_s di minima distanza.

d. Determinare il piano parallelo a entrambe e da esse equidistante.

C e. Determinare i piani α contenenti r tali che la proiezione di P_s su α abbia distanza 1 da P_s.

C f. Determinare i punti di r che distano $2d$ da s.

16. Tra le rette perpendicolari e incidenti alla retta $r : \{x - y = 0\ ;\ z = 3y + 2\}$ nel suo punto $(0, 0, 2)$ determinare:

F a. quella incidente la retta $s : \{x = y = z\}$

F b. quella ortogonale a s.

A c. quelle che hanno distanza 1 da s.

17. Siano $P(1, 0, 2)$ un punto, $r : \{x = 2y = z + 1\}$ una retta, $\alpha : 3x - 2y + z = 0$ un piano.

F a. Determinare il punto P' simmetrico di P rispetto a r.

F b. Determinare il punto P'' simmetrico di P rispetto ad α.

F c. Determinare il punto O' simmetrico di O rispetto a P.

C d. Determinare la retta r' simmetrica di r rispetto a P.

F e. Determinare la retta r'' simmetrica di r rispetto ad α.

C f. Determinare la retta x' simmetrica dell'asse x risp. a r.

C g. Determinare il piano α' simmetrico di α rispetto a P.

A h. Determinare il piano α'' simmetrico di α rispetto a r.

A i. Determinare il piano β simmetrico di $z = 0$ rispetto ad α.

C 18. Siano $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto , $r : \{x = x(t) \ ; \ y = y(t) \ ; \ z = z(t)\}$ una retta e $\alpha : ax+by+cz = d$ un piano. Determinare i simmetrici di P_0,r,α rispetto al punto $(0, 0, 0)$, alla retta $x = y = 0$ e al piano $z = 0$.

A 19. Determinare i piani passanti per il punto $P(0, 2, 0)$, paralleli alla retta $r : \{x - y = z \ ; \ y = 2x\}$ e aventi distanza 1 da r.

F 20. Sono dati i tre piani α, β, γ al variare di $a \in \mathbb{R}$

a. Determinarne la posizione reciproca per ogni $a \in \mathbb{R}$.

b. Nei casi in cui i tre piani formano un fascio determinare la direzione dell'asse

$$\begin{aligned} \alpha &: \quad x + a^2y + z = -4 \\ \beta &: \quad 2x + 2y + (a+1)z = 0 \\ \gamma &: \quad (2 - 2a^2)y + (4a+3)z = a^2 + 3 \end{aligned}$$

A 21. Dati i punti $A(2, 1, 0)$, $B(1, 0, 3)$, $C(0, 1, 1)$:

a. Determinare l'area del parallelogramma di lati AB e AC.

b. Trovare i punti D dell'asse x per cui il volume del parallelepipedo di lati AB, AC, AD è 3.

C 30. Determinare l'equazione del luogo dei punti medi del segmento PQ dove P varia sul piano $x = 2y$ e $Q = (1, 1, 0)$.

C 31. Determinare il luogo dei punti medi tra i punti della retta $r : \{x = y = z\}$ e della retta $s : \{x = 2y + 1 \ ; \ z = 1\}$ aventi la stessa ascissa.

C 32. Determinare il luogo descritto dalle proiezioni ortogonali del punto $P(1, 2, 3)$ sui piani del fascio che ha come asse la retta $r : \{x = y \ ; \ z = 1\}$.

C 33. Determinare il luogo dei punti dello spazio equidistanti dal piano $x = 2z - 1$ e dal punto $P(1, 3, 2)$.

C 34. Determinare il luogo dei punti del piano $y = 3z$ equidistanti dal piano $x = 2z - 1$ e dal punto $P(1, 3, 2)$.

C 35. Determinare il luogo dei punti dello spazio equidistanti dal piano $x = 2z - 1$ e dalla retta $\{x = y \ ; \ z = 0\}$.

A 36. Determinare il luogo dei punti dello spazio equidistanti dalla retta $r : \{x = 1 \ ; \ y + z = 0\}$ e dalla retta $s : \{x = y \ ; \ z = 0\}$.

A 37. Determinare il luogo dei punti dello spazio le cui proiezioni ortogonali sul piano $x - y = 1$ e sulla retta $\{y = 0 \ ; \ z = 1\}$ siano allineate con $(0, 0, 0)$.

A 38. Determinare il luogo dei punti dello spazio la cui proiezione sul piano $x+y+z = 0$ è equidistante dall'origine e dalla retta $\{x = 1 \ ; \ y = z\}$.

A 40. Determinare il luogo delle rette che sono incidenti le due rette $r : \{x = y = z\}$, $s : \{x = 3y \ ; \ z = 1\}$ e parallele al piano $x - 2y + 2z = 0$.

C 41. a. Determinare (se esiste) la retta passante per $P(1, 1, 1)$ e incidente le due rette $r : \{x = 2y - 1 = -z\}$ $\quad s : \{x = 2 \ ; \ y = 3z\}$.

b. Determinare (se esiste) la retta passante per $P(1, 1, 1)$ e incidente le due rette $r : \{x = -y - 1 = -z\}$ $\quad s : \{x = 2 \ ; \ y = 3z\}$.

A 42. Determinare il luogo delle rette che sono incidenti le tre rette $a : \{x = y = z\}$ $\quad r : \{x = 2y - 1 = -z\}$ $\quad s : \{x = 2 \ ; \ y = 3z\}$.

C 43. Determinare il luogo costituito dalle rette che passano per $(0, 0, 0)$ e formano un angolo di $\pi/6$ con la retta $\{x = 0 \ ; \ y = z\}$.

C 44. Sia $P(1, 1, 1)$. Dire qual è l'equazione del luogo delle rette uscenti da P e perpendicolari e incidenti alle rette del fascio $y - mx = z = 0$ $(m \in \mathbb{R})$.