Geometria nel piano

Avvertenza sull'uso dei simboli $\pm$ e $\mp$: Faremo largo uso di questi simboli, ma avvertiamo che il loro uso è comodo, ma piuttosto delicato. Il loro significato varia a seconda del contesto.

- Espressioni del tipo "Le rette sono $y = \pm 2x$ " e "per $k = \pm 1$" significano rispettivamente "Le rette sono $y = 2x$ e $y = -2x$" e "Per $k = 1$ o $k = -1$".
- Espressioni del tipo "tranne i punti $P(\pm 1, 0)$ " e "per $k \neq \pm 1$" significano rispettivamente "tranne i punti $P(1, 0)$ e $P(-1, 0)$" e "Per $k \neq 1$ e $k \neq -1$".
- Quando compaiono diversi simboli $\pm$ in uno stesso ambito si intende (salvo diverso avviso) che siano correlati, cioè che quando uno assume il valore $+$, lo assumano anche gli altri.
- Il simbolo $\mp$ si usa sempre solo in correlazione con dei $\pm$ o con altri $\mp$ e si intende che assuma il valore $-$ quando i $\pm$ assumono il valore $+$ e viceversa.
- Per esempio "Le rette $y = (\pm 2 \mp \sqrt{3})$" significa "Le rette $y = (2 - \sqrt{3})$ e $y = (-2 + \sqrt{3})$ ".
- Esempio: "Per $t = \pm 3$ si ottengono i punti $(\pm 2, \mp\sqrt{3})$" significa "Per $t = 3$ si ottiene il punto $(2, -\sqrt{3})$ e per $t = -3$ si ottiene il punto $(-2, \sqrt{3})$".
- Bisogna soprattutto prestare attenzione a manipolare equazioni o espressioni contenenti diversi simboli $\pm$ o $\mp$. Per esempio: $-(1 \pm \sqrt{2}) \pm 3x$ diventa $-1 \mp \sqrt{2} \pm 3x$ e l'equazione $(\sqrt{2} \pm \sqrt{3})y + (\sqrt{5} \mp \sqrt{2}) = 0$ diventa $y = \dfrac{\sqrt{5} \pm \sqrt{2}}{\sqrt{2} \pm \sqrt{3}}$

---

01. a. Un vettore direzionale è $(B - A) = (3, -2)$. Una rappr. parametrica è $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$

b. Per esempio $\begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases}$

c. Un suo punto è $(4, 0)$. Un vettore direzionale è per esempio $(3, 1)$ (ortogonale a $(1, -3)$). Una rappresentazione parametrica è $\begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = t \end{cases}$

02. La sua intersezione con $x = 0$ è $(0, -5/2)$. La sua intersezione con $y = 0$ è $(5, 0)$. Basta scrivere la retta passante per $(0, -5/2)$ e con vettore direzionale $(5, 0) - (0, -5/2) = (5, 5/2)$ $\begin{cases} x = 0 + 5t \\ y = -5/2 + 5/2t \end{cases}$

03. Le rette r_1 e r_2 coincidono perché hanno gli stessi vettori direzionali e il punto $(1, -1)$ di r_1 sta su r_2 (per $t = -1$).
Le rette s_1 e s_2 non coincidono perché pur avendo gli stessi vettori direzionali, il punto $(-2, 2)$ di s_1 non sta su s_2.

04. ∞ ; 0 ; 2 ; $1/5$; $1/3$; $1/3$

05. Il sistema lineare 3×2 delle equazioni delle tre rette ha 1 soluzione che è $(1, 1)$, quindi le tre rette appartengono a un fascio e il centro è $(-1, 1)$.

06. Il sistema lineare 3×2 delle equazioni delle tre rette è associato alla matrice $\left(\begin{array}{cc|c} 2a & -a & 1 \\ 2 & -a & 1 \\ -2a & 1 & 1 \end{array}\right)$
Il suo determinante è $2 + 2a - 4a^2$ e si annulla per $a = -1/2$ e $a = 1$.
Per valori diversi da questi due le rette non si intersecano in un punto e non sono tutte parallele, quindi non costituiscono un fascio. Per $a = -1/2$ il sistema ha l'unica soluzione $(-1/3, 4/3)$, quindi le rette costituiscono un fascio proprio con questo centro. Per $a = 1$ sono tutte parallele e costituiscono quindi un fascio improprio di rette parallele.

07. a. Il vettore normale è $(1, 3k)$, quindi vettore direzionale è $(3k, -1)$. Occorre che $(3k, -1)$ e $(2, 1)$ siano proporzionali, cioè che $\dfrac{3k}{2} = \dfrac{-1}{1}$, quindi che si abbia $k = -2/3$.

b. Evidentemente per $k=0$ si ha una retta parallela all'asse y, mentre per nessun k si ha una retta parallela all'asse x (è un fascio incompleto, dato che dipende da un parametro anziché da due proporzionali).

c. Basta intersecarne due rette distinte, per esempio $x+2=0$ (per $k=0$) e $x+3y-3=0$ (per $k=1$) e si trova subito $C(-2,5/3)$.

d. Le rette intersecano gli assi nei punti $\left(0\,,\dfrac{5k-2}{3k}\right)$ e $(5k-2,0)$. Il triangolo è rettangolo e i due cateti misurano rispettivamente $\left|\dfrac{5k-2}{3k}\right|$ e $\mid 5k-2\mid$ per cui l'area del triangolo è $\left|\dfrac{5k-2}{3k}\right|\cdot\dfrac{\mid 5k-2\mid}{2}$. Ponendola uguale a 7 si ricava $25k^2-10k+4=\mid 42k\mid$. Le due equazioni di secondo grado sono:

$25k^2-20k+4=42k$ per $k>0$ che ha le soluzioni $k=\dfrac{31\pm\sqrt{861}}{25}$ (entrambe accettabili perché positive).

$25k^2-20k+4=-42k$ per $k<0$ che ha le soluzioni $k=\dfrac{-11\pm\sqrt{21}}{25}$ (entrambe accettabili perché negative).

08. Le rette sono quelle del fascio $ax+b(y-1)=0$ il cui vettore normale forma angolo di $\pi/6$ con il vettore normale di $y=2x$ che è $(2,-1)$. Si deve quindi avere:
$\dfrac{\mid(a,b)\cdot(2,-1)\mid}{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ da cui $2\mid 2a-b\mid=\sqrt{3}\,\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+b^2}$ ed elevando a quadrato (è tutto positivo): $a^2-16ab-11b^2=0$ o anche $(a/b)^2-16(a/b)-11=0$ (posso dividere per b perché evidentemente non c'è alcuna soluzione accettabile con $b=0$), da cui $a/b=8\pm5\sqrt{3}$, per esempio $a=8\pm5\sqrt{3}$ e $b=1$ (tutte le altre soluzioni danno le stesse due rette con equazioni proporzionali). Le rette sono pertanto: $(8\pm5\sqrt{3})x+y=1$.

09. La retta passante per $P=(1,1)$ e ortogonale a $x-2y=1$ è $2x+y=3$. Intersecando le due rette si trova il punto $M=(7/5\;,\;1/5)$.
Il punto simmetrico è perciò $2M-P=(9/5,-3/5)$.
Dato che $(1,1)$ sta sulla retta $x+y=2$, allora la retta simmetrica passa per $(9/5,-3/5)$ e per il punto $I(5/3,1/3)$ intersezione delle due rette ed è quindi $r:21x+3y=36$.

10. Si parametrizza la retta che li unisce in modo che per $t=0$ si abbia il primo punto e per $t=1$ si abbia il secondo e si ha: $\begin{cases} x &= 5t \\ y &= 1+2t \end{cases}$. Allora per $t=0,1/2,1$ si hanno i punti della divisione in due parti ; per $t=0,1/3,2/3,1$ quelli della divisione in tre.

11. È la retta passante per M (punto medio del segmento AB) e parallela al vettore $(B-A)$: $2x-12y+11=0$.

12. Le tre mediane appartengono, come è noto, a un fascio il cui centro è il baricentro. Una delle mediane è la retta passante per $A(a_1,b_1)$ e per il punto medio del lato opposto che è $M\left((a_2+a_3)/2\;,\;(b_2+b_3)/2\right)$.
Scriviamo la retta parametricamente in modo da ottenere A per $t=0$ e M per $t=1$. Allora, per un'altra nota proprietà del baricentro, esso è situato a $2/3$ della mediana, per cui lo si ottiene per $t=2/3$. Eseguiti i conti, il baricentro è $\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3},\dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$.

13. Ci sono tre modi:
Se il parallelogramma è $ABCD$, possiamo trovare D sommando i due vettori $(A-B)$ e $(C-B)$. Si ottiene $(D-B)=(4,-4)$, da cui $D=(5,-2)$.
Se il parallelogramma è $CABD$, possiamo trovare D sommando i due vettori $(B-A)$ e $(C-A)$. Si ottiene $(D-A)=(7,2)$, da cui $D=(7,2)$.
Se il parallelogramma è $ACBD$, possiamo trovare D sommando i due vettori $(A-C)$ e $(B-C)$. Si ottiene $(D-C)=(-11,2)$, da cui $D=(-5,2)$.

14. Le bisettrici sono notoriamente $\dfrac{2x-y}{\sqrt{5}}=\pm\dfrac{x+y-1}{\sqrt{2}}$. Per stabilire quale delle bisettrici sia

situata nell'angolo minore conviene però procedere in altro modo: un vettore direzionale per la prima retta è $(1,2)$, uno per la seconda è $(-1,1)$. Il loro prodotto scalare è positivo, così formano un angolo acuto. Se li normalizziamo e li sommiamo otteniamo il vettore bisettore nell'angolo acuto che è quindi:
$\frac{(1,2)}{\sqrt{5}}+\frac{(-1,1)}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}},\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\right)$.
Quindi come vettore direzionale per la retta bisettrice nell'angolo minore possiamo prendere $(\sqrt{2}-\sqrt{5}\,,\,2\sqrt{2}+\sqrt{5})$. Inoltre la retta passa per il punto intersezione delle due rette che è $(1/3,2/3)$.
Per avere l'altra bisettrice cambiamo i vettori direzionali delle due rette: usando $(1,2)$ e $(1,-1)$ il prodotto scalare è negativo, così formano un angolo ottuso. Ripetendo la procedura otteniamo la retta bisettrice nell'angolo maggiore, che ha vettore direzionale $(\sqrt{2}+\sqrt{5}\,,\,2\sqrt{2}-\sqrt{5})$ e passa sempre per $(1/3,2/3)$.
Le due rette sono $\begin{cases} x=1/3+(\sqrt{2}\mp\sqrt{5})t \\ y=2/3+(2\sqrt{2}\pm\sqrt{5})t\end{cases}$ Con la scelta " $-$ $+$ " si ottiene la bisettrice dell'angolo minore, con la scelta " $+$ $-$ " si ottiene la bisettrice dell'angolo maggiore.

15. Parametrizziamo la retta $4x-3y+2$: $\{x=3t+1\ ;\ y=4t+2\}$. Il simmetrico di $(3t+1,4t+2)$ rispetto alla retta $x-2y=2$ è (x_0,y_0) tale che:
 - $\left(\frac{3t+1+x_0}{2},\frac{4t+2+y_0}{2}\right)$ è su $x-2y=2$ cioè $\frac{3t+1+x_0}{2}-2\frac{4t+2+y_0}{2}=2$.
 - $(3t+1+x_0,4t+2+y_0)$ è ortogonale a $x-2y=2$ cioè $(3t+1+x_0,4t+2+y_0)\cdot(2,1)=0$.

 Dalle due relazioni si deduce $\{x_0=5t+3\ ,\ y_0=-2\}$. Avendo tutti punti la stessa ordinata, la distanza minima da $(0,0)$ si ottiene per $t=-3/5$. Il punto cercato è: $P(-4/5,-2/5)$.

16. Si trova subito che $P=(4,-1)$. Cerchiamo tra i punti della retta $s:\{x=2-t\ ;\ y=3+2t\}$ quello che dista 5 da $P(4,-1)$:
 $\text{dist}\Big((2-t,3+2t)\,,\,(4,-1)\Big)=5$ ha come soluzioni $t=-2\pm\sqrt{5}$ e si trovano i punti di s : $(4\mp\sqrt{5}\,,\,-1\pm2\sqrt{5})$. Dobbiamo ora trovare i punti di r le cui proiezioni su s sono appunto questi due punti. Scriviamo quindi le rette ortogonali a s e passanti per questi due punti:
 $\begin{cases} x &= 4\mp\sqrt{5}+2t \\ y &= -1\pm2\sqrt{5}+t\end{cases}$ Intersecandole con r si ottiene $t=\mp3\sqrt{5}/4$, da cui i punti cercati
 $\begin{cases} x &= 4\mp\sqrt{5}+2(\mp3\sqrt{5}/4) \\ y &= -1\pm2\sqrt{5}+(\mp3\sqrt{5}/4)\end{cases}$ $\begin{cases} x &= 4\mp5\sqrt{5}/2 \\ y &= -1\pm5\sqrt{5}/4\end{cases}$

21. La retta passante per $(0,0)$ e ortogonale a quella data è $\{x=2t\ ;\ y=-3t\}$. I centri sono i punti del tipo $(2t\,,\,-3t)$ che distano $\sqrt{5}$ da $(0,0)$. Si trova $t=\pm\sqrt{5/13}$. Le circonferenze sono quindi: $\left(x\pm\sqrt{20/13}\right)^2+\left(y\mp\sqrt{45/13}\right)^2=5$.

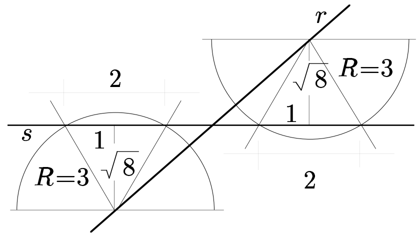
22. I centri sono i punti dell'asse x cioè del tipo $(t,0)$ che hanno distanza 1 da $y=2x$. Risolviamo $\frac{|\,2(t)-(0)\,|}{\sqrt{5}}=1$: Si trova $t=\pm\sqrt{5}/2$. Le circonferenze sono quindi: $(x\pm\sqrt{5}/2)^2+y^2=1$.

23. L'asse del segmento che ha come estremi i due punti è la retta $\{x=t\ ;\ y=2t+1\}$. I centri sono i punti dell'asse che hanno uguale distanza da $x+y+2=0$ e da $(2,0)$. cioè tali che $\frac{|\,(t)+(2t+1)+2\,|}{\sqrt{2}}=\sqrt{(t-2)^2+(2t+1-0)^2}$. Si ricava $t=9\pm4\sqrt{5}$. Sostituendo nella retta si hanno i centri, sostituendo in una delle due distanze si ha il raggio. In conclusione le circonferenze sono:
 $(x-9\mp4\sqrt{5})^2+(y-19\mp8\sqrt{5})^2=90(9\pm4\sqrt{5})$

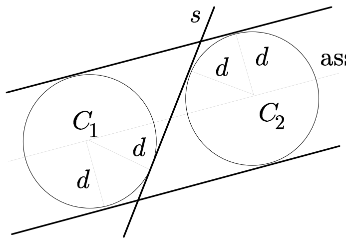
24. La circonferenza ha centro $(-1,-4)$ e raggio $\sqrt{17}$.
 Le rette passanti per $(1,2)$ sono $a(x-1)+b(y-2)=0$. Quelle che hanno distanza $\sqrt{17}$ dal centro sono quelle tali che $\frac{|\,a(-1-1)+b(-4-2)\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{17}$. Si ricava $13a^2-24ab-19b^2=0$ o anche (chiaramente $b\neq0$): $13(a/b)^2-24(a/b)-19=0$, da cui $\frac{a}{b}=\frac{12\pm\sqrt{391}}{13}$. Per esempio

$a = 12 \pm \sqrt{391}$ e $b = 13$. Le rette sono quindi: $(12 \pm \sqrt{391})(x-1) + 13(y-2) = 0$.

25. Il centro della circonferenza è sulla retta passante per $B(1,0)$ e ortogonale a t. Questa retta ha vettore direzionale $(1,1)$, quindi una sua rappresentazione parametrica è: $\begin{cases} x &= t+1 \\ y &= t \end{cases}$
Il centro è perciò tra i punti del tipo $C(t+1,t)$ quello avente la stessa distanza da A e da B:
$\operatorname{dist}(A,C) = \sqrt{(t+1-0)^2 + (t-2)^2} = \sqrt{t^2+2t+1+t^2-4t+4} = \sqrt{2t^2-2t+5}$
$\operatorname{dist}(B,C) = \sqrt{(t+1-1)^2 + (t-0)^2} = \sqrt{t^2+t^2} = \sqrt{2t^2}$
Perciò: $\sqrt{2t^2-2t+5} = \sqrt{2t^2}$ da cui $2t^2-2t+5 = 2t^2$ e $t = 5/2$
Il centro è quindi $C\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Il raggio è la distanza tra A e C cioè $\sqrt{2t^2} = \sqrt{25/2} \simeq 3.53$.
La circonferenza è quindi $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

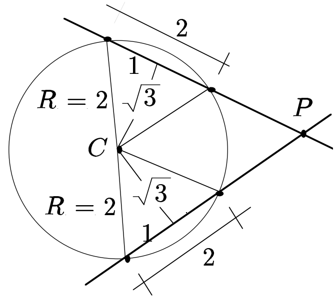


26. La circonferenza ha come centro un punto della retta $r : \{x = t\ ;\ y = 3t+2\}$ che abbia distanza $\sqrt{8} = \sqrt{3^2-1}$ dalla retta s. Ce ne sono quindi due e sono $(1,5)$ e $(-1,-1)$. Le circonferenze sono:
$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 9 \qquad (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9.$



27. Intersechiamo le due rette parallele con una retta qualunque, per esempio l'asse x e otteniamo $(1,0)$ e $(3,0)$. L'asse della striscia è la retta passante per il punto medio di questi due punti e parallela alle due date, cioè la retta $y = 2x+2$ o anche $\{x = t\ ;\ y = 2t+2\}$. I centri sono i suoi punti la cui distanza d da $y = 2x+1$ è uguale a quella da s. Le circonferenze sono:
$(x - 2 \pm \sqrt{2})^2 + (y - 6 \pm 2\sqrt{2})^2 = 1/5$.

28. Le due bisettrici sono: $\dfrac{x+y+1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{2x-y-4}{\sqrt{5}}$. I centri sono le intersezioni tra l'asse y e le bisettrici, cioè $(0, 1 \mp \sqrt{10})$. I raggi sono le distanze dei centri da una delle rette per esempio da $x+y+1 = 0$ e sono rispettivamente $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ (per il "+") e $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ (per il "−")
Le circonferenze sono quindi: $x^2 + (y - 1 \pm \sqrt{10})^2 = 7 \mp 2\sqrt{10}$.



29. La circonferenza ha centro $(2,0)$ e raggio 2.
Le rette sono quelle del fascio di centro $(4,-1)$ e cioè del tipo $a(x-4) + b(y+1) = 0$ la cui distanza dal centro $\dfrac{|\,a(2-4) + b(0+1)\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ è $\sqrt{2^2-1^2} = \sqrt{3}$. Si trova per esempio $a = 2 \pm \sqrt{6}$ e $b = 1$.
Le rette sono: $(2 \pm \sqrt{6})(x-4) + (y+1) = 0$.

30. Se $P(t, 2t)$ è una delle intersezioni, il raggio del cerchio ha come vettore direzionale $(P - C)$ cioè $(t-3, 2t)$ e il vettore direzionale della tangente è $(2t, 3-t)$. Scrivendo la retta tangente e imponendo che passi per il punto $(-3,0)$ si trova che $t = \pm 3/5$ e che quindi il raggio deve essere: $R = \sqrt{\left(\pm 3/\sqrt{5} - 3\right)^2 + \left(\pm 6/\sqrt{5}\right)^2}$.

31. La bisettrice è $y = \dfrac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}-1}x$ o anche $y = (7+5\sqrt{2})x$. Le circonferenze hanno centro nei punti $\left(\pm\dfrac{2\sqrt{5}-2\sqrt{10}}{5}, \pm\dfrac{6\sqrt{5}+4\sqrt{10}}{5}\right)$ e naturalmente raggio 2.

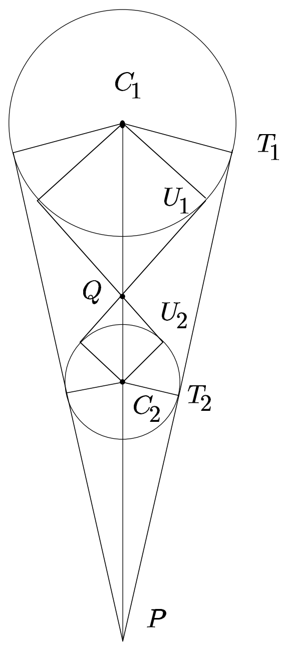
32. a. Occorre confrontare la distanza dei due centri che è $\sqrt{5}$ con i due raggi 1 e R. Il centro della seconda circonferenza è esterno alla prima, quindi le due circonferenze sono esterne se

$R+1<\sqrt{5}$, sono tangenti se $R\pm 1=\sqrt{5}$ etc. In conclusione:
Se $R<\sqrt{5}-1$ sono esterne. Se $R=\sqrt{5}-1$ sono tangenti esternamente.
Se $\sqrt{5}-1<R<\sqrt{5}+1$ sono incidenti. Se $R=\sqrt{5}+1$ sono tangenti internamente.
Se $R>\sqrt{5}+1$ la prima è inclusa nella seconda.

b. Scriviamo il sistema (non lineare !) delle equazioni delle circonferenze. Sostituendo la seconda equazione con la differenza si ottiene il sistema equivalente $\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=1\\ 2x+4y=14-R^2\end{cases}$
La retta $2x+4y=12-R^2$ è quella passante quindi per gli eventuali punti comuni alle due circonferenze. Nei casi di tangenza ($R=\sqrt{5}\mp 1$) le rette tangenti sono quindi $2x+4y=6\pm\sqrt{5}$.

c. Si procede esattamente come nel caso precedente e si scrive la retta ottenuta per $R=3$ e cioè $2x+4y=3$

33. Le circonferenze sono esterne e hanno centri rispettivamente $C_1(1,2)$ e $C_2(1,-2)$ e raggi $R_1=\sqrt{2}$ e $R_2=1$. Le due tangenti esterne si incontrano in un punto P tale che i triangoli PC_1T_1 e PC_2T_2 siano simili, cioè si ha $\dfrac{PC_1}{PC_2}=\dfrac{R_1}{R_2}$. Analogamente le due esterne si incontrano in un punto Q tale che i triangoli QC_1U_1 e QC_2U_2 siano simili, cioè si ha $\dfrac{PC_1}{PC_2}=\dfrac{R_1}{R_2}$ (stessa uguaglianza).
Dato che la retta congiungente i due centri è $\{x=1\,;\,y=t\}$, P e Q saranno del tipo $(1,t)$ e dall'uguaglianza si trova $t=-6\pm 4\sqrt{2}$. (Col segno "$-$" si ha Q). Ora basta condurre da P e da Q le due rette tangenti a una qualunque delle due circonferenze e si hanno le quattro tangenti comuni.
Due tangenti passano per $P(1,-6-4\sqrt{2})$ e hanno coefficiente angolare $m=\pm\sqrt{47+32\sqrt{2}}$; le altre passano per $Q(1,-6+4\sqrt{2})$ e hanno coefficiente angolare $m=\pm\sqrt{47-32\sqrt{2}}$.



41. L'equazione è $(x-y)(x-3y)(x-1)=0$.
42. Se P ha coordinate (x,y) , allora i tre punti in questione sono: $(x,-y)$, $(x/2,y/2)$, $\left(\dfrac{-2y+4x+1}{5},\dfrac{y-2x+2}{5}\right)$ e il luogo ha equazione:
$2x^2-3xy+6y^2-2x-3y=0$.
43. I due punti sono: $P'(1-y,1-x)$ e $P''(x,2)$. Il luogo ha equazione:
$\mid(y-2)\cdot(x+y+1)\mid=1$.

Geometria nello spazio

01. a. $x+y+z-3=0$
b. P.es. $x-2y+z=0$
c. $x-3y+z+1=0$
d. P.es. $x+y+2z-5=0$

02. a. $\begin{cases}x&=&3t\\ y&=&t+1\\ z&=&2-t\end{cases}$

b. P.es. $\begin{cases}x&=&0\\ y&=&t+1\\ z&=&t+2\end{cases}$

c. $\begin{cases}x&=&6t\\ y&=&1-31t\\ z&=&2-13t\end{cases}$

03. Per $a = 2$.

04. I vettori $(B - A) = (2, 0, 1)$ e $(B - C) = (2, 2, -1)$ non sono paralleli per cui A, B, C non sono allineati. Il piano è $x - 2y - 2z + 2 = 0$.

05. Il piano è $x - 2y - z + 2 = 0$.

06. Per $a = 2$. Il piano è $3x + 2y - z = 2$.

07.

a. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

b. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = 1 - 7t \\ y = 0 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$

08.

a. $\begin{cases} x - 2y + 7z = 0 \\ x - 3y = z \end{cases}$

b. $P\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$

09. Il punto è $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

10. La retta ha come vettore direzionale il vettore $\vec{v}(1, 0, -1)$ ortogonale sia a $\vec{n}_\alpha$ che a $\vec{v}_r$ e passa per il punto di intersezione di a e r che è $P.\ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. La retta è $\begin{cases} x = 1/4 + t \\ y = 1/4 \\ z = 1/4 - t \end{cases}$

11. Intersecando r con il piano passante per $(0, 1, 0)$ e ortogonale a r si trova il punto $P'\left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{1}{7}\right)$ per cui $d = \sqrt{6/7}$. Il piano è quello che passa per P ed è ortogonale a $(P' - P)$ e cioè $4x - 5y - z + 5 = 0$.

12. a. I punti di r e s che definiscono la retta ortogonale a entrambe sono $P_r(-1, -1, 2)$ e $P_s(-2, 0, 0)$. La retta è: $\{x = -2 + t\ ;\ y = 1 - t\ ;\ z = 2t\}$.
    b. I punti di r e s che definiscono la retta parallela a $x = y = z$ sono rispettivamente $P_r(4, 4, 2)$ e $P_s(1, 1, -1)$. La retta è: $\{x = 1 + t\ ;\ y = 1 + t\ ;\ z = -1 + t\}$.

13. La retta è $\{x = 1 + 8t\ ;\ y = 2 + t\ ;\ z = -1 + 11t\}$.

14. a. La retta è $\{x = 2 + t\ ;\ y = -t\ ;\ z = 4\}$ (è l'ortogonale).
    b. La retta è $\{x = 2\ ;\ y = 0\}$ (è la proiezione).
    c. Le rette sono $\{x = 2 \pm \sqrt{5}t\ ;\ y = \mp\sqrt{5}t\ ;\ z = 4 \pm \sqrt{6}t\}$.

15. a. Non sono parallele e hanno intersezione vuota.
    b. $d = 3$.
    c. $P_r(1, 1, 0)$, $P_s(-1, 2, 2)$ e la retta è $\{x = 1 - 2t\ ;\ y = 1 + t\ ;\ z = 2t\}$.
    d. Il piano è $2x - y - 2z + 7/2$ (passante per il punto medio tra P_r e P_s).
    e. I piani sono $y = 1$ e $4x + 7y - 4z - 11 = 0$ (basta misurare la distanza di P_s da ogni piano contenente r).
    f. I punti sono $(\pm 3\sqrt{3} + 1, 1, \pm 3\sqrt{3})$.

16. a. $\{2x + 3z = 6\ ;\ x = y\}$ interesezione tra il piano per $(0, 0, 2)$ e ortogonale a r e il piano contenente s e $(0, 0, 2)$.
    b. $\{x = t\ ;\ y = -t\ ;\ z = 2\}$ cioè $\{x + y = 0\ ;\ z = 2\}$, retta per $(0, 0, 2)$ e parallela a $\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s$.

c. Per calcolare la distanza dalla retta cercata p alla retta s, si prende il piano per s e parallelo a p. Il piano è $\lambda(x-y)+\mu(y-z)=0$ la cui distanza da p è uguale a quella da un suo punto qualunque, p.es. $(0,0,2)$. Tale distanza è 1 per $\lambda=2$ e $\mu=-1\pm\sqrt{5}$. Le rette cercate sono l'intersezione tra il piano per $(0,0,2)$ e ortogonale a r e il piano per $(0,0,2)$ parallelo al piano trovato. Le rette sono quindi: $\begin{cases} x+y+3z = 6 \\ 2(x-y)+(-1\pm\sqrt{5})(y-z) = 2(1\mp\sqrt{5}) \end{cases}$

17. a. Il piano che proietta ortogonalmente P su r è $2x+y+2z=6$; la proiezione di P è $M(16/9,8/9,7/9)$; il simmetrico è $P'(23/9,16/9,-4/9)$.

b. La retta che proietta ortogonalmente P su α è $\{x=1+3t; y=-2t; z=2+t\}$; la proiezione di P è $M(-1/14,10/14,23/14)$; il simmetrico è $P''(-8/7,10/7,9/7)$.

c. $O'=2P-O=(2,0,4)$

d. Il punto simmetrico di $(2t,t,2t-1)$ rispetto a P è $(2-2t,-t,5-2t)$. r' è pertanto: $\{x=2-2t; y=-t; z=5-2t\}$.

e. Intersecando r con α si trova $M(1/3,1/6,-2/3)$. Un punto di r è per es. $R(0,0,-1)$; la proiezione di R su α è $(3/14,-2/14,-13/14)$; il simmetrico di R rispetto ad α è $R'(3/7,-2/7,-6/7)$. Allora r'' è la retta MR' e cioè $\{x=1/3-4t\ ;\ y=1/6+19t\ ;\ z=-2/3+8t\}$.

f. $x'\{x=(8-u)/9\ ;\ y=(4+4u)/9\ ;\ z=(8u-10)/9\}$: è il punto simmetrico di $(u,0,0)$ rispetto a r.

g. α' è il piano parallelo ad α e passante per $O'(2,0,4)$: $3x-2y+z=10$.

h. La retta intersezione di α con α'' è la retta giacente su α incidente e ortogonale ad r ed è quindi la retta per $P(1/3,1/6,-2/3)$ con vettore direzionale $\vec{w}(5,4,-7)$. Il simmetrico di O (punto di α) rispetto a r è $Q(8/9,4/9,-10/9)$ (cfr. x' in b.). Allora α'' è il piano contenente s e Q e cioè: $x-10y-5z-2=0$.

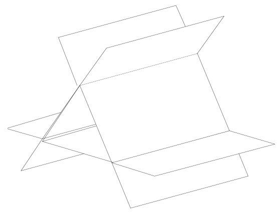
i. Il simmetrico di $(1,0,0)$ (che è un punto di $z=0$) rispetto ad α è $Q(-2/7,6/7,-3/7)$. Il piano β è il piano del fascio generato da α e $z=0$ che contiene Q. La sua equazione è: $3x-2y-6z=0$.

18. Simmetrici di P_0 sono risp. $(-x_0,-y_0,-z_0)$; $(-x_0,-y_0,z_0)$; $(x_0,y_0,-z_0)$
Simmetriche di r sono risp. $\{-x(y),-y(t),-z(t)\}$; $\{-x(y),-y(t),z(t)\}$; $\{x(y),y(t),-z(t)\}$.
Simmetrici di α sono risp. $ax+by+cz+d=0$; $-ax-by+cz=d$; $ax+by-cz=d$.

19. $x+(\pm\sqrt{2}-2)(y-2)+(-3\pm2\sqrt{2})z=0$.

20. Si tratta innanzitutto di determinare il numero di soluzioni del sistema lineare delle equazioni dei tre piani che è associato alla matrice seguente:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & a+1 & 0 \\ 0 & 2-2a^2 & 4a+3 & a^2+3 \end{array}\right)$ Riduciamo con $R_2 \to R_2-2R_1$:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & -4 \\ 0 & 2-2a^2 & a-1 & 8 \\ 0 & 2-2a^2 & 4a+3 & a^2+3 \end{array}\right)$ e poi con $R_3 \to R_3-R_2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & -4 \\ 0 & 2-2a^2 & a-1 & 8 \\ 0 & 0 & 3a+4 & a^2-5 \end{array}\right)$
Guardando la diagonale del sistema, si vede che è ridotto se $a\neq 1,-1,-4/3$, pertanto per questi valori il sistema ha un'unica soluzione e i tre piani si intersecano in un solo punto. Esaminiamo i tre casi particolari:
•Se $a=1$, allora la seconda equazione del sistema ridotto diventa $0=8$, pertanto il sistema non ha soluzione. Per capire come sono disposti i tre piani esaminiamoli:
$\alpha: x+y+z=-4 \qquad \beta: 2x+2y+2z=0 \qquad \gamma: +7z=4$
Si constata subito che α e β sono paralleli, mentre γ incide α e β e per questo i piani non hanno punti in comune.
•Se $a=-1$, la matrice del sistema ridotto diventa: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$ Qundi il sistema ha ∞^1 soluzioni e perciò i piani costituiscono un fascio: esaminiamo allora i tre piani:
$\alpha: x+y+z=-4 \qquad \beta: 2x+2y=0 \qquad \gamma: -z=4$

Le tre equazioni sono una rappresentazione cartesiana dell'asse del fascio, che quindi è la retta $\{2x + 2y = 0\ ;\ -z = 4\}$ che ha vettore direzionale $(2, 2, 0) \wedge (0, 0, -1) = (-2, 2, 0)$



•Se $a = -4/3$, l'ultima equazione è $0 = -29/9$, pertanto il sistema non ha soluzioni. Esaminando i tre piani α, β, γ, si vede subito che in questo caso essi non sono a due a due paralleli, ciò significa che sono disposti come in figura e perciò non hanno punti a comune.

21. a. $\sqrt{30}$: modulo del vettore $(B - A) \wedge (C - A)$.
    b. Ponendo $\mid (B - A) \wedge (C - A) \cdot (D - A) \mid = 3$ si trova $D = (4, 0, 0)$ oppure $D = (10, 0, 0)$.

30. $x = 2y - 1/2$.

31. $\begin{cases} x &= 2u + 1 \\ y &= (3u + 1)/2 \\ z &= u + 1 \end{cases}$

32. Si scrive il fascio come $a(x - y) + z - 1 = 0$ (si perde un piano: $x = y$). La proiezione di P su ciascun piano del fascio è $\begin{cases} x &= (1 + 3a^2 - 2a)/(1 + 2a^2) \\ y &= (2 + 3a^2 + 2a)/(1 + 2a^2) \\ z &= (1 + 6a^2 + a)/(1 + 2a^2) \end{cases}$. Questa è una rappresentazione parametrica del luogo cercato (ma manca un punto, la proiezione di P su $x = y$ e cioè $(3/2, 3/2, 3)$.

33. È $\dfrac{\mid x - 2z + 1 \mid}{\sqrt{5}} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2}$ o anche (dato che i due membri sono positivi) $(x - 2z + 1)^2 = 5(x - 1)^2 + 5(y - 3)^2 + 5(z - 2)^2$ che si può anche scrivere (a seconda della convenienza): $4x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xz - 12x - 30y - 16z + 69 = 0$.

34. È $\begin{cases} 4x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xz - 12x - 30y - 16z + 69 &= 0 \\ y &= 3z \end{cases}$ (cfr. 33.)

35. La distanza di un punto (α, β, γ) dalla retta è $\sqrt{(\alpha - \beta)^2/2 + \gamma^2}$, la distanza dal piano è $\mid \alpha - 2\gamma + 1 \mid /5$. Uguagliandole e quadrando si ha l'equazione del luogo:
$\dfrac{(x - y)^2}{2} + z^2 = \dfrac{(x - 2z + 1)^2}{5}$

36. La distanza del punto (α, β, γ) dalla retta r è $\sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\beta + \gamma)^2/2}$, quella dalla retta s è $\sqrt{(\alpha - \beta)^2/2 + \gamma^2}$. Uguagliandole e quadrando si ha l'equazione del luogo:
$(x - 1)^2 + \dfrac{(y + z)^2}{2} = \dfrac{(x - y)^2}{2} + z^2$.

37. Le proiezioni del punto (α, β, γ) sono rispettivamente $((\alpha+\beta+1)/2, (\alpha+\beta-1)/2, \gamma)$ e $(\alpha, 0, 1)$. Questi punti sono allineati con $(0, 0, 0)$ se e solo se le loro coordinate sono proporzionali cioè se $\dfrac{(\alpha + \beta + 1)/2}{\alpha} = \dfrac{(\alpha + \beta - 1)/2}{0} = \dfrac{\gamma}{1}$ o, più correttamente: $\begin{cases} (\alpha + \beta - 1)/2 &= 0 \\ (\alpha + \beta - 1)/2 &= \alpha\gamma \end{cases}$. Sostituendo (x, y, z) ad (α, β, γ) si ha la rappresentazione cartesiana del luogo: $\begin{cases} x + y &= 1 \\ xz &= 1 \end{cases}$

38. Poniamo $P = (\alpha, \beta, \gamma)$.
La proiezione del punto P sul piano è il punto $P_1((2\alpha - \beta - \gamma)/3, (-\alpha + 2\beta - \gamma)/3, (-\alpha - \beta + 2\gamma)/3)$.
La proiezione di P_1 sulla retta è $P_2(1, (\beta + \gamma - 2\alpha)/6, (\beta + \gamma - 2\alpha)/6)$. Ponendo $d(P_1, O) = d(P_1, P_2)$ si ha:
$$\left(\frac{2\alpha - \beta - \gamma}{3}\right)^2 + \left(\frac{-\alpha + 2\beta - \gamma}{3}\right)^2 + \left(\frac{-\alpha - \beta + 2\gamma}{3}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{2\alpha - \beta - \gamma - 3}{3}\right)^2 + \left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right)^2.$$
Sostituendo (x, y, z) ad (α, β, γ) si ha la rappresentazione cartesiana.

40. Le rette sono: $\dfrac{x-t}{3u-t}=\dfrac{y-t}{u-t}=\dfrac{z-t}{1-t}$ con $t-2=u$ cioè: $\dfrac{x-t}{2t-6}=\dfrac{y-t}{-2}=\dfrac{z-t}{1-t}$

Una rappr. parametrica del luogo è $\begin{cases} x &= t+v(2t-6) \\ y &= t-2v \\ z &= t+v(1-t) \end{cases}$. Eliminando t e v se ne ha una cartesiana: $y-(x-2y+2z)y-3(x-2y+2z)+2z+(x-2y+2z)^2=0$.

41. a. Il piano α contenente P e r è $x=2y-1$. Il piano β contenente P e s è $2x-y+3z-4=0$. La retta $\begin{cases} x &= 2y-1 \\ 2x-y+3z-4 &= 0 \end{cases}$ è incidente sia r che s come si può verificare ed è perciò quella cercata.

b. Come in a. si ha il piano $\alpha : x-2y+3z-2=0$ e il piano $\beta : 2x-y+3z-4=0$, ma la retta $\begin{cases} x-2y+3z-2 &= 0 \\ 2x-y+3z-4 &= 0 \end{cases}$ è parallela a r, quindi la retta cercata non esiste.

42. Come in 41. si trovano le rette per $P(t,t,t)$ incidenti r e s (ma per $t=14/11$ e $t=-1/11$ si hanno rette parallele risp. a r e s).
Le rette sono: $\begin{cases} 2t(x-2y+1)+(t-1)(x+z) &= 0 \\ 2t(x-2)+(t-2)(y-3z) &= 0 \end{cases}$
Eliminando t dal sistema si ha l'equazione cartesiana del luogo:
$(2y-6z)(3x-4y+z+2)=(x+z)(2x+y-3z-4)$ (che naturalmente non comprende le due rette in più).

43. Le rette sono $\dfrac{x}{l}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z}{n}$ dove $\dfrac{\mid m+n \mid}{\sqrt{2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Per eliminare m e n conviene supporre (non restrittivamente) $l^2+m^2+n^2=1$ e si ottiene $(x^2+y^2+z^2)=2/3(y+z)^2$ o anche $3x^2+y^2+z^2-4yz=0$.

44. La proiezione di $(1,1,1)$ sulla retta è $\left(\dfrac{1+m}{1+m^2},\dfrac{m+m^2}{1+m^2},0\right)$. La retta che congiunge i due punti è $\begin{cases} (1-x) &= m(y-1) \\ (m-1)(1-z) &= (1+m^2)(y-1) \end{cases}$. Eliminando m si ha la rappresentazione cartesiana del luogo: $(y-1)^2+(1-x)^2=(1-z)(2-x-y)$ o anche: $x^2+y^2-xz-yz-x-y+2z=0$, che però comprende anche la retta $\{y=1; x=z\}$ che è la retta per P perpendicolare e incidente la retta "mancante" del fascio e cioè $x=z=0$.