

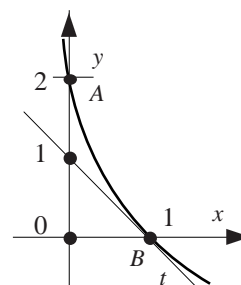
GEOMETRIA LINEARE NEL PIANO

È fissato nel piano un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche Oxy .

- F 01. Scrivere due diverse rappresentazioni parametriche per le seguenti rette:
- La retta che passa per i punti $A(-1, 3)$ e $B(2, 1)$
 - La retta di equazione cartesiana $x = 2$
 - La retta di equazione cartesiana $x - 3y = 4$
- F 02. Sia r la retta rappresentata parametricamente a lato.
- Scrivere un'altra rappresentazione parametrica per r tale che il punto A di r di ascissa 0 si ottenga per $t = 0$ e quello B di ordinata 0 per $t = 1$. $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 2 \end{cases}$
 - Dividere il segmento \overline{AB} in due e in tre parti uguali.
- F 03. Dire se le rette r_1 e r_2 coincidono e se le rette s_1 e s_2 coincidono
- $$r_1 \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = t - 1 \end{cases} \quad r_2 \begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = t \end{cases} \quad s_1 \begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 2 \end{cases} \quad s_2 \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 2 \end{cases}$$
- F 04. Determinare, se possibile, il coefficiente angolare delle seguenti rette:
- $2x - y = 4$
 - $y + 4 = 0$
 - $x - 10 = 0$
 - $x = 3y$
 - $\frac{x - 3}{5} = \frac{y + 7}{1}$
 - $\begin{cases} x = 3t \\ y = t - 1 \end{cases}$
- F 05. Verificare che le tre rette $x - 2y + 3 = 0$; $3x + y + 2 = 0$; $x - 6y + 7 = 0$ appartengono ad un fascio e determinarne il centro.
- F 06. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le tre rette $2kx - ky = 1$; $2x = ky$; $-2kx + y = 1$ appartengono ad un fascio ?
- F 07. Nella famiglia di rette $x + 3ky - 5k + 2 = 0$ determinare (se esistono)
- La retta un cui vettore direzionale sia $(2, 1)$.
 - La retta parallela all'asse x e quella parallela all'asse y .
 - Il punto comune a tutte le rette.
 - Le rette s tali che il triangolo determinato da s e dai due assi coordinati abbia area 7.
- F 08. Determinare due punti P della retta $x - y + 2 = 0$ tali che il triangolo POA sia rettangolo in P , dove O è l'origine delle coordinate e $A = (10, 0)$.
- F 09. Scrivere la retta r rispetto alla quale siano simmetrici $A(0, 4)$ e $B(1, -2)$.
- F 10. a. Determinare il punto simmetrico di $P(1, 1)$ rispetto alla retta $r : x - 2y = 1$.
b. Determinare la retta simmetrica di $s : x + y = 2$ rispetto alla retta $r : x - 2y = 1$.
- F 11. Scrivere un'equazione cartesiana che sia soddisfatta da tutti e soli i punti dell'insieme costituito dall'unione delle rette $x = y$; $x = 3y$; $x = 1$.
- C 12. Determinare le rette passanti per $P(0, 1)$ e formanti con la retta $y = 2x$ un angolo di $\pi/6$.
- C 13. Determinare le due bisettrici degli angoli formati dalle rette $2x - y = 0$ e $x + y = 1$ e dire quale di esse è situata nell'angolo minore.
- A 14. Tra i punti P della retta $r : 4x - 3y + 2 = 0$ determinare quello il cui simmetrico rispetto alla retta $s : x - 2y = 2$ ha distanza minima da $(0, 0)$.
- A 15. Date le due rette $r : x + 2y = 2$; $s : \{x = 2 - t ; y = 3 + 2t\}$ e il loro punto comune P , determinare i punti di r la cui proiezione ortogonale su s dista 5 da P .
- A 16. Dati i tre punti $A(0, 0)$, $B(1, 2)$, $C(6, 0)$, determinare un quarto punto D in modo che i quattro punti formino un parallelogramma. In quanti modi è possibile ?
- T 17. Determinare il baricentro del triangolo $A(a_1, a_2)$ $B(b_1, b_2)$ $C(c_1, c_2)$

CIRCONFERENZE NEL PIANO

- F 21. Scrivere le equazioni delle circonferenze di raggio $\sqrt{5}$, passanti per il punto $(0, 0)$ e ivi tangenti alla retta $r : 2x = 3y$.
- F 22. Scrivere l'equazione delle circonferenze di raggio 1 aventi il centro sull'asse x e tangenti alla retta $y = 2x$.
- F 23. Scrivere le equazioni delle circonferenze passanti per i punti $A(-2, 2)$ e $B(2, 0)$ e tangenti alla retta $r : x + y + 2 = 0$.
- F 24. Scrivere le equazioni delle rette passanti per $(1, 2)$ e tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x + 8y = 0$.
- F 25. Scrivere l'equazione della circonferenza γ di cui è raffigurato un arco. Sono evidenti due suoi punti A e B e la retta t tangente a γ in B .
- F 26. Tra le rette del fascio di centro $(4, -1)$ determinare quelle che tagliano la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4x$ in una corda di lunghezza 2.
- A 27. Tra le circonferenze tangenti alle rette parallele $y = 2x+1$ e $y = 2x+3$ determinare le due che sono tangenti anche alla retta $s : 3x = y$.
- A 28. Scrivere le equazioni delle circonferenze con centro sull'asse y e tangenti a $x + y + 1 = 0$ e a $2x - y = 4$.
- C 29. Scrivere l'equazione di una circonferenza di raggio 3 con centro sulla retta $r : y = 3x + 2$ e che sia tagliata dalla retta $s : x + y = 2$ in una corda di lunghezza 2.
- A 30. Che raggio deve avere una circonferenza di centro $(3, 0)$ affinché una delle rette ad essa tangenti in una delle sue intersezioni con $y = 2x$ intercetti l'asse x nel punto $(-3, 0)$?
- A 31. Siano $r : 2x = y$; $s : 3x + y = 0$ due rette; determinare tra le due bisettrici degli angoli di r e s quella situata nell'angolo minore. Determinare quindi le circonferenze di raggio 2 situate negli angoli minori tra r e s e tangenti sia a r che a s .
- C 32. Date le circonferenze $\gamma_1 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ e $\gamma_2 : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = R^2$.
 - a. Discutere al variare di $R \in \mathbb{R}$ la reciproca posizione.
 - b. Nei casi in cui sono tangenti determinare la comune retta tangente.
 - c. Per $R = 3$ scrivere la retta passante per i punti di intersezione.
- A 33. Date le circonferenze $\gamma_1 : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$ e $\gamma_2 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$, determinare le equazioni delle quattro rette tangenti a entrambe.



GEOMETRIA LINEARE NELLO SPAZIO

È fissato nello spazio un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche destrorso $Oxyz$.

- F 41. Sono dati il punto $P = (0, 1, 2)$ e il piano $\alpha : x - 3y + z = 0$. Determinare:
 - a. il piano passante per P e parallelo al piano α .
 - b. due piani passanti per P e ortogonali al piano α .
 - c. la retta passante per P e ortogonale al piano α .
 - d. la proiezione ortogonale di P sul piano α .
- F 42. Sono dati la retta r e il punto $P = (0, 1, 2)$. Determinare:
 - a. la retta passante per P e parallela a r .
 - b. due rette passanti per P e ortogonali a r .
 - c. il piano passante per P e ortogonale a r .
 - d. la proiezione ortogonale di P sulla retta r .
 - e. la distanza di P da r .
 - f. la retta passante per P e perpendicolare (e incidente) a r .
- F 43. È data per ogni $k \in \mathbb{R}$ la retta r di rappresentazione cartesiana $\{x + y = k \ ; \ z + k^2y = 1\}$.

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$$

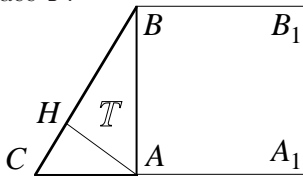
- a. Scrivere per ogni $k \in \mathbb{R}$ una rappresentazione parametrica per r .
 b. Dire per ogni $k \in \mathbb{R}$ qual è la posizione reciproca della retta e del piano $\alpha : x + 2y + z = 0$.
- F 44. Dati i tre punti $A(0, 1, 0)$ $B(2, 1, 1)$ $C(0, -1, 2)$, dimostrare che non sono allineati e determinare il piano che li contiene.
- F 45. Determinare il piano che contiene il punto $P(1, 0, 3)$ e la retta $r : x = y = 2 - z$.
- F 46. Dire per quale $k \in \mathbb{R}$ le rette r e s sono incidenti e per tale k determinare il piano che le contiene. $r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = t \\ y = k - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$
- F 47. Sono dati i tre piani α, β, γ al variare di $k \in \mathbb{R}$
- | | |
|---|--|
| a. Determinarne la posizione reciproca per ogni $k \in \mathbb{R}$. | $\alpha : x + k^2y + z = -4$ |
| b. Nei casi in cui i tre piani formano un fascio determinare la direzione dell'asse | $\beta : 2x + 2y + (k + 1)z = 0$ |
| | $\gamma : (2 - 2k^2)y + (4k + 3)z = k^2 + 3$ |
- F 48. Dati il punto $P(1, 0, 1)$, la retta $r : x - 2y = z = 0$ e il piano $\alpha : x - 3y = z$.
- a. Trovare la proiezione ortogonale di P su r e la proiezione ortogonale di P su α .
 b. Trovare la proiezione ortogonale di r su α .
- F 49. Determinare la retta s giacente sul piano $\alpha : x + 2y + z = 1$ perpendicolare e incidente la retta $r : \{x = y = z\}$
- F 50. Data la retta $r : \{x = 2t ; y = t ; z = -1 + 3t\}$
- a. Scrivere la retta s passante per $P(0, 1, 0)$ e parallela a r e determinare la distanza tra r e s .
 b. Tra i piani passanti per P e paralleli a r determinare quello che ha distanza massima da r .
- F 51. Dati i punti $A(2, 1, 0)$, $B(1, 0, 3)$, $C(0, 1, 1)$:
- a. Determinare l'area del parallelogramma di lati AB e AC .
 b. Determinare il punto S dello spazio tale che $ABSC$ sia un parallelogramma.
 c. Trovare i punti D dell'asse x per cui il volume del parallelepipedo di lati AB, AC, AD è 3.
- F 52. Date le rette $r : \{x = y ; z = 2\}$ e $s : \{x = 3y - 2 ; z + y = 0\}$
- a. Dimostrare che sono sghembe.
 b. Scrivere tutte le rette incidenti sia r che s .
 c. Tra esse determinare quella ortogonale a entrambe.
 d. Tra esse determinare quella parallela alla retta $x = y = z$.
 e. Calcolare la distanza d tra r e s .
- F 53. Determinare sul piano $\alpha : x - 2y + z = 0$ che contiene il punto $P(1, 0, -1)$:
- a. la retta r_1 passante per P e ortogonale all'asse x .
 b. la retta r_2 passante per P e parallela al piano $\beta : 3x = z$.
 c. la retta r_3 passante per P e incidente la retta $s : x - 3y = z - 2 = 0$.
- F 54. Tra le rette perpendicolari e incidenti alla retta r nel suo punto $P(0, 0, 2)$ determinare:
- | | |
|--|---|
| a. quella incidente la retta $s : \{x = y = z\}$ | $r : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 3y + 2 \end{cases}$ |
| b. quella ortogonale a s . | |
| c. quelle che hanno distanza 1 da s . | |
- A
- C 55. Determinare il punto della retta $r : x = y = z - 1$ la cui proiezione ortogonale sulla retta $s : x - 2y = z + x = 0$ sia l'origine delle coordinate.
- C 56. Tra le rette uscenti da $P(1, 2, -1)$ e parallele al piano $\alpha : x + 3y - z = 1$ determinare quella incidente la retta $r : \{x = 3y ; z = x + 1\}$.
- C 57. Date le rette r e s
- | | |
|--|--|
| a. Dimostrare che r e s sono sghembe. | $r : \begin{cases} x - z = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ |
| b. Determinare la loro distanza d . | |
| c. Determinare la perpendicolare comune e i punti P_r, P_s di minima distanza. | |
| d. Determinare il piano parallelo a entrambe e da esse equidistante. | |

- A e. Determinare i piani α contenenti r tali che la proiezione di P_s su α abbia distanza 1 da P_s .
- A f. Determinare i punti di r che distano $2d$ da s .
- C 58. Consideriamo tutte le rette s giacenti sul piano $\alpha : x + y = 2$ e incidenti la retta r .
Per ognuna di esse sia θ l'angolo che s forma con r (quello compreso tra 0 e $\pi/2$). Determinare tra le rette s quelle tali che:
- $r : \begin{cases} x = y + 2 \\ z = 2x \end{cases}$
- A a. θ sia massimo. B b. θ sia minimo. C c. $\theta = \pi/3$
- C 59. Dati il punto $P(1, 0, 2)$, la retta $r : \{x = 2y = z + 1\}$ e il piano $\alpha : 3x - 2y + z = 0$.
- F a. Determinare il punto P' simmetrico di P rispetto a r .
- F b. Determinare il punto P'' simmetrico di P rispetto ad α .
- F c. Determinare il punto O' simmetrico di O rispetto a P .
- C d. Determinare la retta r' simmetrica di r rispetto a P .
- F e. Determinare la retta r'' simmetrica di r rispetto ad α .
- C f. Determinare la retta x' simmetrica dell'asse x risp. a r .
- C g. Determinare il piano α' simmetrico di α rispetto a P .
- A h. Determinare il piano α'' simmetrico di α rispetto a r .
- A i. Determinare il piano β simmetrico di $z = 0$ rispetto ad α .
- C 60. Determinare i simmetrici del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, della retta $r : \{x = x(t); y = y(t); z = z(t)\}$ e del piano $\alpha : ax + by + cz = d$ rispetto al punto $(0, 0, 0)$, alla retta $x = y = 0$ e al piano $z = 0$.
- A 61. Determinare i piani passanti per il punto $P(0, 2, 0)$, paralleli alla retta $r : \{x - y = z; y = 2x\}$ e aventi distanza 1 da r .
- A 62. Determinare (se esiste) la retta passante per $P(1, 1, 1)$ e incidente le due rette r e s nei due casi seguenti.
- a. $r : \{x = 2y - 1 = -z\}$
 $s : \{x = 2; y = 3z\}$

b. $r : \{x = -y - 1 = -z\}$
 $s : \{x =; y = 3z\}$

SFERE E CIRCONFERENZE NELLO SPAZIO

- F 71. Sono dati la sfera S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 3z = 0$ e il piano α di equazione $x + 2y + z = 2$.
- A a. Determinare centro e raggio di S .
- A b. Dire perché l'intersezione tra S e α è una circonferenza e determinarne centro, raggio e asse.
- A c. Determinare i piani paralleli al piano α e tangenti a S .
- A d. Determinare i piani paralleli al piano α che tagliano S in una circonferenza di raggio $1/2$.
- A e. Determinare i due punti P_1 e P_2 di intersezione di S con la retta $\{x = t; y = t; z = t\}$ e scrivere i piani tangenti a S in P_1 e P_2 .
- A f. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ dire se la retta $\{x = t + 1; y = kt; z = 3\}$ è incidente, tangente o esterna a S .
- F 72. Sono dati la retta $r : \{z = x - 3; y = 1\}$ e il punto $P(0, 2, 1)$.
- A a. Scrivere una rappresentazione cartesiana per la circonferenza γ ottenuta ruotando P attorno a r , in altre parole la circonferenza avente asse r e passante per P .
- A b. Determinare la retta t tangente a γ in P .
- A c. Determinare le sfere di raggio 9 contenenti γ .
- A d. Determinare le sfere contenenti γ e tangenti al piano $\alpha : x = 5$.
- F 73. Sono dati i quattro punti $C_0(0, 1, 1)$ $A(2, 0, 0)$ $B(1, 3, 2)$ $C(1, -1, 0)$
- A a. Dire perché esiste una sfera S di centro C_0 e passante per A, B, C e scrivere una rappresentazione cartesiana per S .
- A b. Scrivere una rappresentazione cartesiana per la circonferenza γ giacente su S e passante per A, B, C .
- A c. Scrivere l'asse a , il centro C_1 e il raggio R_1 di γ .
- A d. Scrivere una rappresentazione parametrica per la retta tangente a γ in A .

- F 74. a. Scrivere l'equazione di tutte le sfere tangenti in $(1, 1, 0)$ al piano $x = y$.
 b. Tra tali sfere determinare quelle di raggio $\sqrt{2}$.
 c. Tra tali sfere determinare quelle tangenti anche al piano $x + z = 3$.
- F 75. Data la sfera S di equazione $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x + 8z + 1 = 0$ e la retta $r : \{x - y = 0 ; z = 0\}$, verificare che r è esterna a S e scrivere i piani del fascio di asse r tangenti a S .
- F 76. Determinare una rappresentazione cartesiana per la circonferenza di centro $C(0, 1, 2)$ e tangente alla retta $r : \{x = 1 + 2t ; y = 1 + t ; z = -t\}$.
- F 77. Date le due rette $r : \{x - z = 1 ; y + 2z = 1\}$ e $s : \{x = t ; y = 2 ; z = 3 - t\}$
 a. Dimostrare che sono ortogonali e sghembe e determinarne la distanza.
 b. Dire perché esiste una circonferenza di asse r e tangente a s e scriverne una rappresentazione cartesiana.
- F 78. Determinare una sfera di raggio 2, con centro sulla retta $r : x = y = z - 1$ e tangente al piano $\alpha : x = 3y$.
- F 79. Dato il triangolo $T : ABC$, con $A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 0)$, $C(0, -1, 1)$
 a. Dire perché il triangolo T è rettangolo in A .
 b. Determinare il punto H , proiezione di A sull'ipotenusa e misurare l'altezza \overline{AH} .
 c. Scrivere una rappresentazione cartesiana per il piano α su cui giace T .
 d. Determinare una rappresentazione cartesiana per la circonferenza circoscritta a T .
 e. Nel piano di T , costruire il quadrato AA_1B_1B sul cateto AB determinando il punto A_1 sul prolungamento del cateto AC e il quarto punto B_1 come in figura.
- 
- C 80. Dati i tre punti $A(0, 1, 1)$, $B(1, 1, 0)$ e $C(1, -1, 1)$, verificare che non sono allineati e determinare la circonferenza passante per A, B, C .
- C 81. Determinare le sfere di raggio 1, con centro sul piano $x = y - z$, tangenti ai piani $x = 0$ e $y + z = 1$.
- A 82. Sia γ la circonferenza del piano $x = 3y - 1$ avente centro $(-1, 0, 0)$ e raggio 1.
 a. Scrivere le due sfere contenenti γ e tangenti al piano $x = 0$.
 b. Scrivere le rette tangenti alla circonferenza nei suoi punti di ascissa $-1/7$.
 c. Condurre dal punto $P(2, 1, 1)$ (che giace sul piano $x = 3y - 1$) le tangenti alla circonferenza.
- A 83. Data la sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$
 a. Tra le rette passanti per $(0, 0, 0)$ e parallele al piano $x = z + 1$, determinare quelle che staccano su S una corda di lunghezza 1.
 b. Determinare il cerchio massimo di S passante per $P(0, 0, 0)$ e per $Q(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$.
 c. Determinare le circonferenze di raggio $\sqrt{3}/2$ giacenti su S e passanti per P e Q .
 d. Verificato che la retta $r : \{z = 2 ; y = 3x\}$ è tangente a S , determinare le circonferenze di raggio $\sqrt{3}/2$ giacenti su S e tangenti a r .
- A 84. Tra le rette tangenti alla sfera di centro $(1, 1, 2)$ e raggio 2 nel suo punto di minima distanza da $(0, 0, 0)$ determinare :
 a. quella ortogonale all'asse y .
 b. quella incidente l'asse y .
- A 85. Verificare che i punti $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 1)$ e la retta $r : \{x + z = 1 ; y = 2\}$ sono complanari e determinare le circonferenze passanti per A e B e tangenti a r .
- A 86. Determinare i punti P della retta $r\{x = t ; y = 2t + 1 ; z = 1 - t\}$ tali che la sfera di centro P e tangente al piano $x + y + z = 0$ abbia raggio $\sqrt{3}$.