Insiemi, applicazioni: Risposte

01. Sottoinsiemi di A: $\emptyset$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{2,3\}$, $\{2,5\}$, $\{3,5\}$, A
B è un'insieme di due elementi: un elemento è il numero 3, l'altro elemento è l'insieme $\{1,2\}$.
I sottoinsiemi di B sono quindi: $\emptyset$, $\{\{1,2\}\}$, $\{3\}$, B.

Osserviamo che $\{\{1,2\}\}$ è il sottoinsieme di B costituito dall'unico elemento $\{1,2\}$.

02. P.es. $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{1,3\}$.

03. a. Proviamo che $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$:
Se $x \in (A \cap B) \cup C$ allora $x \in A \cap B$ oppure $x \in C$.
Nel primo caso $x \in A$ e $x \in B$ quindi $x \in A \cup C$ (che contiene A) e $x \in B \cup C$ (che contiene B). Perciò $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
Nel secondo caso $x \in A \cup C$ e $x \in B \cup C$ (insiemi che contengono entrambi C), da cui $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Viceversa proviamo che $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$:
Se $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, allora $x \in A \cup C$ e $x \in B \cup C$. I casi sono quattro:
$x \in A$ e $x \in B$: allora $x \in A \cap B$ allora $x \in (A \cap B) \cup C$ (che contiene $A \cap B$).
$x \in A$ e $x \in C$: allora $x \in (A \cap B) \cup C$ (che contiene C).
$x \in C$ e $x \in B$: allora $x \in (A \cap B) \cup C$ (che contiene C).
$x \in C$ e $x \in C$: allora $x \in (A \cap B) \cup C$ (che contiene C).

b. Proviamo che $X - (A \cap B) \subset (X - A) \cup (X - B)$
Se $x \in X - (A \cap B)$ allora $x \notin A \cap B$ cioè $x \notin A$ oppure $x \notin B$ da cui $x \in X - A$ oppure $x \in X - B$ ovvero $x \in (X - A) \cup (X - B)$.

Viceversa proviamo che $(X - A) \cup (X - B) \subset X - (A \cap B)$:
Se $x \in (X - A) \cup (X - B)$ allora $x \in X - A$ oppure $x \in X - B$ cioè $x \notin A$ oppure $x \notin B$, pertanto x non può stare in $A \cap B$ e $x \in X - (A \cap B)$.

04. a. Proviamo che $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$:
Se $x \in (A \cup B) \cap C$ allora $x \in A \cup B$ e $x \in C$. Ci sono due casi:
Nel primo caso $x \in A$ e $x \in C$ cioè $x \in A \cap C$ perciò $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (che contiene $A \cap C$).
Nel secondo caso $x \in B$ e $x \in C$ cioè $x \in B \cap C$ perciò $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (che contiene $B \cap C$).

Viceversa proviamo che $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$:
Se $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, allora $x \in A \cap C$ oppure $x \in B \cap C$. I casi sono due:
$x \in A \cap C$ allora $x \in A$ e $x \in C$ da cui $x \in A \cup B$ (che contiene A) e $x \in C$ perciò $x \in (A \cup B) \cap C$.
$x \in B \cap C$ allora $x \in B$ e $x \in C$ da cui $x \in A \cup B$ (che contiene B) e $x \in C$ perciò $x \in (A \cup B) \cap C$.

b. Proviamo che $X - (A \cup B) \subset (X - A) \cap (X - B)$:
Se $x \in X - (A \cup B)$ allora $x \notin A \cup B$ cioè $x \notin A$ e $x \notin B$ da cui $x \in X - A$ e $x \in X - B$ ovvero $x \in (X - A) \cap (X - B)$.

Viceversa proviamo che $(X - A) \cap (X - B) \subset X - (A \cup B)$:
Se $x \in (X - A) \cap (X - B)$ allora $x \in X - A$ e $x \in X - B$ cioè $x \notin A$ e $x \notin B$, pertanto x non può stare in $A \cup B$ e $x \in X - (A \cup B)$.

05. È falso: p.es. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4\}$, $C = \{2,3,5\}$.

06. P.es. $A = \{1,4,5\}$, $B = \{1,2,6\}$, $C = \{2,3,4\}$, $D = \{3,5,6\}$.

07. $A = \{-1\}$, quindi $A \not\subset \mathbb{N}$. $B = \{-1,1\}$, quindi $B \not\subset \mathbb{N}$.
$C = \mathbb{Z}$, quindi: $C \not\subset \mathbb{N}$.

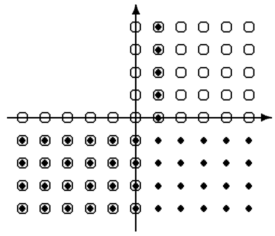
08. a. Chiaramente $B = \{n \in \mathbb{N} : n > 4\}$ quindi:
$A \cap B = \{n \in \mathbb{N} : 4 < n < 8\} = \{5,6,7\}$
$A \cup B = \mathbb{N}$ $\quad X - B = \{0,1,2,3,4\}$

b. $A \cap B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ multiplo di } 6\}$
$A \cup B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ multiplo di 2 o di } 3\} = \{0,2,3,4,6,8,9,\ldots\}$
$X - B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ non triplo}\} = \{1,2,4,5,7,8,\ldots\}$

c. $A = \mathbb{Z} - \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$B = \{n \in \mathbb{Z} : -2 < n - 2 < 2\} = \{n \in \mathbb{Z} : 0 < n < 4\} = \{1, 2, 3\}$, quindi:

$A \cap B = \{3\} \qquad A \cup B = \mathbb{Z} - \{-2, -1, 0\} \qquad X - B = \mathbb{Z} - \{1, 2, 3\}$

d. Si vede che $A \subset B$ quindi:
$A \cap B = A \qquad A \cup B = B$
$X - B = \{(x, y) : x < 0 \text{ e } y < 0\}$



e. Si ha:
$A = \{(x, y) : y \geq 0 \text{ e } x = 1\} \cup \{(x, y) : y < 0\}$
$B = \{(x, y) : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\} \cup \{(x, y) : x \leq 0 \text{ e } y \leq 0\}$
Possiamo disegnare i due sottoinsiemi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nel piano: con puntini indichiamo gli elementi di A, con circoletti quelli di B, quindi:
$A \cap B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (x \leq 0 \text{ e } y < 0) \text{ o } (x = 1 \text{ e } y \geq 0)\}$
$A \cup B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{(x, y) : x < 0 \text{ e } y > 0\} \qquad X - B = \{(x, y) : x \cdot y < 0\}$

21. a. Sì
b. Sì
c. No: non è unica
d. No: $\varphi(1/2) = 3$, $\varphi(2/4) = 6$, ma $1/2 = 2/4$.
e. Sì
f. No: $\varphi((1, 0)) = ?$
g. Sì
h. Sì
i. No: $\varphi(-2) = ?$
l. Sì
m. No: $\varphi(4) = 4$ e $\varphi(4) = 1$
n. Sì

22. a. Sono le 8 seguenti:
$$\begin{cases} 1 \to 0 \\ 2 \to 0 \\ 3 \to 0 \end{cases} \begin{cases} 1 \to 0 \\ 2 \to 0 \\ 3 \to 5 \end{cases} \begin{cases} 1 \to 0 \\ 2 \to 5 \\ 3 \to 0 \end{cases} \begin{cases} 1 \to 5 \\ 2 \to 0 \\ 3 \to 0 \end{cases} \begin{cases} 1 \to 0 \\ 2 \to 5 \\ 3 \to 5 \end{cases} \begin{cases} 1 \to 5 \\ 2 \to 0 \\ 3 \to 5 \end{cases} \begin{cases} 1 \to 5 \\ 2 \to 5 \\ 3 \to 0 \end{cases} \begin{cases} 1 \to 5 \\ 2 \to 5 \\ 3 \to 5 \end{cases}$$
b. Sono 4: (Il secondo insieme ha due elementi).
$$\begin{cases} 1 \to \{1, 2\} \\ 2 \to \{1, 2\} \end{cases} \begin{cases} 1 \to \{1, 2\} \\ 2 \to \ 3 \end{cases} \begin{cases} 1 \to \ 3 \\ 2 \to \{1, 2\} \end{cases} \begin{cases} 1 \to 3 \\ 2 \to 3 \end{cases}$$
c. Una sola: quella costante.
d. Sono tante quanti gli elementi di $\mathbb{N}$, dato che ogni applicazione è individuata dall'immagine dell'elemento 1.
e. Sono tante quanti gli elementi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dato che ogni applicazione è individuata dalla coppia di numeri interi costituita dall'immagine di 1 e da quella di 2 e viceversa.
f. Sono tante quanti i sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$. Infatti ogni applicazione individua un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ e cioè $\varphi^{-1}(1)$. Viceversa ogni sottoinsieme A di $\mathbb{Z}$ individua la seguente applicazione:
$$\varphi(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \in A \\ 2 & \text{se } n \in \mathbb{Z} - A \end{cases}$$

23. a. È iniettiva: se $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$, allora $3n_1 = 3n_2$ da cui $n_1 = n_2$.
Non è surgettiva. P.es. non c'è evidentemente un n tale che $\varphi(n) = 1$.
b. Non è iniettiva: p.es. $\varphi(0, 1) = \varphi(1, 0)$.
È surgettiva: per ogni $x \in \mathbb{N}$ si ha p.es. $x = \varphi(x, 0)$.
c. È iniettiva:
- Se m, n pari e $\varphi(n) = \varphi(m)$, allora $n + 1 = m + 1$ da cui $n = m$
- Se m, n dispari e $\varphi(n) = \varphi(m)$, allora $n - 1 = m - 1$ da cui $n = m$
- Se fosse m pari, n dispari e $\varphi(m) = \varphi(n)$, si avrebbe $m + 1 = n - 1$ da cui $m + 2 = n$, impossibile, quindi non c'è niente da verificare.

È surgettiva: Se x è pari, $x = \varphi(x + 1)$, se x è dispari, $x = \varphi(x - 1)$.
d. È iniettiva: ragionamento analogo a quello fatto in c.
È surgettiva: se $x \in \mathbb{Z}$ e $x \geq 0$, allora $x = \varphi(2x)$, se $x < 0$, $x = \varphi(-2x - 1)$
e. Non è iniettiva: per esempio $\varphi(1) = \varphi(-1)$.
È surgettiva: per ogni $x \in \mathbb{N}$ si ha per esempio $x = \varphi(x)$.

f. È iniettiva: se $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$, si ha subito: $n_1 = n_2$.
Non è surgettiva: per esempio non esiste n tale che $\varphi(n) = 1/2$.

24. • $\varphi(2\mathbb{N}) = \mathbb{N}$
• $\varphi(2\mathbb{N} + 1) = \mathbb{N} + 1/2 = \{1/2, 3/2, 5/2, \ldots\}$
• $\varphi^{-1}(1/2)$ è l'insieme degli $n \in \mathbb{N}$ tali che $\varphi(n) = 1/2$, cioè $n/2 = 1/2$, quindi $n = 1$, pertanto $\varphi^{-1}(1/2) = \{1\}$.
• $\varphi^{-1}(2) = \{4\}$. È analogo al precedente.
• $\varphi^{-1}(-1) = \emptyset$, dato che non esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi(n) = n/2 = -1$.
• $\varphi^{-1}(\mathbb{Z})$ è l'insieme degli $n \in \mathbb{N}$ tali che $\varphi(n) = n/2 \in \mathbb{Z}$, cioè tali che $n \in 2\mathbb{Z}$, quindi $\varphi^{-1}(\mathbb{Z}) = 2\mathbb{N}$.

25. • Dato che l'unico numero primo pari è 2, l'immagine di un numero pari n maggiore di 2 è n, e $\varphi(2) = 3$, quindi: $\varphi(2\mathbb{N}) = (2\mathbb{N} - \{2\}) \cup \{3\}$.
• Dato che 0 e 1 non vengono considerati numeri primi, allora $\varphi^{-1}(1) = \emptyset$.
• È evidente che $\varphi(5) = 6$, che $\varphi(6) = 6$ e che non è possibile ottenere 6 in altro modo, quindi: $\varphi^{-1}(6) = \{5, 6\}$.
• Dato che 6 non è primo e 7 non è pari, allora non è possibile ottenere 7 come immagine, quindi $\varphi^{-1}(7) = \emptyset$.
• Si ottiene un numero pari o come immagine di un pari diverso da 2, o come immagine di qualsiasi primo, quindi $\varphi^{-1}(2\mathbb{Z}) = \{\text{numeri primi}\} \cup (2\mathbb{N} - \{2\})$.

26. • $\varphi^{-1}(0)$ è l'insieme dei numeri naturali che divisi per 3 danno resto 0, pertanto $\varphi^{-1}(0) = 3\mathbb{N}$.
• Analogamente $\varphi^{-1}(1) = 3\mathbb{N} + 1 = \{1, 4, 7, \ldots\}$.
• Il resto di una divisione per 3 non può essere 4, quindi $\varphi^{-1}(4) = \emptyset$.
• Il resto di una divisione per 3 può essere 0,1 oppure 2, quindi $\varphi^{-1}(\{0, 1, 2\}) = \mathbb{N}$.
• Il resto non può essere mai 5, ma può essere 0, quindi $\varphi^{-1}(\{0, 5\}) = 3\mathbb{N}$.
• È evidente che $\varphi(\mathbb{N}) = \{0, 1, 2\}$.
• Ci sono numeri pari che danno i tre resti possibili (per esempio $6, 4, 2$), quindi $\varphi(2\mathbb{N}) = \{0, 1, 2\}$.

27. a. $\varphi((0, 0, 0))$ non esiste, $\varphi((0, 0, 1))$ neanche, quindi non è applicazione.
b. Se $a \neq 0$, l'equazione è di secondo grado, quindi, se $b^2 \geq 4ac$, ha almeno una soluzione. Possiamo per esempio scegliere $X = \{(a, b, c) \in X : a \neq 0\}$
c. $\varphi^{-1}(0)$ è costituita dall'insieme delle terne (a, b, c) con $b^2 < 4ac$ e dalle terne con $b^2 \geq 4ac$ in cui una soluzione è 0 (e quindi $c = 0$) e l'altra soluzione (che è $-b/a$) è non negativa. Quindi:
$\varphi^{-1}(0) = \{(a, b, c) \in X : b^2 < 4ac\} \cup \{(a, b, c) \in X : c = 0 \text{ e } b \cdot a \leq 0\}$
d. $\varphi^{-1}(1)$ è costituita dalle terne (a, b, c) in cui 1 è soluzione (e quindi $a + b + c = 0$) ed è la minore, cioè l'altra è ≥ 1 (è chiaro che se 1 è soluzione, allora $b^2 \geq 4ac$ quindi questo fatto non va esplicitamente imposto). Dato che il prodotto delle soluzioni è notoriamente c/a, l'altra soluzione è c/a. bisogna che $c/a \geq 1$, cioè $\{c \geq a \text{ e } a > 0\}$ oppure $\{c \leq a \text{ e } a < 0\}$. Quindi:
$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(1) = &\{(a, b, c) \in X : a + b + c = 0 \,;\, c \geq a \,;\, a > 0\} \cup \\ &\cup \{(a, b, c) \in X : a + b + c = 0 \,;\, c \leq a \,;\, a < 0\}\end{aligned}$$

28. $n \in \varphi^{-1}(\Delta)$ se e solo se $\varphi(n) \in \Delta$ se e solo se $(n^2, 3n - 2) \in \Delta$ se e solo se $n^2 = 3n - 2$ se e solo se $n = 1$ oppure $n = 2$. Quindi: $\varphi^{-1}(\Delta) = \{1, 2\}$

29. Basta che i pari vadano in 0 e che $\varphi(3) = 1$, quindi possiamo porre p.es.
$$\begin{cases} \varphi(n) = 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ \varphi(n) = 1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

30. L'applicazione può essere definita ricorsivamente, per esempio nel seguente modo:
$$\begin{cases} \varphi(1) = 1 \\ \varphi(2) = \varphi(3) = 2 \\ \varphi(4) = \varphi(5) = \varphi(6) = 3 \text{ etc.} \end{cases}$$

31. P.es. $\begin{cases} \varphi(n) = n & \text{se } n \text{ pari} \\ \varphi(n) = \sqrt{2}n & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$

32. P.es. $\begin{cases} \varphi(n) = 200 - n & \text{se } n < 100 \\ \varphi(n) = 1/n & \text{se } n \geq 100 \end{cases}$
Evidentemente soddisfa la condizione, inoltre è iniettiva:
   - Se infatti $n \neq n_1$ e sono uno maggiore o uguale e uno minore di 100, allora evidentemente $\varphi(n) \neq \varphi(n_1)$.
   - Se invece $n \neq n_1$ sono entrambi minori di 100 allora $\varphi(n) \neq \varphi(n_1)$ perché $1/n \neq 1/n_1$ e analogamente se sono entrambi maggiori o uguali a 100.

33. P.es. $\varphi(2n+1) = n$. È evidentemente iniettiva e surgettiva.

34. a. Possiamo per esempio mandare ogni pari in un positivo (la sua metà) in modo da raggiungerli tutti (anche lo 0 viene raggiunto) e ogni dispari in un negativo (aggiungiamo 1, dimezziamo e cambiamo segno). L'applicazione è quindi:
$$\begin{cases} \varphi(n) = n/2 & \text{se } n \text{ pari} \\ \varphi(n) = -(n+1)/2 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$
Per costruzione è iniettiva e surgettiva.
    b. Possiamo modificare un po' quella di prima, facendo in modo che 0 sia raggiunto due volte e quindi mandiamo un dispari in un negativo *sottraendo* 1 anziché aggiungendolo. L'applicazione è:
$$\begin{cases} \varphi(n) = n/2 & \text{se } n \text{ pari} \\ \varphi(n) = -(n-1)/2 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$
Non è iniettiva perché $\varphi(1) = \varphi(0)$.
    c. La più semplice è l'immersione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$: $\varphi(n) = n$.

35. a. $\psi \circ \varphi(n) = \dfrac{2 - (n+2)(n+1)}{2}$
    b. $\psi \circ \varphi(x) = |[x] - 2|$
    c. $\psi \circ \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$
    d. $\varphi \circ \psi(x) = \begin{cases} \mid x \mid /(\mid x \mid +1) & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ 1/2 & \text{se } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
    e. $\varphi \circ \varphi(n) = \begin{cases} 2(n+1) & \text{se } n \text{ pari} \\ 2n+1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$ $\qquad \varphi \circ \varphi \circ \varphi(n) = \begin{cases} 2(n+1)+1 & \text{se } n \text{ pari} \\ 2(2n+1) & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$

36. a. L'inversa è φ stessa come si verifica subito, visto che scambia ogni numero pari col dispari successivo.
    b. Che sia iniettiva lo si verifica esaminando i tre casi (x, x_1 entrambi pari, entrambi dispari, uno pari e uno dispari). È surgettiva, perché ogni numero pari x è raggiunto da $x+1$ (che è dispari) e ogni dispari x da $x-3$ (che è pari). Da questa considerazione si ricava anche l'inversa φ^{-1} che è:
$$\varphi^{-1}(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \text{ dispari} \\ x + 1 & \text{se } x \text{ pari} \end{cases}$$