

COGNOME _____ NOME _____ CORSO _____
 Bio. o Tlc.

Matematica I
17 dicembre 2008

Parte di Geometria: un foglio (due facciate). Rispondere alle domande su questi fogli usando gli appositi spazi e **giustificando** brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

5 A

Dire per quali k sono sottospazi i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ dipendenti da $k \in \mathbb{R}$:

$$W_1 = L\{(1, 0, 1, 0), (0, 2, 2, k), (1, -1, 0, 1)\} \quad W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid kx^2 + 2y - t = 0\}$$

$$W_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y + z = k \quad ; \quad kx + y - z = 0 \quad ; \quad kx + z = 0\}$$

In caso positivo scriverne una base.

W_1 è sempre sottospazio perché è lo spazio generato da tre vettori di $\mathbb{R}^4$.

Vediamo se i tre generatori dati sono linearmente indipendenti calcolando, mediante riduzione, la caratteristica della matrice delle loro coordinate:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + k/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & (2+k)/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi, se $k \neq -2$, la caratteristica è 3, altrimenti è 2. Pertanto:

Se $k \neq -2$, $\dim(W_1) = 3$. I tre vettori sono generatori e linearmente indipendenti e formano una base per W_1 .

Se $k = -2$, $\dim(W_1) = 2$. I tre vettori sono generatori e per avere una base occorre scartarne uno, per esempio il terzo, che corrispondendo a una colonna non pivotale della matrice è combinazione lineare dei primi due. I due vettori $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 2, 2, -2)$ sono generatori di W_1 per il teorema degli scarti ed essendo due e non proporzionali, quindi linearmente indipendenti, formano una base per W_1 .

W_2 è sottospazio se è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. Questo succede solo se $k = 0$ (altrimenti non è lineare).

Il sistema in questo caso è ridotto e ha ∞^3 soluzioni, quindi $\dim(W_3) = 3$.

Le soluzioni dipendono da x, z, t e sono $(x, t/2, z, t) = x(1, 0, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(0, 1/2, 0, 1)$. I tre vettori $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 1/2, 0, 1)$ formano base per W_2 .

W_3 è sottospazio se è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. Occorre quindi che si abbia $k = 0$. Per conoscerne la dimensione, studiamo il sistema attraverso la riduzione della matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni: $(0, 0, 0, t)$. Pertanto: $\dim(W_3) = 1$ e una base è quindi per esempio costituita dal vettore $(0, 0, 0, 1)$.

3 B

Verificare che la matrice A è diagonalizzabile e diagonalizzarla cioè determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $P^{-1}AP = D$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calcoliamo gli autovalori di } A: \det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix} = x^2 - 3x.$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 3$ entrambi con molteplicità 1.

Determiniamo l'autospazio per $\lambda_1 = 0$ risolvendo il sistema omogeneo associato ad A che ha evidentemente le soluzioni $(-2y, y)$. Un autovettore è per esempio $(-2, 1)$.

Determiniamo l'autospazio per $\lambda_2 = 3$ risolvendo il sistema omogeneo associato ad $A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ che ha evidentemente le soluzioni (y, y) . Un autovettore è per esempio $(1, 1)$.

$$\text{In conclusione:} \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

8 C

1. Dire per quale k il vettore $(1, 1, 0, 2)$ è autovettore per A e scrivere l'autovalore relativo. Sia λ_1 questo autovalore.
2. Dire quale tra i vettori $(2, -1, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$ è autovettore per ogni k e scrivere l'autovalore relativo. Sia λ_2 questo autovalore.
3. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ calcolare $\dim(V_{\lambda_2})$ e scriverne una base.
4. Dire quali informazioni sulla molteplicità di λ_2 si possono dedurre dai conti precedenti.
5. Sapendo che per ogni $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A sono solo λ_1 e λ_2 , determinare un k per il quale la matrice è diagonalizzabile e dire perché.
6. Per questo k scrivere una base di $\mathbb{R}^4$ tutta fatta di autovettori per A .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & k \\ 2 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Si ha $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3+2k \\ 0 \end{pmatrix}$ Quindi il vettore $(1, 1, 0, 2)$ è autovettore solo se $k = -3/2$ e l'autovalore è $\lambda_1 = 0$.

2. Si ha $A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Quindi il vettore $(2, -1, 0, 0)$ è autovettore per ogni k e l'autovalore è $\lambda_2 = -1$.
 $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1+k \\ -1 \end{pmatrix}$ Quindi il vettore $(1, 0, 0, 1)$ è autovettore solo se $k = -1$ e l'autovalore è $\lambda_2 = -1$.

3. Dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato ad $A + I$ che riduciamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & k \\ 2 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

È chiaro che, se $k = -1$ l'autospazio ha dimensione 3 e che se $k \neq -1$ l'autospazio ha dimensione 2. Se $k = -1$ le soluzioni del sistema sono $(-2y + t, y, z, t) = y(-2, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(1, 0, 0, 1)$. I tre vettori $(-2, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$ formano una base per V_{-1} .

Se $k \neq -1$ le soluzioni del sistema sono $(-2y, y, z, 0) = y(-2, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0)$. I due vettori $(-2, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ formano una base per V_{-1} .

4. Si ha $1 \leq \dim(V_{-1}) \leq m$, quindi $m \geq 3$.
5. L'autospazio relativo a $\lambda_1 = 0$ può avere dimensione 1 o superiore. L'autospazio relativo a $\lambda_1 = 0$ può avere dimensione 2 o 3 come visto sopra. Se $k = -1$ è evidente che ci sono un autospazio di dimensione 1 e uno di dimensione 3, quindi è diagonalizzabile.
6. Abbiamo già una base per V_{-1} , ne occorre una per V_0 nel caso $k = -1$. Dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato ad A che riduciamo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono $\left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, \frac{t}{2}, t\right)$.

Quindi una base di autovettori è per esempio $(-2, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 2)$