

4.1 Interpolazione

Il problema generale è quello di determinare un'espressione analitica o grafica per una funzione $f(x)$ di cui si conoscono un numero finito di punti del grafico (x_i, y_i) .

Quindi si cerca una funzione $f(x)$ tale che

$$f(x_0) = y_0 \quad ; \quad f(x_1) = y_1 \quad ; \quad \dots \quad ; \quad f(x_n) = y_n$$

x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
\dots	\dots
x_n	y_n

Si vuole che la $f(x)$ sia *facilmente calcolabile* e che soddisfi le $n + 1$ eguaglianze o *precisamente* o *approssimativamente* o *modellandosi* su di esse secondo un concetto che vedremo più avanti. Il problema si pone di solito in uno di questi due casi

- I dati sono ottenuti sperimentalmente, per cui $f(x)$ è da costruire.
- La $f(x)$ è nota ed è possibile calcolarla anche in altri punti, ma non è facilmente calcolabile (per esempio è la soluzione di un'equazione differenziale) o la sua espressione è comunque assai complessa.

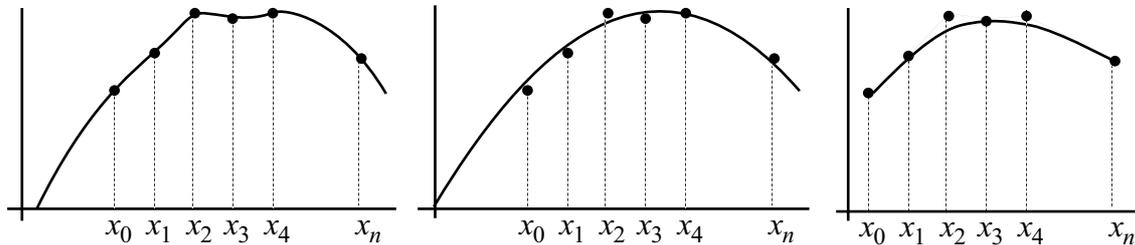
Come detto, le tecniche sono sostanzialmente tre: l'interpolazione, l'approssimazione e la modellazione. Ognuna di esse ha parecchie varianti che possono condurre a risultati diversi. Cerchiamo di dare per ora una definizione intuitiva, che poi approfondiremo, delle tre tecniche.

Interpolare significa determinare una funzione che soddisfi precisamente i dati.

Approssimare significa determinare una funzione che non soddisfi precisamente i dati, ma se ne discosti il meno possibile.

Modellare significa grosso modo determinare una funzione che nel modo più dolce "si inserisca nella poligonale dei dati".

Nel disegno sotto gli stessi dati interpolati, approssimati e "modellati" con qualche tecnica.



4.1.1 Interpolazione polinomiale, la matrice di Vandermonde

La prima idea è quella di determinare un polinomio

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

di grado minore o uguale a n . Il polinomio si dirà *polinomio interpolatore dei dati*.

Introducendo i dati si ottiene:

$$\left. \begin{aligned} P(x_0) = y_0 &\Rightarrow a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ \dots &\dots \\ P(x_n) = y_n &\Rightarrow a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{aligned} \right\}$$

Questo è un sistema lineare $(n + 1) \times (n + 1)$ nelle incognite a_0, \dots, a_n la cui matrice dei coefficienti è detta *matrice di Vandermonde* della successione x_0, \dots, x_n . Questa matrice ha determinante diverso da zero se gli x_i sono distinti; pertanto in tal caso esiste un'unico polinomio di grado minore o uguale a n che soddisfa i dati (non è detto che abbia grado esattamente n perché non è detto che si abbia $a_n \neq 0$).

Risolvere il sistema lineare non è però conveniente dal punto di vista calcolativo, sia per la mole dei conti, sia perché la matrice di Vandermonde è particolarmente sensibile agli errori da arrotondamento avendo un numero di condizionamento elevato.

Esempio 4.1: Determinare la parabola $y = a+bx+cx^2$ passante per tre punti $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ (x_i distinti). Si ha il sistema lineare in a, b, c :

$$\begin{cases} y_0 = a + bx_0 + cx_0^2 \\ y_1 = a + bx_1 + cx_1^2 \\ y_2 = a + bx_2 + cx_2^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{la cui matrice dei coeffi-} \\ \text{cienti è la matrice di Van-} \\ \text{dermonde} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema si può trovare il polinomio. Questo è il metodo più elementare, ma non certamente il migliore.

Osserviamo che per $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ la matrice di Vandermonde ha già numero di condizionamento circa 70.92.

4.1.2 Interpolazione polinomiale, il polinomio di Lagrange

Esiste una semplicissima formula dovuta a Lagrange per determinare il polinomio in questione:

$$P(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} + \cdots + y_n \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

È evidente che il polinomio ha grado non superiore a n ed è pure evidente il fatto che esso soddisfa i dati.

La formula di Lagrange, benché elegante ed elementare, non è in generale di uso pratico. Il polinomio non è infatti scritto in una forma che si presti a una semplice algoritmizzazione tipo schema di Ruffini-Hörner per calcolare il polinomio in un punto diverso dagli x_i .

4.1.3 Interpolazione polinomiale, il polinomio di Newton

Esiste un'altra formula, dovuta a Newton, per determinare il polinomio in modo algoritmico ed è la seguente:

$$P(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + b_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

Prima di spiegare come si calcolano i coefficienti b_i , osserviamo che, dopo averli determinati, è facile calcolare $P(x)$ in qualunque punto *senza sviluppare la formula*, in modo simile allo schema di Ruffini-Hörner:

$$P(x) = b_0 + (x-x_0)\left(b_1 + b_2(x-x_1) + \cdots + b_n(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\right)$$

$$P(x) = b_0 + (x-x_0)\left(b_1 + (x-x_1)\left(b_2 + \cdots + b_n(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})\right)\right) \text{ etc.}$$

Per quanto riguarda i coefficienti b_i , un conto non difficile, ma laborioso, mostra che essi si possono determinare ricorsivamente nel modo seguente:

$$\begin{aligned} b_0 &= f(x_0) && \stackrel{\text{def}}{=} f[x_0] \\ b_1 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} && \stackrel{\text{def}}{=} f[x_1, x_0] \\ b_2 &= \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} && \stackrel{\text{def}}{=} f[x_2, x_1, x_0] \\ &\dots && \\ b_n &= \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, \dots, x_0]}{x_n - x_0} && \stackrel{\text{def}}{=} f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0] \end{aligned}$$

I b_i si calcolano quindi in modo algoritmico mediante un procedimento detto *calcolo alle differenze finite*. Ci limitiamo al caso in cui gli x_i formino una progressione aritmetica di ragione costante d cioè:

$$x_0 \quad x_1 = x_0 + d \quad x_2 = x_1 + d \quad \cdots \quad x_n = x_{n-1} + d$$

In questo caso si possono calcolare i b_i usando lo schema

$$\begin{array}{l}
 y_0 = y_0^{(0)} \\
 y_1 \\
 y_2 \\
 \dots \\
 y_{n-1} \\
 y_n
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 y_1 - y_0 = y_0^{(1)} \\
 y_2 - y_1 = y_1^{(1)} \\
 y_3 - y_2 = y_2^{(1)} \\
 \dots \\
 y_n - y_{n-1} = y_{n-1}^{(1)}
 \end{array} \right|
 \left| \begin{array}{l}
 y_1^{(1)} - y_0^{(1)} = y_0^{(2)} \\
 y_2^{(1)} - y_1^{(1)} = y_1^{(2)} \\
 \dots
 \end{array} \right|
 \left| \begin{array}{l}
 \dots \\
 \dots \\
 y_1^{(n-1)} - y_0^{(n-1)} = y_0^{(n)} \\
 \dots
 \end{array} \right|$$

e, come si verifica subito, si ha:

$$b_0 = y_0^{(0)} ; b_1 = \frac{y_0^{(1)}}{1! d^1} ; b_2 = \frac{y_0^{(2)}}{2! d^2} ; \dots ; b_n = \frac{y_0^{(n)}}{n! d^n}$$

Esempio 4.2: Determiniamo il polinomio $P(x)$ di grado minore o uguale a 3 tale che:

$$P(1) = 1 \quad P(1.5) = 3 \quad P(2) = 4 \quad P(2.5) = -1$$

In questo caso $d = 0.5$. Lo schema delle differenze finite unitarie è:

$$\begin{array}{l}
 1 \\
 3 \\
 4 \\
 -1
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 3 - 1 = 2 \\
 4 - 3 = 1 \\
 -1 - 4 = -5
 \end{array} \right|
 \left| \begin{array}{l}
 1 - 2 = -1 \\
 -5 - 1 = -6
 \end{array} \right|
 \left| -6 + 1 = -5 \right.$$

Si ha pertanto

$$b_0 = 1 ; b_1 = \frac{2}{1!(0.5)} = 4 ; b_2 = \frac{-1}{2!(0.5)^2} = -2 ; b_3 = \frac{-5}{3!(0.5)^3} = -20/3$$

Il polinomio è quindi:

$$P(x) = 1 + 4(x - 1) - 2(x - 1)(x - 1.5) - \frac{20}{3}(x - 1)(x - 1.5)(x - 2)$$

Se la successione non è a passo costante, lo schema delle differenze finite subisce una semplice modifica che non riportiamo in questa sede.

4.1.4 Il resto nell'interpolazione di Newton

È evidente l'analogia tra la formula di interpolazione di Newton e la nota formula di Taylor. In effetti, come il polinomio di Taylor approssima una funzione con un polinomio avente stesso valore e stesse derivate in un punto x_0 , il polinomio di Newton approssima una funzione con un polinomio che assume nei punti x_i gli stessi valori della funzione.

In analogia alla formula del resto di Lagrange per il polinomio di Taylor, si ha:

Proposizione 1 Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$, ivi dotata di derivate continue fino all'ordine $n + 1$.

Se $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ è una suddivisione dell'intervallo e $P(x)$ è il polinomio di Newton che interpola $f(x)$ nei punti x_i (nel senso che $P(x_i) = f(x_i)$ per ogni i), allora, per ogni $x \in [a, b]$ esiste un punto ξ nell'intervallo $[a, b]$ tale che:

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} (x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

4.1.5 Interpolazione “spline”

L'interpolazione polinomiale può non essere conveniente per vari motivi. Il primo è che per una lunga serie di dati il polinomio risulta di grado troppo alto, il secondo è che l'interpolazione non sempre è soddisfacente.

Un modo spesso più efficiente e perciò maggiormente diffuso per interpolare una serie di dati consiste nell'usare una funzione definita a pezzi i cui pezzi siano polinomi di grado basso. Questa interpolazione si dice “spline” (dal nome inglese delle bacchette di legno flessibile usate per l'interpolazione meccanica di una serie di dati).

Si abbia la solita serie di dati da interpolare:

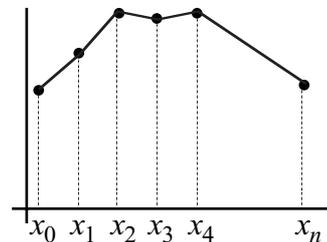
$$f(x_0) = y_0, \dots, f(x_n) = y_n \quad \text{con} \quad x_0 < \dots < x_n$$

Descriveremo tre tipi di interpolazione spline.

Interpolazione spline lineare

La più semplice interpolazione spline è quella mediante funzioni lineari. Si può scrivere per ogni i ($1 \leq i \leq n$) l'equazione della retta passante per i due punti (x_{i-1}, y_{i-1}) (x_i, y_i) .

La funzione così definita a pezzi sugli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ è evidentemente continua in $[x_0, x_n]$ e soddisfa le condizioni date.



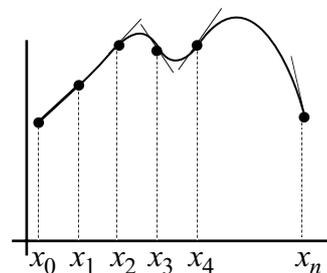
Interpolazione spline quadratica

Scriviamo per ogni i ($1 \leq i \leq n$) le parabole e cioè le funzioni del tipo $y = a_i + b_i x + c_i x^2$ passanti per i due punti (x_{i-1}, y_{i-1}) (x_i, y_i) . Ne esistono ∞^1 per ogni i , quindi n dei $3n$ coefficienti sono arbitrari. Si può approfittare di questo fatto per imporre che le derivate prime delle parabole coincidano nei punti x_1, \dots, x_{n-1} e quindi la funzione sia dotata di derivata prima.

Queste sono $n - 1$ condizioni su n parametri. Resta pertanto una scelta arbitraria ed è uso imporre che la parabola dell'intervallo $[x_0, x_1]$ degeneri in una retta.

Si ha pertanto una funzione definita a pezzi sugli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ che è evidentemente continua e derivabile in $[x_0, x_n]$ e soddisfa i dati.

La spline quadratica non è molto usata perché spesso fornisce un risultato “saltellante” e quindi poco soddisfacente.



Interpolazione spline cubica

La più usata delle interpolazioni spline è quella con funzioni polinomiali di grado tre in quanto consente un calcolo semplice e una approssimazione più che soddisfacente. Inoltre si riesce a fare in modo che la funzione sia di classe C^2 .

Si scrivono per ogni i ($1 \leq i \leq n$) le parabole cubiche e cioè le funzioni del tipo $y = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$ passanti per i due punti (x_{i-1}, y_{i-1}) (x_i, y_i) . Ne esistono ∞^2 per ogni i ($i = 1, \dots, n$), quindi $2n$ dei $4n$ coefficienti sono arbitrari.

Imponendo che sia le derivate prime che quelle seconde coincidano nei punti x_1, \dots, x_{n-1} si hanno altre $2n - 2$ condizioni lineari; rimangono ancora due scelte arbitrarie ed è uso imporre che la prima e l'ultima parabola cubica abbiano un flesso rispettivamente in x_0 e in x_n (spline naturale). A volte si danno due condizioni sulle derivate prime in x_0 e in x_n (spline vincolata).

Si ha pertanto una funzione definita a pezzi sugli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ che è evidentemente continua e derivabile due volte in $[x_0, x_n]$ e soddisfa i dati.

Esiste un procedimento per calcolare in maniera relativamente veloce la spline cubica cui acceniamo brevemente.

L'idea base è quella di fare in modo che le incognite siano solo le derivate seconde delle parabole cubiche nei punti x_1, \dots, x_{n-1} . Poniamo per semplicità di notazione:

$$q_1 = f''(x_1), \dots, q_{n-1} = f''(x_{n-1})$$

Scriviamo la *derivata seconda* della parabola cubica $f_i(x)$ che congiunge il punto (x_{i-1}, y_{i-1}) col punto (x_i, y_i) . È una funzione lineare che possiamo scrivere così (usando la formula di Lagrange) in modo da evidenziare i valori che la derivata seconda stessa assume nei punti x_i :

$$f_i''(x) = q_{i-1} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + q_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Integriamo due volte rispetto a x e scriviamo opportunamente le due costanti di integrazione h_i e k_i ottenendo così le $f_i(x)$:

$$f_i(x) = \frac{q_{i-1}(x - x_i)^3}{6(x_{i-1} - x_i)} + \frac{q_i(x - x_{i-1})^3}{6(x_i - x_{i-1})} + h_i(x_i - x) + k_i(x - x_{i-1})$$

Le due costanti così scritte h_i e k_i si determinano imponendo che $f_i(x_i) = y_i$ e che $f_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$. Svolti i conti si ottiene:

$$h_i = \frac{y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{q_{i-1}(x_i - x_{i-1})}{6} \quad k_i = \frac{y_i}{x_i - x_{i-1}} - \frac{q_i(x_i - x_{i-1})}{6}$$

Rimangono da determinare tutti i q_i . Imponendo che le derivate prime coincidano in tutti i punti x_i ($i \neq 0, n$) si ottiene:

$$(x_i - x_{i-1})q_{i-1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1})q_i + (x_{i+1} - x_i)q_{i+1} = 6 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{y_{i-1} - y_i}{x_i - x_{i-1}} \right)$$

Queste sono $n - 1$ relazioni lineari tra i q_i . Dato che $q_0 = q_n = 0$, le incognite sono $n - 1$ e la matrice delle $n - 1$ relazioni lineari è tridiagonale, per cui la risoluzione del sistema è particolarmente agevole. Inoltre la forma delle singole $f_i(x)$ è particolarmente adatta al calcolo con uno schema tipo Ruffini-Hörner.

Nel caso particolarmente frequente in cui gli x_i siano in progressione aritmetica di ragione d , il sistema nelle incognite q_1, \dots, q_{n-1} è associato alla matrice tridiagonale simmetrica

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccc} 4d & d & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 6(y_0 - 2y_1 + y_2)/d & \\ d & 4d & d & 0 & \cdots & 0 & 0 & 6(y_1 - 2y_2 + y_3)/d & \\ 0 & d & 4d & d & \cdots & 0 & 0 & 6(y_2 - 2y_3 + y_4)/d & \\ \cdots & & & & & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & d & 4d & 6(y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n)/d & \end{array} \right)$$

Il sistema è diagonalmente dominante per cui per la sua soluzione può essere usato per esempio il metodo di Gauss-Seidel.

La spline cubica è in un certo senso la miglior funzione di classe C^2 che interpoli i dati. Più precisamente:

Proposizione 2 Sia $f(x)$ funzione regolare nell'intervallo $[a, b]$ con $a = x_0$, $b = x_n$, tale che $f(x_i) = y_i$ allora la quantità

$$\int_a^b (g''(x))^2 dx$$

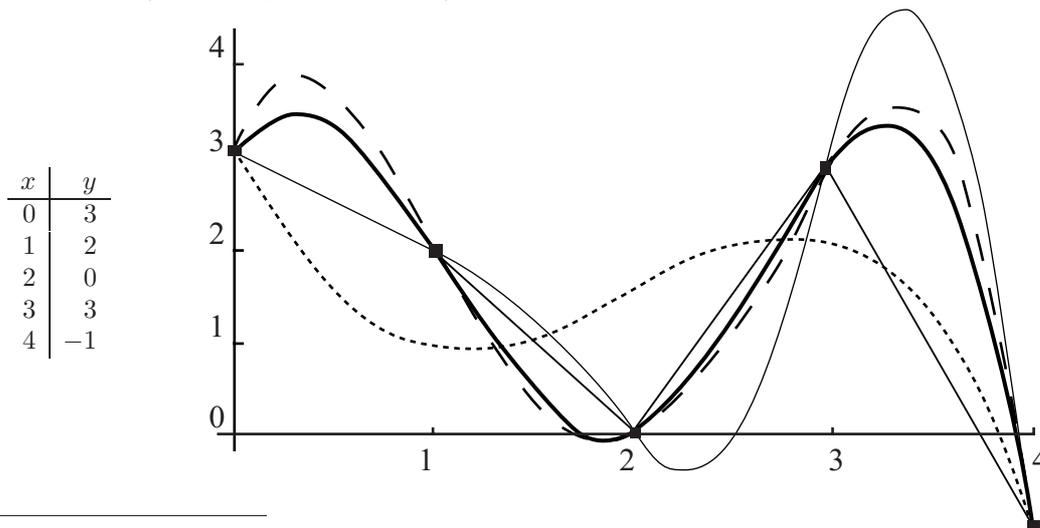
è minima qualora $g(x)$ sia la spline cubica naturale.

Esempio 4.3: Un esempio di costruzione di interpolazioni polinomiali con splines o altro comporterebbe solo una serie di lunghi calcoli e non sarebbe di aiuto alla comprensione dei metodi esposti. Ci accontentiamo perciò di fornire un grafico elaborato al calcolatore che illustra varie

interpolazioni polinomiali della serie di dati sotto.

Nel grafico sono disegnati con vari tipo di tratto:

- Lo spline lineare che interpola i dati.
- Lo spline quadratico che interpola i dati (il primo tratto coincide con quello lineare)
- Lo spline cubico che interpola i dati.
- - - Il polinomio di Newton (quindi di grado 4) che interpola i dati.
- - - - Il polinomio di grado 3 che *approssima* i dati *ai minimi quadrati* (vedi paragrafo successivo).



4.1.6 Approssimazione ai minimi quadrati

Invece di trovare un polinomio *di grado* n che interpoli $n + 1$ dati, se ne può trovare uno *di grado inferiore* che non passi esattamente per i punti dati, ma se ne discosti per poco “nel senso dei minimi quadrati”.

Più precisamente non si pretende che il polinomio $P(x)$ di grado $d \leq n$ soddisfi precisamente le eguaglianze $P(x_0) = y_0$; $P(x_1) = y_1$; \dots ; $P(x_n) = y_n$, ma ci si accontenta che la quantità

$$\left(P(x_0) - y_0\right)^2 + \left(P(x_1) - y_1\right)^2 + \dots + \left(P(x_n) - y_n\right)^2$$

sia la minima possibile.

Si dimostra che esiste unico un polinomio di grado $d < n$ con questa proprietà ed è detto polinomio che approssima i dati *ai minimi quadrati*.

Questo modo di approssimare i dati è usato soprattutto quando i dati sono frutto di osservazioni sperimentali e quindi soggetti a probabile errore. Particolarmente noto è il caso in cui il polinomio ha grado 1, quindi si ha l'approssimazione lineare ai minimi quadrati.

Ci sarebbe molto da dire, ma ci accontentiamo di riportare la tecnica più semplice per trovarlo (anche se non è la più numericamente stabile). Come nel caso di Vandermonde si cerca un polinomio

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_dx^d$$

di grado minore o uguale a d . Introducendo i dati si ottiene:

$$\left. \begin{array}{l} P(x_0) = y_0 \Rightarrow a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_dx_0^d = y_0 \\ \dots \\ P(x_n) = y_n \Rightarrow a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_dx_n^d = y_n \end{array} \right\}$$

Osserviamo che questa volta la matrice dei coefficienti A , dato che $d \leq n$, è una matrice rettangolare con più righe che colonne e che quindi il sistema $Ax = b$ è un sistema con più equazioni che incognite

e quindi quasi sicuramente senza soluzioni. La *soluzione ai minimi quadrati* è però l'unica soluzione del sistema quadrato con matrice invertibile

$$A^T A x = A^T b$$

dove la matrice $A^T A$ è una matrice $d \times d$ simmetrica. Se il polinomio cercato è di grado 1, la matrice è 2×2 e in questo caso la retta è la famosa *regressione lineare* spesso usata in statistica.

4.2 Curve di Bézier e B-spline

4.2.1 Polinomi di Bézier

Se invece di interpolare o approssimare i dati, vogliamo “modellare” una curva sui dati, costruiamo una curva di Bézier.

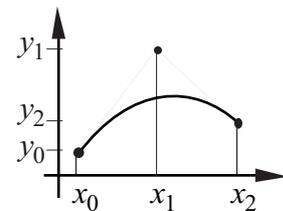
Grosso modo *modellare* significa determinare una curva “dolce” che si inserisca nella poligonale, detta *poligono di controllo* che interpola i punti dati.

Iniziamo con le *funzioni* di Bézier che “modellano” dati del tipo $f(x_0) = y_0; \dots; f(x_n) = y_n$ con x_0, x_1, x_2, \dots successione di passo costante; più avanti ci svincoleremo da queste restrizioni.

Polinomio quadratico di Bézier

Siano x_0, x_1, x_2 tre numeri *equidistanti* e y_0, y_1, y_2 tre numeri qualunque. Chiamiamo P_0 il punto (x_0, y_0) e così via. Esiste una e una sola funzione quadratica $f(x) = ax^2 + bx + c$, il cui grafico è una parabola passante per P_0 e P_2 e tangente alla retta $\overline{P_0 P_1}$ in P_0 e alla retta $\overline{P_1 P_2}$ in P_2 . In realtà sembra strano che esista una parabola che soddisfi 4 condizioni, perché i coefficienti sono solo tre, ma ciò è dovuto al fatto che x_1 è il punto medio tra x_0 e x_2 .

Se P_0, P_1, P_2 sono allineati, la parabola degenera in una retta.



Polinomio cubico di Bézier

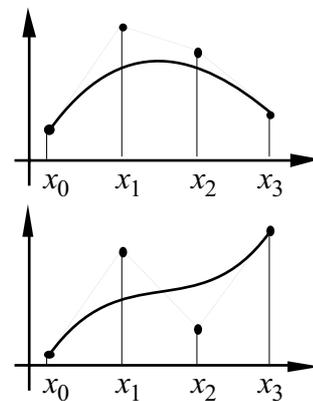
Siano x_0, x_1, x_2, x_3 quattro numeri *equidistanti* e y_0, \dots, y_3 quattro numeri.

Esiste una e una sola funzione cubica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, passante per i punti $P_0(x_0, y_0), \dots, P_3(x_3, y_3)$ e tangente alla retta $\overline{P_0 P_1}$ in P_0 e alla retta $\overline{P_2 P_3}$ in P_3 .

La cubica è unica perché i coefficienti sono quattro di fronte a quattro condizioni indipendenti e potrebbe anche avere un flesso o degenerare in una parabola quadratica o in una retta.

È possibile costruire allo stesso modo i polinomi di Bézier di grado n che passano per $n+1$ punti *equidistanti* anche se non è facile dare un'interpretazione geometrica delle proprietà di queste curve.

La costruzione dei polinomi di Bézier viene di solito effettuata mediante una delle due tecniche seguenti: quella analitica (i polinomi di Bernstein) o quella grafica (l'algoritmo di de Casteljau).



4.2.2 Polinomi di Bézier costruiti mediante polinomi di Bernstein

Sia $[a, b]$ un intervallo della retta reale e sia $n \geq 2$. Definiamo i polinomi di Bernstein di grado n nell'intervallo $[a, b]$:

Definizione: Gli $n+1$ polinomi di Bernstein di grado n nell'intervallo $[a, b]$ sono

$$B_i(x) = \binom{n}{i} \frac{(b-x)^{n-i}(x-a)^i}{(b-a)^n} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

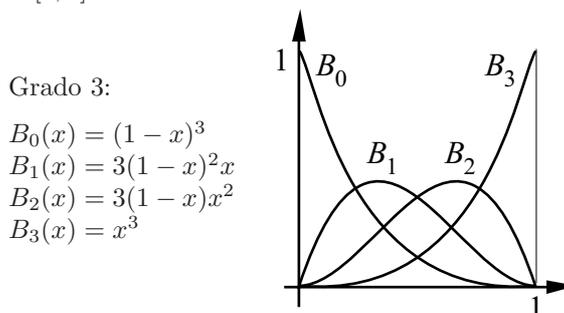
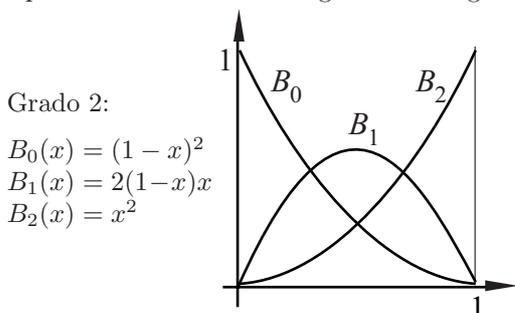
I polinomi di Bernstein di grado n dipendono dall'intervallo $[a, b]$ dato che:

$$B_1(a) = 1 \quad \text{e} \quad B_i(a) = 0 \quad \text{per} \quad i > 0 \quad \quad B_i(b) = 0 \quad \text{per} \quad i < n \quad \text{e} \quad B_n(b) = 1$$

Essi costituiscono una base per lo spazio polinomi di grado $\leq n$, nel senso che ogni altro polinomio di grado minore o uguale a n si può scrivere in modo unico come loro combinazione lineare.

Particolarmente interessanti sono i polinomi di Bernstein dell'intervallo $[0, 1]$, anche perché gli altri si ottengono dilatando questi all'intervallo $[a, b]$.

I polinomi di Bernstein di grado 2 e di grado 3 in $[0, 1]$ sono



Osserviamo che: $B_0(x) + B_1(x) + B_2(x) \equiv 1$ (vale 1 per ogni x) nel caso quadratico.
 Analogamente: $B_0(x) + B_1(x) + B_2(x) + B_3(x) \equiv 1$ nel caso cubico.

Il polinomio di Bézier di grado n generato dai punti $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ (x_i equidistanti) è la combinazione lineare a coefficienti y_0, \dots, y_n dei polinomi di Bernstein nell'intervallo $[a, b] = [x_0, x_n]$

$$Bez(x) = y_0 B_0(x) + \dots + y_n B_n(x)$$

4.2.3 Polinomi di Bézier costruiti mediante algoritmo di de Casteljaun

L'algoritmo di de Casteljaun permette di costruire quanti punti si vuole del polinomio di Bézier con un semplice procedimento grafico che si basa semplicemente sulla parametrizzazione segmentaria della retta, ovvero quella parametrizzazione $P(t) = A + t(B - A)$ della retta r passante per due punti A e B che fornisce A per $t = 0$ e B per $t = 1$.

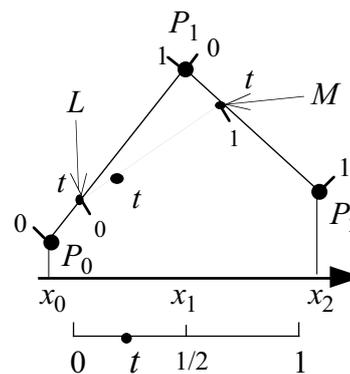
Cominciamo col caso quadratico

Si pone il segmento $\overline{P_0 P_1}$ in corrispondenza biunivoca coll'intervallo $[0, 1]$ in modo che P_0 corrisponda a 0 e P_1 a 1, ovvero con la parametrizzazione $P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0)$. Allo stesso modo anche $\overline{P_1 P_2}$ è posto in corrispondenza con $[0, 1]$.

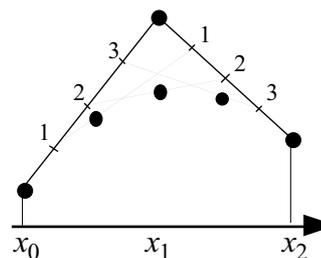
Si fissa un numero t compreso tra 0 e 1 e si considerano sui segmenti $P_0 P_1$ e $P_1 P_2$ i due punti corrispondenti a t .

Si costruisce il segmento che ha come estremi questi due punti (chiamiamolo LM) e lo si pone in corrispondenza biunivoca coll'intervallo $[0, 1]$.

Il punto del segmento LM corrispondente a t fa parte del polinomio quadratico di Bézier. Facendo variare t nell'intervallo $[0, 1]$ si ottengono tutti i punti della parabola.



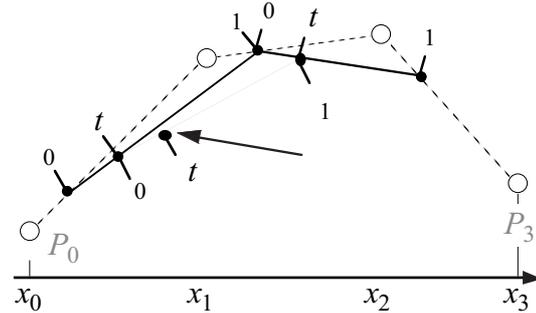
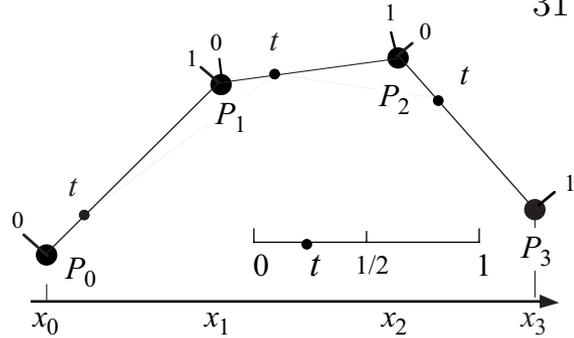
Esempio 4.4: I due segmenti sono stati divisi in 4 parti uguali, ovvero si usano tre valori $t = 1/4, 2/4, 3/4$ compresi tra 0 e 1. I punti sono stati chiamati 1, 2, 3. I segmenti $\overline{11}, \overline{22}, \overline{33}$ sono posti in corrispondenza con $[0, 1]$ e sul segmento $\overline{11}$ viene considerato il punto corrispondente a $t = 1/4$, sul segmento $\overline{22}$ il punto corrispondente a $t = 2/4$, sul segmento $\overline{33}$ il punto corrispondente a $t = 3/4$. I 5 punti così trovati (si aggiungono i due estremi) appartengono al polinomio di Bézier.



Proseguiamo col caso cubico

Come nel caso quadratico, si pongono i segmenti $P_0 P_1, P_1 P_2, P_2 P_3$ in corrispondenza biunivoca coll'intervallo $[0, 1]$ in modo che rispettivamente P_0 corrisponda a 0, P_1 a 1 etc. Si fissa un numero t compreso tra 0 e 1 e si cercano sui segmenti $P_0 P_1, P_1 P_2, P_2 P_3$ i tre punti corrispondenti a t .

Si costruiscono quindi i due segmenti che hanno come estremi questi tre punti nell'ordine. Come nella seconda figura si pongono i due segmenti in corrispondenza biunivoca coll'intervallo $[0, 1]$. A questo punto si prosegue come per l'algoritmo di de Casteljau nel caso quadratico, cercando sui due segmenti i punti corrispondenti a t e congiungendoli con un segmento che va posto in corrispondenza biunivoca con $[0, 1]$. In corrispondenza di questo t si ha il punto della cubica di Bézier.

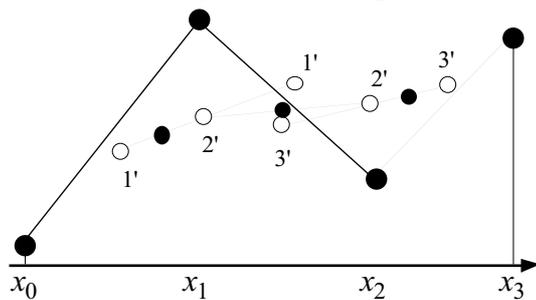
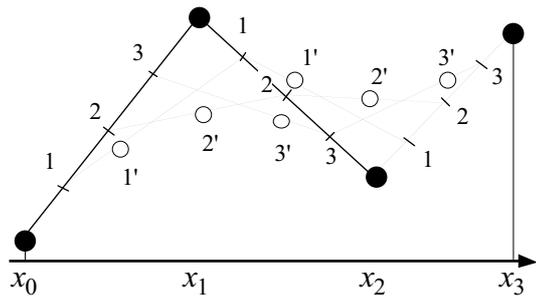


Esempio 4.5: Si dividono i lati del poligono di controllo in 4 parti uguali, ovvero si usano tre valori $t = 1/4, 2/4, 3/4$ compresi tra 0 e 1.

I punti vengono chiamati 1, 2, 3. I 6 segmenti $\overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{1'1'}, \overline{2'2'}, \overline{3'3'}$ sono stati divisi in 4 parti, ma su ciascuno dei due segmenti $\overline{11}$ è stato considerato il punto corrispondente a $t = 1/4$ e abbiamo i due punti di nome $1'$. Su ciascuno dei due segmenti $\overline{22}$ è stato considerato il punto corrispondente a $t = 2/4$ e abbiamo i due punti di nome $2'$. Su ciascuno dei due segmenti $\overline{33}$ è stato considerato il punto corrispondente a $t = 3/4$ e abbiamo i due punti di nome $3'$.

A questo punto consideriamo il secondo disegno identico al primo, ma dove, per chiarezza, sono stati eliminati i segmenti $\overline{11}$ etc.

I segmenti $\overline{1'1'}, \overline{2'2'}, \overline{3'3'}$ sono stati divisi in 4 parti, ma sul segmento $\overline{1'1'}$ è stato considerato il punto corrispondente a $t = 1/4$, sul segmento $\overline{2'2'}$ il punto per $t = 2/4$ e sul segmento $\overline{3'3'}$ quello per $t = 3/4$. I 5 punti così trovati (si aggiungono i due estremi) appartengono al polinomio di Bézier.



4.2.4 Le curve di Bézier

Svincoliamoci ora dall'ipotesi che x_0, x_1, \dots, x_n siano equidistanti. Esiste egualmente una curva di Bézier che modella i punti, ma non si può pretendere che sia una semplice funzione polinomiale $y = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$.

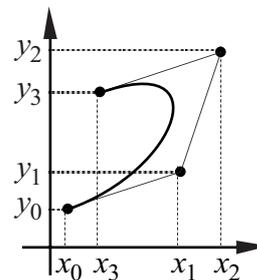
Occorre lavorare bidimensionalmente ed esprimere la curva in forma parametrica. Si può supporre che le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ siano definite nell'intervallo $[0, 1]$ e si vuole che assumano in 0 e in 1 i valori x_0, x_n e y_0, y_n rispettivamente.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

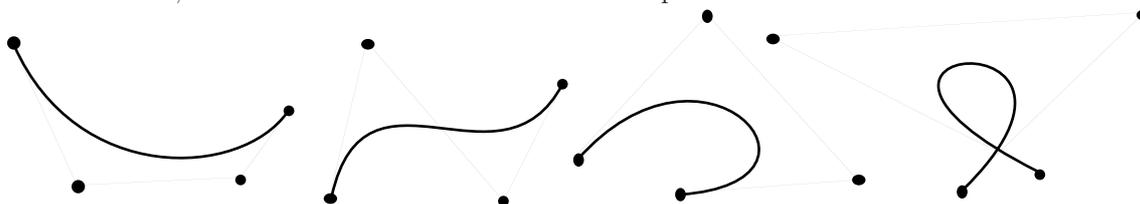
A questo punto non è più neanche necessario che gli x_i siano ordinati né distinti, basta che siano distinti i punti (x_i, y_i) . Quindi la curva di Bézier, per esempio cubica, avente come poligono di controllo (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) ha come rappresentazione parametrica esplicita

$$\begin{cases} x(t) = x_0 B_0(t) + x_1 B_1(t) + x_2 B_2(t) + x_3 B_3(t) \\ y(t) = y_0 B_0(t) + y_1 B_1(t) + y_2 B_2(t) + y_3 B_3(t) \end{cases}$$

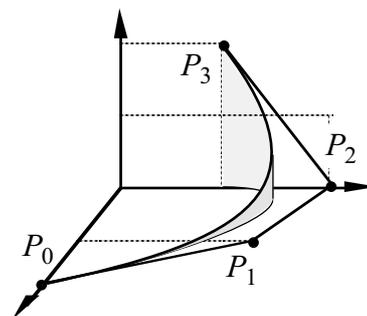
dove i $B_i(t)$ sono i polinomi di Bernstein cubici nell'intervallo $[0, 1]$. Anche l'algoritmo di de Casteljau funziona perfettamente nel caso generale senza sostanziali variazioni.



Qui di seguito alcuni esempi di curve di Bézier cubiche con il loro poligono di controllo; la quarta è addirittura nodata, cosa che può capitare se il poligono è intrecciato, del resto anche la terza è nodata, anche se il nodo cade esternamente alla porzione utile.



Questa generalizzazione permette anche di costruire curve di Bézier nello spazio. Si dovrà aggiungere una terza funzione $z(t)$, ma tutto funziona esattamente come nel caso planare. Si tenga presente che, mentre una curva di Bézier quadratica è sempre un arco di parabola e perciò una curva piana giacente nel piano dei tre punti del poligono di controllo, una curva di Bézier cubica può essere una curva sghemba e quindi dotata di vera torsione tridimensionale se i quattro punti del poligono di controllo non sono complanari.



4.2.5 Le curve B-spline

Se i punti da modellare sono tanti non conviene costruire una curva di Bézier di grado elevato, ma è meglio costruire diverse curve di Bézier di ordine basso (3 è il più usato) e raccordarle insieme nel modo migliore possibile. Queste sono le curve B-spline.

La teoria è assai vasta; ci limitiamo ai due casi più semplici, le B-spline quadratiche uniformi e non uniformi e le B-spline cubiche uniformi e non, avvertendo che anche sulle curve non uniformi si possono fare variazioni di rilievo rispetto alla semplice trattazione che segue.

4.2.6 Le B-spline quadratiche

La cosa più complicata è capire quale uso fare dei dati iniziali, perché la B-spline modella una serie di punti, senza necessariamente passare per essi, ma "raddolcendo" il loro andamento.

Nel caso più elementare sono assegnati $n + 1$ punti distinti (o meglio tali che tre consecutivi siano distinti) che costituiscono il cosiddetto poligono di de Boor

$$P_0, P_2, P_4, \dots, P_{2n}$$

I punti del poligono hanno indici pari. Definiremo ora i punti P_i con i dispari e costruiremo una B-spline in cui ogni pezzo è una curva quadratica di Bézier con poligono di controllo $P_{2i-1}, P_{2i}, P_{2i+1}$ (il centrale ha indice pari).

Per costruire i punti di indice dispari esistono vari criteri.

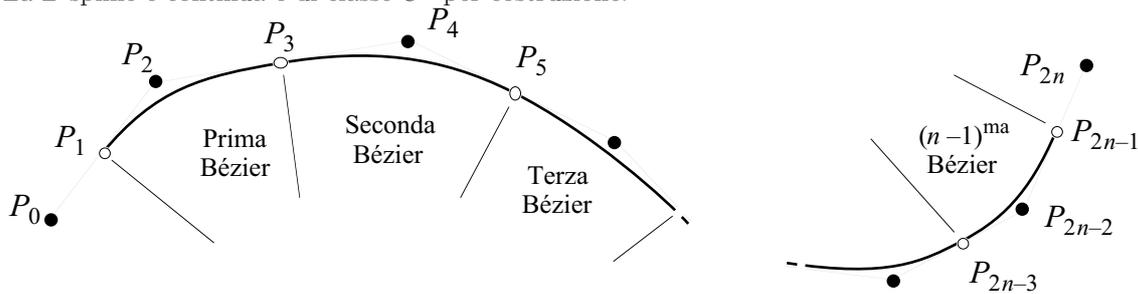
Caso uniforme

Nel caso più semplice porremo: $P_1 = \frac{P_0 + P_2}{2}$ $P_3 = \frac{P_2 + P_4}{2}$ \dots $P_{2n-1} = \frac{P_{2n-2} + P_{2n}}{2}$

e costruiremo semplicemente le curve di Bézier con poligono di controllo $P_{2i-1}, P_{2i}, P_{2i+1}$ mediante i polinomi di Bernstein o l'algoritmo di de Casteljaou. Come vedremo nel caso non uniforme, è possibile parametrizzare tutta la B-spline mediante funzioni che sono a pezzi polinomi di Bèzier.

La B-spline così costruita è detta *B-spline quadratica uniforme*. L'aggettivo uniforme si riferisce al fatto che i punti mancanti sono presi come *punti medi* dei segmenti.

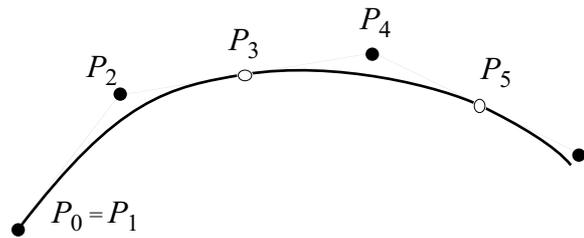
La B-spline è continua e di classe C^1 per costruzione.



Due osservazioni:

- La B-spline quadratica ha un controllo *semi-locale* dei punti diversamente dalle spline quadratiche introdotte nel paragrafo sull'interpolazione, nel senso che cambiando uno dei P_i subiscono variazioni solo due pezzi di Bézier della curva e non l'intera curva.

- La curva non passa per i punti iniziali della spezzata. Se si vuole ottenere questo, si può agire in due modi: o, come fanno alcuni, facendo semplicemente coincidere P_0 con P_1 e P_{2n-1} con P_{2n} (e definendo tutti gli altri punti come sopra) oppure mediante l'uso di opportune successioni nodali come vediamo nel seguito.



Caso non uniforme e successioni nodali

Invece di prendere i punti medi dei segmenti $\overline{P_0 P_2}$ etc., si possono prendere altri punti più o meno distanti dagli estremi ed avere una curva più o meno aderente al poligono di de Boor e quindi più adatta a certe esigenze. Si tenga presente che cambiando un punto si cambiano solo due curve di Bézier della B-spline, e si mantiene quindi un controllo *semi-locale* su tutta la curva.

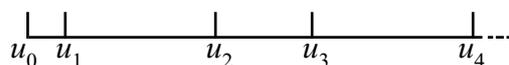
Potremmo semplicemente dire quale punto prendiamo su ogni segmento, ma conviene introdurre le *successioni nodali*, perché più utili per il seguito e indispensabili, come vedremo, nel caso delle B-spline cubiche.

Supponiamo di avere il poligono di de Boor P_0, P_2, \dots, P_{2n} costituito da $n + 1$ punti. Si chiama successione nodale una successione non decrescente di $n + 2$ numeri positivi $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{n+1}$. Per definire i punti P_1, P_3, \dots si adopera la successione nodale nel seguente modo:

$$P_1 = \frac{(u_2 - u_1)P_0 + (u_1 - u_0)P_2}{u_2 - u_0} \quad P_3 = \frac{(u_3 - u_2)P_2 + (u_2 - u_1)P_4}{u_3 - u_1} \quad \text{etc.}$$

Notiamo che, se la successione nodale è a passo costante, per esempio $0 < 1 < 2 < 3 < \dots$, si riottiengono gli stessi P_i del caso uniforme.

Per illustrare graficamente il funzionamento della successione nodale, riporteremo la successione su un righello.



I segmenti del poligono di de Boor andranno messi in corrispondenza biunivoca con i sottosegmenti del righello nel seguente modo:

Il segmento $P_0 P_2$ con la porzione $[u_0, u_2]$ del righello, il segmento $P_2 P_4$ con la porzione $[u_1, u_3]$ del righello e così via.

Analiticamente ciò equivale a parametrizzare la retta $P_0 P_2$ nel seguente modo

$$P(t) = P_0 + \frac{t - u_0}{u_2 - u_0}(P_2 - P_0)$$

Questa parametrizzazione di $P_0 P_2$ fa ottenere P_0 per $t = u_0$ e P_2 per $t = u_2$. Su $P_2 P_4$ si ottiene in modo analogo P_2 per $t = u_1$ e P_4 per $t = u_3$ e così via per gli altri segmenti $P_i P_{i+2}$.

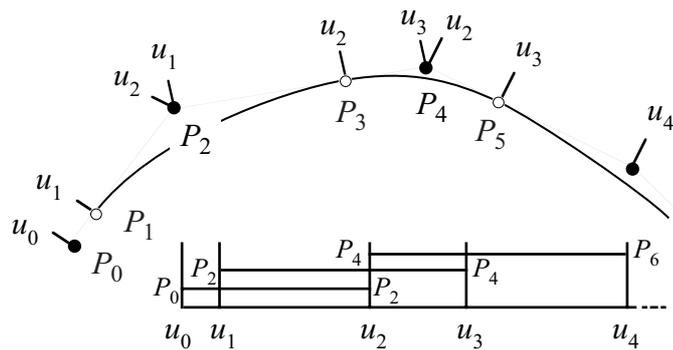
Il segmento $P_0 P_2$ viene ad avere un punto intermedio corrispondente a u_1 , il segmento $P_2 P_4$ un punto intermedio corrispondente a u_2 etc.

Questi punti, come si vede in figura, sono i punti P_1, P_3, \dots e ciò chiarisce il significato geometrico delle formule sopra che definiscono i P_i dispari.

La B-spline varia cambiando la successione nodale. La variazione di un elemento della successione nodale ha effetto solo su tre curve di Bézier della curva (una o due se siamo agli estremi).

Se $u_0 = u_1$, allora $P_0 = P_1$ e la curva passa per il primo punto del poligono.

In generale però è bene che nella successione nodale non ci siano coincidenze fuori dagli estremi perché queste causano punti angolosi nella B-spline e comunque u_i troppo ravvicinati causano bruschi cambiamenti di curvatura.

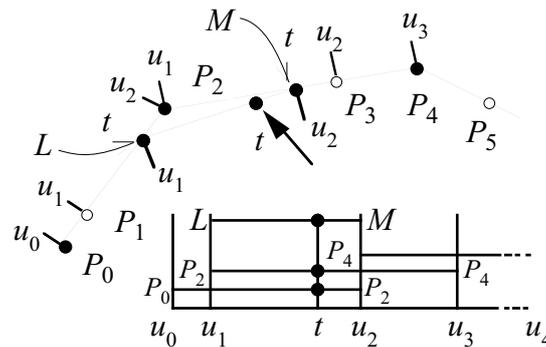


L' algoritmo di De Casteljau nel caso quadratico non uniforme

La successione nodale funge anche da parametro per la parametrizzazione della curva risultante nel senso che ogni punto dell'intervallo $[u_1, u_n]$ (escludendo cioè gli estremi) fornisce un punto della B-spline in modo analogo all'algoritmo di De Casteljau per le Bézier quadratiche.

Per esempio se si sceglie un t nell'intervallo $[u_1, u_2]$ questo determina un punto della prima Bézier della B-spline nel seguente modo:

Si considerano i due punti corrispondenti a $t \in [u_1, u_2]$: uno nel segmento $P_0 P_2$ che è in corrispondenza con $[u_0, u_2]$ e uno nel segmento $P_2 P_4$ che è in corrispondenza con $[u_1, u_3]$. Il segmento che ha come estremi i due punti (e che chiamiamo LM) viene ora messo in corrispondenza con l'intervallo $[u_1, u_2]$. In corrispondenza di t su LM si determina un punto della B-spline.



Facendo variare t nell'intervallo $[u_1, u_2]$ si ottengono tutti i punti della B-spline compresa tra P_1 e P_3 , facendolo variare in $[u_2, u_3]$ si ottengono i punti compresi tra P_3 e P_5 e così via.

4.2.7 Le B-spline cubiche

Le B-spline quadratiche danno risultati abbastanza soddisfacenti e, grazie alla flessibilità data dalle successioni nodali, si adattano facilmente a molte esigenze. Ciononostante, vengono usate molto più spesso le B-spline cubiche, sia per la maggiore flessibilità, sia per il fatto che le parabole sono curve piane. Se si vuole una curva nello spazio non necessariamente giacente su un piano, il raccordo tra curve piane nei punti di giunzione può risultare assai brusco. Le cubiche invece sono curve che possono essere dotate di *torsione* e quindi svilupparsi con continuità nello spazio.

Nella trattazione che segue, i punti del poligono di de Boor non sono necessariamente nel piano e possono quindi avere una terza coordinata z .

Come dati iniziali sono assegnati i seguenti $n + 1$ punti distinti (o meglio tali che tre consecutivi siano distinti) che costituiscono il poligono di de Boor.

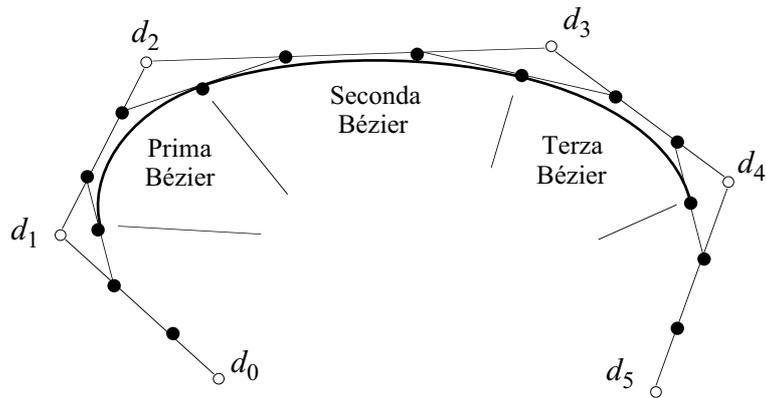
$$d_0, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_n$$

Costruiremo una B-spline costituita da $n - 2$ curve cubiche di Bézier ognuna delle quali ha un poligono di controllo A, B, C, D col secondo e terzo punto situati sui segmenti $d_i d_{i+1}$.

I punti dei poligoni di controllo andranno scelti con cautela se si vuole fare in modo che la B-spline risultante sia di classe C^2 . Questo rende la costruzione più complessa che nel caso quadratico.

Caso uniforme

Nel caso più semplice divideremo i segmenti $d_i d_{i+1}$ in tre parti uguali. Poi considereremo i segmenti che hanno estremi due punti consecutivi delle divisioni e li divideremo in due parti uguali. La B-spline sarà costituita dalle curve di Bézier cubiche che hanno come punti di controllo questi. La figura dovrebbe chiarire quali sono i poligoni di controllo.



La curva così costruita è detta *B-spline cubica uniforme*. L'aggettivo uniforme si riferisce al fatto che i punti dei poligoni di controllo sono presi con suddivisioni uniformi dei segmenti del poligono di de Boor.

La B-spline è continua e di classe C^1 per costruzione. *Si può dimostrare che, se i punti P_i sono costruiti come sopra, e cioè dividendo in tre e in due parti uguali, è anche di classe C^2 .*

Osserviamo che la curva non passa per nessuno dei punti del poligono di de Boor ed è anche lontana dagli estremi.

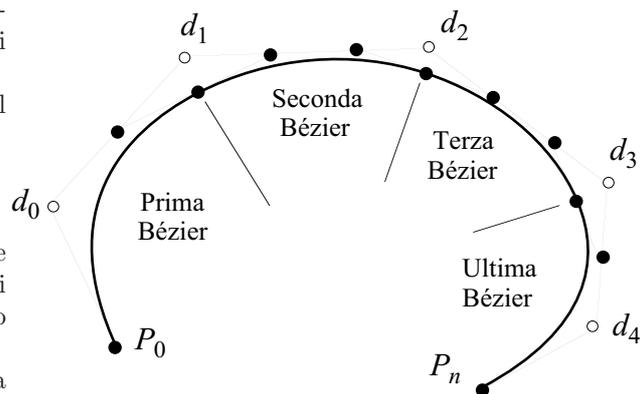
Esiste una costruzione alternativa che consente di far passare la curva per gli estremi del poligono, mantenendo la classe C^2 .

Questa costruzione privilegia gli estremi del poligono, quindi è bene chiamare il poligono

$$P_0, d_0, d_1, \dots, d_{n-1}, d_n, P_n$$

Il primo lato $d_0 d_1$ viene diviso in due parti e non in tre e così pure l'ultimo. I punti estremi P_0 e P_n fanno parte del poligono di controllo delle Bézier estreme.

Per il resto tutto è come nel caso sopra. La figura dovrebbe chiarire la costruzione.



Caso non uniforme

Invece di dividere i segmenti $d_i d_{i+1}$ in tre parti e i segmenti intermedi in due, si possono fare altre scelte e ottenere una modellazione diversa con un controllo *semi-locale*.

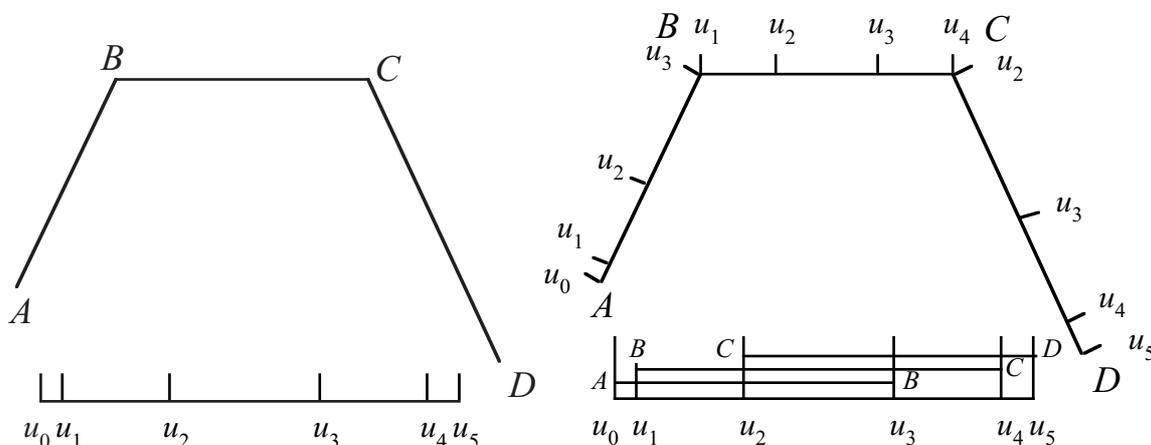
Si tenga però presente che scelte casuali della suddivisione dei vari segmenti possono far sì che la B-spline risultante non sia più di classe C^2 e le curve non di classe C^2 , pur non avendo spigoli,

risultano spesso sgradevoli per il fatto che *il raggio di curvatura* della curva varia bruscamente nei punti di giunzione e, nel caso di curve spaziali, cambia di colpo il piano osculatore. Questo viene evitato dall'uso di una *successione nodale* che consente di effettuare modifiche mantenendo la classe C^2 .

Se il poligono di de Boor è d_0, \dots, d_n , la successione nodale è una successione non decrescente di $n + 3$ numeri positivi $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{n+2}$. Definiremo quindi i punti di controllo delle Bézier cubiche usando gli u_i . La costruzione è notevolmente più complessa che nel caso quadratico. La illustreremo mediante un semplice poligono di de Boor di quattro vertici. I quattro vertici per praticità saranno denotati A, B, C, D anziché d_0, d_1, d_2, d_3

Come nel caso quadratico useremo un righello che riporti la successione u_0, u_1, \dots, u_5 e che useremo per parametrizzare i tre lati.

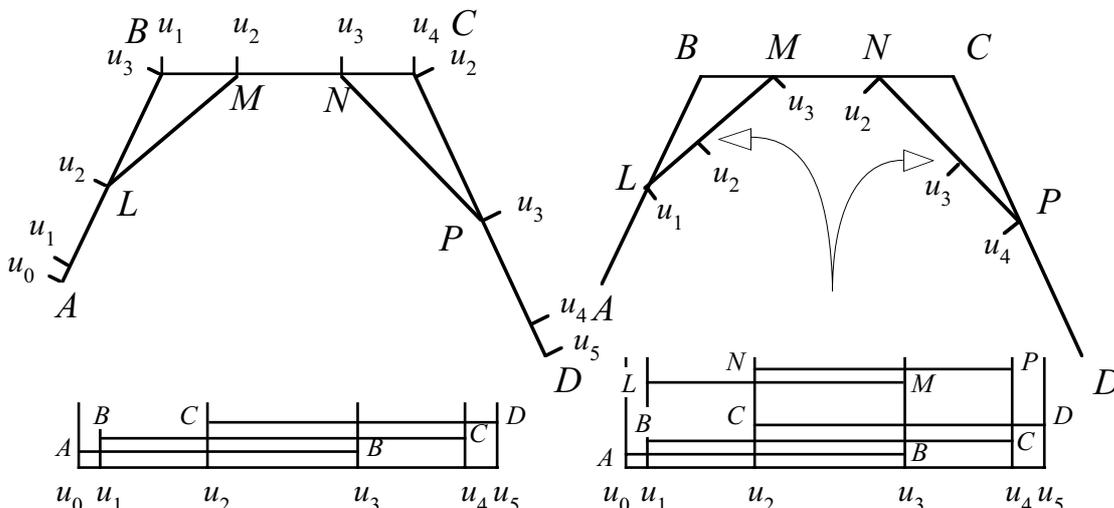
Parametrizziamo:
 il segmento AB mediante $[u_0, u_3]$
 il segmento BC mediante $[u_1, u_4]$
 il segmento CD mediante $[u_2, u_5]$



Ora consideriamo i punti dei lati AB, BC, CD ottenuti per u_2 e u_3 (esclusi quelli estremi). Abbiamo 4 punti che chiamiamo L, M, N, P come nella prima figura sotto.

$$\text{Analiticamente } L = \frac{(u_3 - u_2)A + (u_2 - u_0)B}{u_3 - u_0} \quad M = \frac{(u_4 - u_2)B + (u_2 - u_1)C}{u_4 - u_1} \text{ etc.}$$

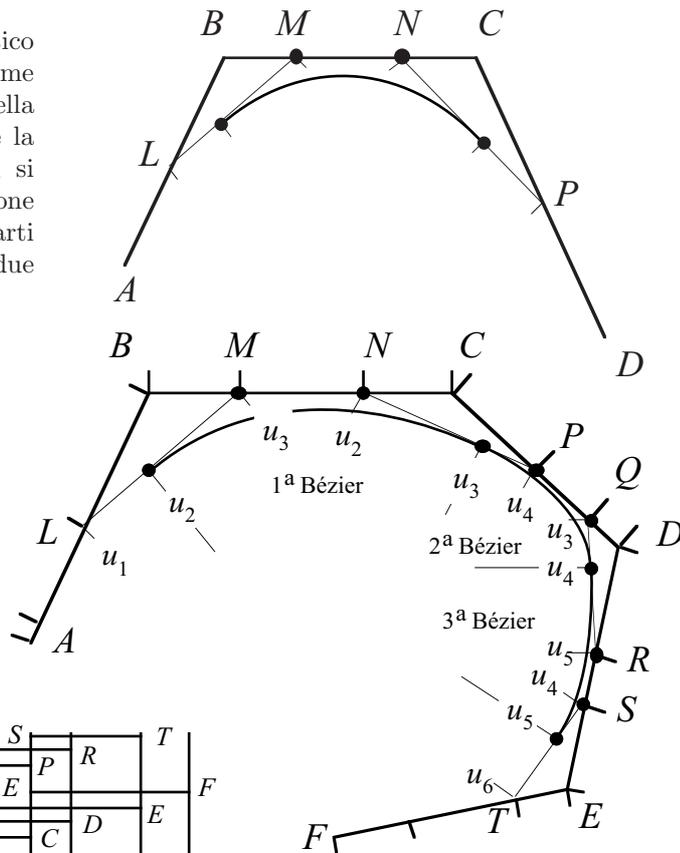
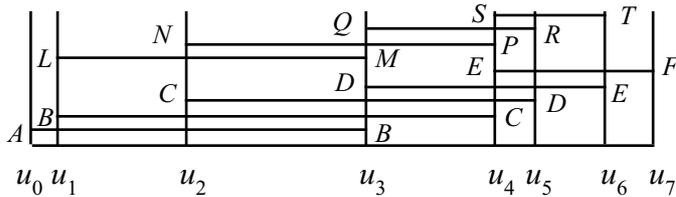
Consideriamo i due segmenti LM, NP che vanno parametrizzati rispettivamente mediante l'intervallo $[u_1, u_3]$ e l'intervallo $[u_2, u_4]$ come nella seconda figura sotto.



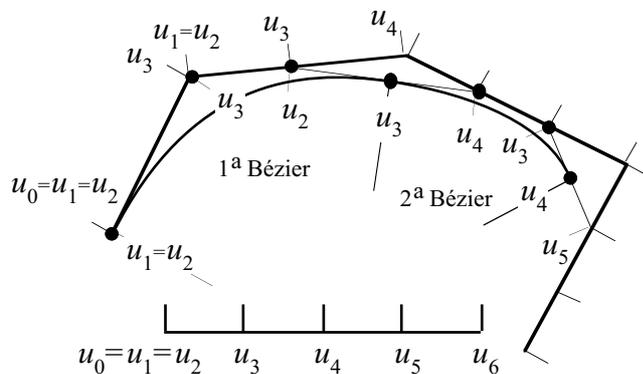
Fissiamo l'attenzione sul punto ottenuto su LM per $t = u_2$ e su quello ottenuto su NP per $t = u_3$ (seconda figura sopra).

Ora è possibile, come nel caso quadratico costruire la curva di Bézier che ha come poligono di controllo i punti segnati nella figura a lato. Osserviamo solo che, se la successione nodale è a passo costante, si riottiene il caso uniforme, con suddivisione dei tre segmenti AB, BC, CD in tre parti uguali e dei due segmenti LM, NP in due parti uguali.

Nella figura accanto vediamo questo procedimento portato avanti per un poligono di 6 vertici $ABCDEF$ e quindi con una successione nodale di 8 numeri u_0, \dots, u_7 . La B-spline conseguente è costituita da tre curve di Bézier. Sono in evidenza i due punti di giunzione delle tre curve.



Per concludere vediamo un esempio con poligono di de Boor di 5 vertici e una successione nodale u_0, \dots, u_6 in cui $u_0 = u_1 = u_2$. Questo fa sì che la curva passi per il primo punto del poligono di de Boor. Per il resto abbiamo scelto che la successione nodale sia di passo costante. Fondamentalmente si ritrova la costruzione alternativa del caso uniforme che permette di far passare la B-spline per il primo vertice del poligono.

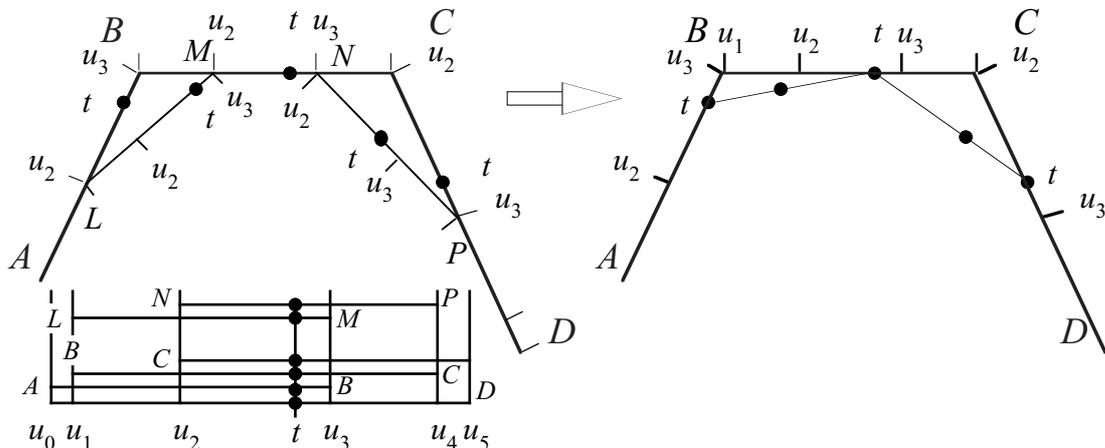


L'algoritmo di De Casteljaun per le B-spline cubiche non uniformi

Invece di costruire le curve di Bézier dati i loro poligoni di controllo, può essere più conveniente parametrizzare la curva, come nel caso quadratico.

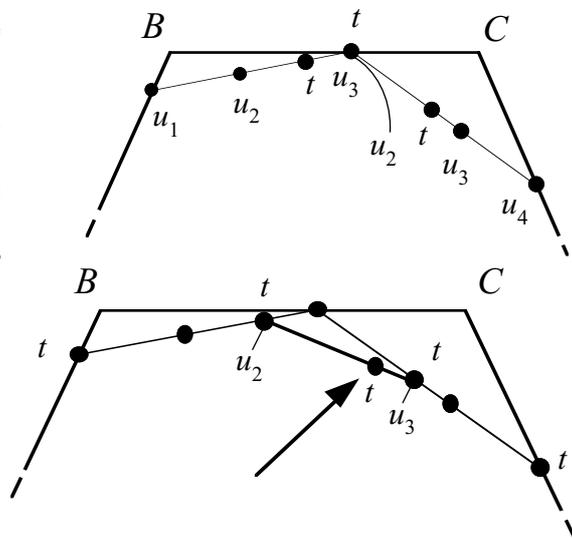
Riprendiamo quindi il caso del poligono $ABCD$ dal momento in cui sono stati trovati i punti L, M, N, P . Parametrizzeremo la curva con un parametro t che varia nell'intervallo $[u_2, u_3]$ della successione nodale.

Scegliamo $t \in [u_2, u_3]$ e riportiamolo su tutti i segmenti che sono stati posti in corrispondenza con questo intervallo. Ci sono 5 intervalli $[u_2, u_3]$, quindi fissiamo l'attenzione sui 5 punti corrispondenti a t . I tre punti su AB , su LM e su BC risultano allineati e così pure i tre su BC , su NP e su CD . Questo è conseguenza di un famoso teorema geometrico, noto come *Teorema di Menelao*.



Consideriamo dunque le due rette e poniamole in corrispondenza rispettivamente con gli intervalli $[u_1, u_3]$ e $[u_2, u_4]$ della successione nodale. Sempre mediante il teorema di Menelao, si può dimostrare che i punti intermedi per questa parametrizzazione degli intervalli sono proprio quelli che corrispondono rispettivamente a u_2 e a u_3 . Su questi segmenti individuiamo ancora una volta il punto t compreso tra u_2 e u_3

Per concludere consideriamo l'ultimo segmento che ha come estremi i due punti t e poniamolo in corrispondenza con l'intervallo $[u_2, u_3]$. Su questo segmento individuiamo il punto t compreso tra u_2 e u_3 . Questo è finalmente un punto della B-spline.



4.2.8 Cenni sulle curve di Bézier razionali

Le B-spline cubiche così definite degenerano correttamente in rette o in parabole se i punti del poligono sono disposti in maniera particolare, per esempio se sono allineati, ma non possono mai rappresentare correttamente un arco di circonferenza o di ellisse per il semplice motivo che né circonferenze, né ellissi ammettono una parametrizzazione mediante funzioni polinomiali, mentre le parametrizzazioni delle curve di Bézier sono polinomiali essendo combinazione lineare di polinomi di Bernstein. Questa è la ragione per cui spesso vengono utilizzate le curve B-spline razionali che sono a pezzi curve di Bézier razionali. Accenniamo brevemente a queste ultime.

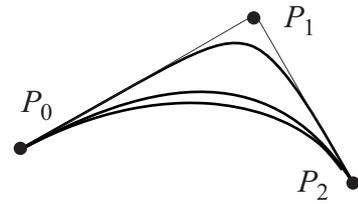
Per definire una curva di Bézier razionale di ordine n occorrono un poligono P_0, P_1, \dots, P_n e una successione di numeri positivi w_1, \dots, w_n detti *pesi*. La curva ha rappresentazione parametrica

$$P(t) = \frac{w_0 P_0 B_0(t) + \dots + w_n P_n B_n(x)}{w_0 B_0(t) + \dots + w_n B_n(x)}$$

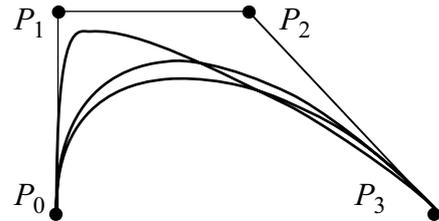
dove i B_i sono i polinomi di Bernstein di ordine n . Osserviamo che, per le proprietà dei polinomi di Bernstein, il denominatore vale 1 se tutti i pesi sono 1, per cui in questo caso si ottiene la solita curva di Bézier. Assegnando opportunamente i pesi si riesce a fare "aderire" più o meno la curva ai vertici del poligono ottenendo spesso risultati più flessibili di quelli delle curve di Bézier semplici e riuscendo per esempio a descrivere archi di coniche diversi dalle parabole nel caso di curve di Bézier quadratiche.

Senza entrare nei dettagli mostriamo due esempi.

Sul poligono $P_0P_1P_2$ sono state costruite le curve di Bézier quadratiche razionali con pesi $[1\ 1\ 1]$ $[1\ 1\ 2]$ $[1\ 4\ 1]$ rispettivamente. La prima è la più distante da P_1 ed è la curva di Bézier normale (quindi una parabola), la seconda è la mediana ed è precisamente un quarto di ellisse inserito nel poligono di controllo, la terza “aderisce” al punto centrale del poligono di controllo ed è una porzione di iperbole. La curva con pesi $[2\ 1\ 1]$ coincide con quella di pesi $[1\ 1\ 2]$ anche se con diversa parametrizzazione.



Sul poligono $P_0P_1P_2P_3$ sono state costruite le curve di Bézier cubiche razionali con pesi $[1\ 1\ 1\ 1]$ $[3\ 2\ 2\ 3]$ $[1\ 5\ 1\ 1]$ rispettivamente. La prima è la mediana ed è la cubica di Bézier normale. La seconda è la più bassa ed è un arco di ellisse, la terza “aderisce” al secondo punto del poligono di controllo.



5.1 Integrazione ed equazioni differenziali

È un capitolo assai vasto dell'analisi numerica, anche perché le equazioni differenziali sono uno strumento essenziale in moltissime questioni.

Ci limitiamo ai casi più semplici illustrando tecniche che comunque sono abbastanza antiche, anche se il loro studio ha ricevuto enorme impulso con l'avvento del calcolo automatico.

Il problema è che di raro è possibile risolvere le equazioni differenziali in modo esatto e quindi i metodi numerici sono quasi sempre indispensabili.

5.1.1 Richiami sugli integrali

Il più semplice problema differenziale è il seguente:

Data una funzione $f(t)$ definita in un punto t_0 e in un suo intorno (destra, sinistra o comprendente t_0), e un numero y_0 , determinare una funzione $y(t)$ definita in un intervallo comprendente il numero t_0 tale che

$$y' = f(t) \quad y(t_0) = y_0$$

La funzione $y(t)$ è detta *primitiva* di $f(t)$.

Come è ben noto, il teorema fondamentale del calcolo integrale fornisce la soluzione del problema:

Proposizione 3 *Se $f(t)$ è integrabile in un intorno di t_0 , allora*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(t) dt$$

Il problema è quindi quello di calcolare l'integrale. Se la primitiva $y(t)$ è ricavabile mediante le note tecniche di integrazione indefinita, allora la proposizione fornisce semplicemente la nota formula

$$\int_{t_0}^t f(t) dt = y(t) - y(t_0)$$

È noto che in molti casi $y(t)$ non è calcolabile elementarmente. In altri casi lo è, ma la sua espressione è comunque complessa, per cui ci proponiamo di ricavare degli algoritmi numerici per il calcolo dell'integrale definito.

5.1.2 Integrazione numerica: formule di Newton-Cotes

Vogliamo calcolare numericamente l'integrale definito

$$\int_a^b f(t) dt$$

dove $f(t)$ è una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$ (ma basterebbe continua a tratti e limitata).

L'idea base è sempre quella di sostituire $f(t)$ con un polinomio di grado n passante per $n + 1$ punti dell'intervallo $[a, b]$ e quindi di usare la primitiva del polinomio che è calcolabile elementarmente, avvertendo che, in genere, *non è necessario esplicitare il polinomio* per calcolare l'area sottesa.

A seconda del grado usato e del criterio di scelta dei punti si possono avere numerosissimi metodi di integrazione numerica.

Se tra gli $n + 1$ punti ci sono gli estremi si parla di *metodo chiuso*.

Se gli $n + 1$ punti sono scelti dividendo l'intervallo in parti uguali, le formule ricavate sono dette *formule di quadratura di Newton-Cotes*.

Ci limiteremo a quest'ultimo caso ed esamineremo in dettaglio i casi $n = 0, 1, 2$.

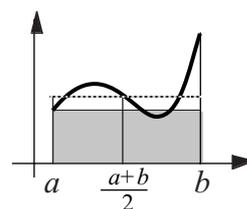
Metodo del rettangolo (o di Cauchy) ($n = 0$)

Il polinomio ha grado 0 è cioè una costante, quindi va scelto un solo punto dell'intervallo, per esempio il punto a .

Quindi $f(t)$ è sostituita dalla funzione costante $y = f(a)$ e notoriamente $\int_a^b f(a) dt = f(a)(b - a)$ (area del rettangolo).

Benché il metodo sia grossolano e banale, vedremo poi la sua controparte nel caso di un'equazione differenziale qualunque.

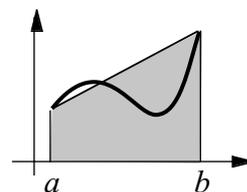
Osserviamo solo che, se invece di scegliere il punto a si sceglie il punto medio dell'intervallo $(a + b)/2$, si ottiene una formula assai simile alla successiva e in molti casi più precisa.



Metodo del trapezio (o di Bézout) ($n = 1$)

Il polinomio ha grado 1 e ha come grafico una retta, quindi vanno scelti due punti dell'intervallo che, nel caso chiuso di Newton-Cotes sono i due punti a, b .

Quindi $f(t)$ è sostituita dalla funzione che rappresenta la retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. L'integrale di questa funzione è l'area del trapezio in figura che vale $\frac{f(a) + f(b)}{2} (b - a)$



Metodo di Cavalieri-Simpson ($n = 2$)

Il polinomio ha grado 2 e ha come grafico una parabola, quindi vanno scelti tre punti dell'intervallo, che, nel caso chiuso di Newton-Cotes sono $a, \frac{a+b}{2}, b$.

Quindi $f(t)$ è sostituita dalla funzione che rappresenta la parabola $p(t)$ passante per tre punti. Un conto non difficile anche se laborioso

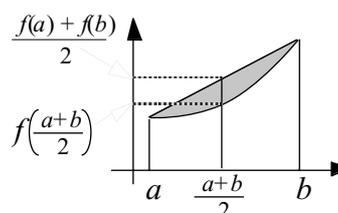
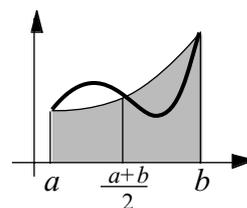
mostra che $\int_a^b p(t) dt = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$

che è la classica formula di Cavalieri-Simpson.

Accenniamo a una semplice costruzione della formula di Cavalieri-Simpson: l'area sottesa dalla parabola è la differenza (o la somma se la parabola ha concavità verso il basso) dell'area del trapezio $(b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$ e dell'area del settore parabo-

lico che come è noto è $\frac{2}{3} (b - a) \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)$.

Da qui con un semplice calcolo la formula.



È possibile ricavare formule analoghe per $n > 2$ e per altre scelte dei punti per i quali passa il polinomio, ma normalmente non ci si spinge oltre il grado due. Rileviamo solo che in diversi casi metodi aperti e con scelta non uniforme dei punti possono essere più convenienti dei metodi chiusi tipo Newton-Cotes.

5.1.3 Metodi generali di Cauchy, Bézout, Cavalieri-Simpson

Non essendo convenienti le formule di Newton-Cotes per $n > 2$, la prassi usuale consiste nel suddividere l'intervallo $[a, b]$ in tanti sottointervalli in ciascuno dei quali viene applicato uno dei tre metodi esposti, tenendo presente che, se $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ è una suddivisione dell'intervallo, si ha

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)dt$$

Supponiamo che la divisione dell'intervallo sia uniforme e poniamo $h = x_{i+1} - x_i$. Nei tre metodi citati (Cauchy, Bézout, Cavalieri-Simpson) le formule diventano:

$n = 0$ Mediante il primo metodo, come integrale di $f(t)$ si ottiene proprio l'integrale definito mediante la definizione originale di Cauchy, cioè, come somma delle aree di plurirettangoli.

$$\int_a^b f(t)dt \simeq \sum_{i=0}^n f(x_i) (x_{i+1} - x_i) = h \cdot \sum_{i=0}^n f(x_i)$$

Nella definizione di integrale più spesso usata, quella di Riemann, il punto in cui si calcola f non è il primo punto di ogni intervallo, ma un qualunque punto ξ_i interno all'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$.

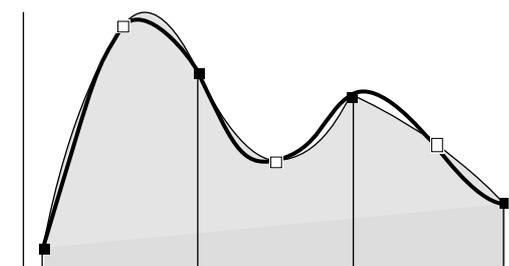
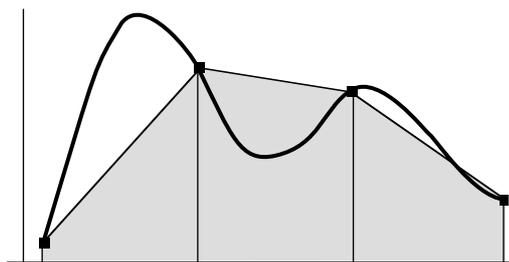
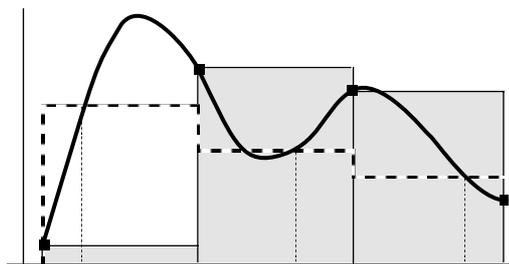
$n = 1$ Mediante il metodo dei trapezi, l'integrale approssimato di $f(t)$ si ottiene come somma delle aree di trapezi. In pratica si integra lo spline lineare di $f(t)$.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dt &\simeq \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i) = \\ &= \frac{h}{2} \cdot (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) \end{aligned}$$

$n = 2$ Mediante il metodo di Cavalieri-Simpson l'integrale approssimato di $f(t)$ si ottiene come somma delle aree sottese da parabole.

La funzione formata da parabole è continua, ma non è lo spline quadratico della funzione nei punti x_i , sia perché vengono utilizzati anche i punti medi, sia perché non è detto sia dotata di derivata prima.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dt &\simeq h \cdot \sum_{i=0}^n \frac{1}{6} \left(f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right) = \\ &= \frac{h}{6} \left(f(x_0) + 4f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + 2f(x_1) + 4f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right) \end{aligned}$$



5.1.4 L'errore nelle formule di integrazione numerica

Naturalmente è importante sapere quanto il valore calcolato con le formule numeriche si discosti dal vero valore dell'integrale. È possibile dare una valutazione dell'errore commesso solo nel caso in cui la funzione $f(t)$ presenti una certa regolarità. Senza addentrarci nei particolari, ci limitiamo a fornire le valutazioni per le formule di Bézout e Cavalieri-Simpson.

L'errore nelle formule di Bèzout

Nel caso semplice, cioè di un solo trapezio nell'intervallo $[a, b]$, si dimostra che:

Se $f(t)$ è dotata di derivata seconda *continua*, esiste un punto ξ dell'intervallo (a, b) tale che l'errore è in modulo uguale a $\left| \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \right|$

Nel caso generale di suddivisione dell'intervallo in sottointervalli di ampiezza h , esiste un punto ξ dell'intervallo (a, b) tale che l'errore è in modulo uguale a $\left| \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) \right|$

Quindi è possibile maggiorare l'errore se è possibile maggiorare la derivata seconda di $f(t)$ nell'intervallo (a, b) e si può render piccolo quanto si vuole l'errore diminuendo l'ampiezza h dei sottointervalli. L'errore tende a zero al tendere a zero di h con ordine di infinitesimo pari a 2.

L'errore nelle formule di Cavalieri-Simpson

Nel caso semplice, cioè di una sola parabola nell'intervallo $[a, b]$, si dimostra che:

Se $f(t)$ è dotata di derivata quarta *continua*, esiste un punto ξ dell'intervallo (a, b) tale che l'errore è in modulo uguale a $\left| \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(IV)}(\xi) \right|$

Nel caso generale di suddivisione dell'intervallo in sottointervalli di ampiezza h , esiste un punto ξ dell'intervallo (a, b) tale che l'errore è in modulo uguale a $\left| \frac{(b-a)h^4}{2880} f^{(IV)}(\xi) \right|$

È quindi possibile maggiorare l'errore se è possibile maggiorare la derivata quarta di $f(t)$ nell'intervallo (a, b) e si può render piccolo quanto si vuole l'errore diminuendo l'ampiezza h dei sottointervalli. L'errore tende a zero al tendere a zero di h con ordine di infinitesimo pari a 4.

Un'osservazione: alcuni testi danno formule di Cavalieri-Simpson e maggiorazioni differenti, ma solo perché considerano come ampiezza h , non quella degli intervalli $[x_i - x_{i+1}]$, ma la loro metà, visto che la funzione va calcolata anche nei punti medi.

5.2 Equazioni differenziali

5.2.1 Richiami sul problema di Cauchy

Il classico problema differenziale di Cauchy si può enunciare così:

Determinare una funzione $y(t)$ definita in un intervallo comprendente il numero t_0 tale che

$$y' = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0$$

La differenza col problema dell'integrazione sta nel fatto che f è una funzione di due variabili e dipende anche dalla funzione y , anziché solo da t . Esistono varie condizioni sufficienti sulla funzione $f(t, y)$ che assicurano l'esistenza e unicità di una soluzione del problema. Una delle più semplici è la seguente (anche se in realtà spesso bastano condizioni assai meno restrittive).

Proposizione 4 *Se $f(t, y)$ è continua in un dominio rettangolare $D = \{[t_a, t_b] \times [y_a, y_b]\}$ con $t_0 \in (t_a, t_b)$ e $y_0 \in (y_a, y_b)$ e inoltre anche la funzione $\partial f / \partial y$ esiste ed è continua e quindi limitata in D , allora $y(t)$ esiste ed è unica in un intorno di t_0 .*

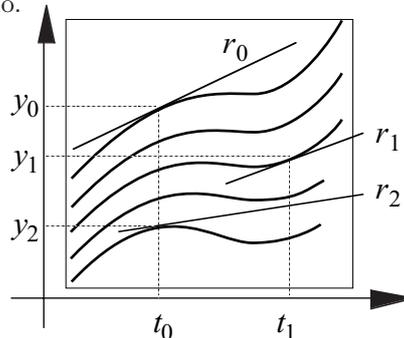
Se f è una funzione elementare, in alcuni casi "speciali" esistono varie tecniche (variabili separabili etc.) per determinare esplicitamente $y(t)$. Ci occuperemo invece del caso in cui y non sia determinabile esplicitamente o comunque la sua espressione sia complessa.

In questi casi la soluzione va calcolata in modo approssimato mediante tecniche numeriche.

Osserviamo innanzitutto che il problema di Cauchy $y' = f(t, y)$ senza la condizione iniziale su $y(t_0)$, se ha soluzione, ne ha in generale infinite che costituiscono una famiglia di funzioni passanti per ognuna delle coppie (t_i, y_i) di punti interni al dominio.

L'osservazione è fondamentale perché la soluzione che troveremo sarà in qualche modo una mediazione tra molte di queste soluzioni.

Esiste una funzione $y(t)$ passante per (t_0, y_0) e tale che $f(t_0, y_0)$ sia il coefficiente angolare della retta r_0 e analogamente esiste una funzione $y(t)$ passante per (t_1, y_1) e tale che $f(t_1, y_1)$ sia il coefficiente angolare della retta r_1 e così pure per (t_0, y_2)



5.2.2 Il metodo di Eulero

Il metodo più semplice è quello di Eulero che è anche alla base di metodi più raffinati. Si fissa un passo h (che può anche essere negativo) e quindi si considerano diversi punti a partire da t_0 :

$$t_0 \quad t_1 = t_0 + h \quad t_2 = t_1 + h \quad \dots$$

L'equazione differenziale ci fornisce il coefficiente angolare della soluzione in t_0 che è $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$.

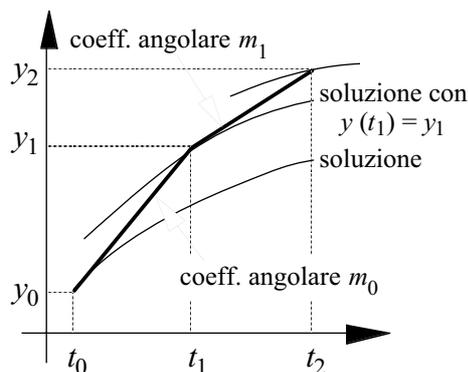
L'idea è quindi di sostituire la soluzione $y(t)$ con la retta passante per (t_0, y_0) di coefficiente angolare $f(t_0, y_0)$ che chiamiamo m_0 e che ha quindi equazione

$$y = y_0 + m_0(t - t_0)$$

Questo nell'intervallo t_0, t_1 . Per sapere come è fatta la funzione negli intervalli successivi calcoliamo la funzione lineare in t_1 : $y_1 = y(t_1) = y_0 + m_0(t_1 - t_0)$, quindi nell'intervallo $[t_1, t_2]$ considereremo un'altra retta, quella passante per (t_1, y_1) con coefficiente angolare $m_1 = f(t_1, y_1)$.

Si badi che comunque il punto (t_1, y_1) in generale non appartiene alla soluzione del problema originale, ma al grafico di un'altra funzione della famiglia dell'equazione differenziale. Man mano che l'algoritmo prosegue è possibile che ci si allontani sempre di più dalla soluzione del problema originale.

Osserviamo che se il problema di Cauchy è semplicemente $\{y' = f(t) ; y(t_0) = y_0\}$ la soluzione fornita dal metodo di Eulero è il metodo di Cauchy per gli integrali definiti con la suddivisione t_0, t_1, \dots



5.2.3 Il metodo di Eulero quadratico

Il metodo di Eulero consiste in pratica nel sostituire a $y(t)$ la sua linearizzazione, ovvero il suo sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine in t_0 che è fornito direttamente dalla funzione $f(t, y)$. Da qui nasce l'idea di sostituire a $y(t)$ il suo sviluppo di Taylor arrestato a un ordine superiore, per esempio due.

Esplicitamente, se $y'(t) = f(y, t)$, allora, usando note formule di derivazione delle funzioni composte, la sua derivata seconda è esprimibile in funzione delle derivate parziali di f ovvero si ha $y''(t) = \frac{df}{dt}(t, y_0) = f_t + f_y y' = f_t + f_y f$. Quindi la funzione quadratica che rappresenta il primo passo del metodo di Eulero quadratico è

$$y = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} \left(f_t(t_0, y_0) + f_y(t_0, y_0) f(t_0, y_0) \right) (t - t_0)^2$$

Di qui è possibile ricavare per $t = t_1$ il prossimo punto (t_1, y_1) da cui ricominciare l'algoritmo. In pratica comunque il metodo è scarsamente usato perché il calcolo delle derivate parziali può portare a formule assai complesse e vengono preferiti metodi che fanno uso di rette come quelli esposti di seguito.

5.2.4 I metodi di Eulero generalizzati

L'idea base dei metodi esposti qui di seguito è quella di sostituire la linearizzazione semplice di $y(t)$ con una funzione ugualmente lineare che tenga però già conto del comportamento della funzione nei punti successivi a t_0 , cioè t_1 ed eventuali altri precedenti o successivi.

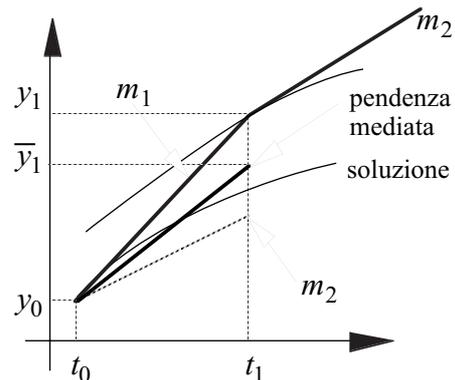
In generale partendo dalla formula elementare di Eulero

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0)$$

si scelgono due numeri positivi c_1, c_2 tali che $c_1 + c_2 = 1$ e la formula viene così modificata

$$\bar{y}_1 = y_0 + (t_1 - t_0) \left(c_1 f(t_0, y_0) + c_2 f(t_1, y_1) \right)$$

Quindi la funzione lineare ha una pendenza mediata tra quella nota in t_0 e quella calcolata in t_1 dopo il primo passo del metodo di Eulero. Vari accorgimenti suggeriscono i pesi c_1 e c_2 da usare.



5.2.5 Il metodo di Heun

Si tratta del metodo di Eulero generalizzato in cui $c_1 = c_2 = 1/2$. Quindi, come sopra

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0) \quad \bar{y}_1 = y_0 + (t_1 - t_0) \left(\frac{f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1)}{2} \right)$$

Quindi l'algoritmo procede con la coppia (t_1, \bar{y}_1) . Si noti che la pendenza della retta è la media delle due pendenze calcolate in t_0 e in t_1 , ma la nuova retta non è la bisettrice delle due.

Osserviamo ancora che se il problema di Cauchy è semplicemente $\{y' = f(t) \ ; \ y(t_0) = y_0\}$ la soluzione fornita dal metodo di Heun è il metodo di Bézout per gli integrali definiti con la suddivisione t_0, t_1, \dots

5.2.6 Il metodo di Eulero modificato

La formula di Eulero può essere ulteriormente generalizzata in questo modo

$$\bar{y}_1 = y_0 + (t_1 - t_0) \left(c_1 f(t_0, y_0) + c_2 f\left(t_0 + ha, y_0 + b h f(t_0, y_0)\right) \right)$$

con $c_1 + c_2 = 1$ e $ac_2 = 1/2$; $bc_2 = 1/2$. Quindi si ha una media pesata tra la pendenza calcolata in t_0 e quella calcolata in qualche punto compreso tra t_0 e t_1 . I parametri c_1, c_2, a, b sono tutti da scegliere con vari criteri suggeriti dall'esperienza. Il cosiddetto metodo di Eulero modificato usa la formula precedente semplicemente con $c_1 = 0$; $c_2 = 1$ e $a = b = 1/2$

$$\bar{y}_1 = y_0 + (t_1 - t_0) f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, y_0)\right)$$

Quindi per determinare la nuova coppia (t_1, \bar{y}_1) si fa uso del valore di $f(t, y)$ calcolato nel punto medio tra t_0 e t_1 .

5.2.7 Il metodo di Runge-Kutta

Esistono diversi metodi detti di Runge-Kutta che fanno uso di varie medie delle pendenze in t_0, t_1 e in punti intermedi. Quello illustrato di seguito è il metodo classico di Runge-Kutta di ordine 4.

Si fa uso del punto medio tra i primi due punti della suddivisione $t_m = \frac{t_0 + t_1}{2}$.

Si inizia come nel metodo di Eulero con la retta passante per (t_0, y_0) di coefficiente angolare $m_0 = f(t_0, y_0)$. La retta è $y = y_0 + m_0(t - t_0)$.

Si trova il punto \bar{y} in cui la retta ha ascissa t_m , ovvero $\bar{y} = y_0 + m_0(t_m - t_0)$.

Si calcola il valore di $f(t, y)$ nel punto (t_m, \bar{y}) , quindi si pone $m_1 = f(t_m, \bar{y})$.

Si prosegue con la retta passante per (t_0, y_0) questa volta di coefficiente angolare m_1 .

La retta è $y = y_0 + m_1(t - t_0)$.

Si trova il punto $\bar{\bar{y}}$ in cui la retta ha ascissa t_m ovvero $\bar{\bar{y}} = y_0 + m_1(t_m - t_0)$.

Si calcola il valore di $f(t, y)$ nel punto $(t_m, \bar{\bar{y}})$ quindi si pone $m_2 = f(t_m, \bar{\bar{y}})$.

Ancora una volta si considera la retta passante per (t_0, y_0) , ma con coefficiente angolare m_2 , cioè la retta $y = y_0 + m_2(t - t_0)$

Quest'ultima volta si trova il punto $\bar{\bar{\bar{y}}}$ in cui la retta ha ascissa t_1 (non t_m), ovvero $\bar{\bar{\bar{y}}} = y_0 + m_2(t_1 - t_0)$.

Si calcola il valore di $f(t, y)$ nel punto $(t_1, \bar{\bar{\bar{y}}})$ quindi si pone $m_3 = f(t_1, \bar{\bar{\bar{y}}})$. Si osservi che sono stati calcolati i numeri m_i in quattro diverse funzioni della famiglia di soluzioni dell'equazione differenziale $y' = f(t, y)$.

Si definisce come primo passo del metodo di Runge-Kutta la retta di equazione

$$y = y_0 + \frac{m_0 + 2m_1 + 2m_2 + m_3}{6}(t - t_0)$$

e il primo valore della soluzione approssimata dell'equazione differenziale sarà

$$y_1 = y_0 + \frac{m_0 + 2m_1 + 2m_2 + m_3}{6}(t_1 - t_0)$$

Dopodiché si calcolerà y_2 in t_2 allo stesso modo, usando il punto intermedio tra t_1 e t_2 .

Per terminare osserviamo ancora che se il problema di Cauchy è semplicemente il problema integrale $\{y' = f(t) \ ; \ y(t_0) = y_0\}$, la soluzione fornita dal metodo di Runge-Kutta è il metodo di Cavalieri-Simpson per gli integrali definiti con la suddivisione t_0, t_1, \dots , di cui Runge-Kutta classico può essere quindi considerato una generalizzazione.

