Nome ______________________ Cognome ______________________

Compito di Geometria - Corsi: Gestionale e Logistica e della Produzione - 27 ottobre 1999

Testo composto di due fogli (quattro pagine). Rispondere alle seguenti domande su questi fogli usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

$\boxed{\mathcal{A}}$ È dato, per ogni $a \in \mathbb{R}$, il sistema lineare nelle incognite $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a+1 & -1 & -1 \\ 2 & a^2-1 & 0 & a-1 \\ a & a^2+a & -3 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Dire, per ogni $a \in \mathbb{R}$ se ha soluzioni e quante.

2. Per $a = 1, -1, 3$ determinarle tutte (se ce ne sono).

Applichiamo l'algoritmo gaussiano alla matrice completa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a+1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & a^2-1 & 0 & a-1 & 0 \\ a & a^2+a & -3 & -a & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - aR_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a+1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & a^2-2a-3 & 2 & a+1 & -2 \\ 0 & 0 & -3+a & 0 & 3-a \end{array}\right)$$

Se $a^2-2a-3 \neq 0$ e $-3+a \neq 0$, allora la matrice è ridotta con tre pivot e quindi il sistema ha ∞^{4-3} soluzioni. Cioè:

Se $a \neq -1, 3$, il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Se $a = -1$ la matrice è $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 4 \end{array}\right)$

L'ultima riga può essere trascurata in quanto proporzionale alla seconda. Il sistema è allora ridotto con due pivot e ha ∞^2 soluzioni.

Se $a = 3$ la matrice è $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Il sistema è ridotto con due pivot e ha ∞^2 soluzioni.

In conclusione: Se $a = -1, 3$, il sistema ha ∞^2 soluzioni.

Se $a = 1$, la matrice ridotta è $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right)$.

L'incognita non pivotale è t. Si ha subito:

$$\begin{cases} x + 2y - z - t = 1 \\ -2y + z + t = -1 \\ z = -1 \end{cases} \text{, da cui } \begin{cases} x = 0 \\ y = t/2 \\ z = -1 \end{cases}$$

. Le soluzioni sono $(0\ ,\ t/2\ ,\ -1\ ,\ t)$

Se $a = -1$, la matrice ridotta è $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right)$

Le incognite non pivotali sono y, t da cui subito: $\{x = t\ ;\ z = -1\}$ e le soluzioni sono: $(t\ ,\ y\ ,\ -1\ ,\ t)$.

Se $a = 3$, la matrice ridotta è $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right)$

Le incognite non pivotali sono y, t da cui subito: $\{x = -4y - t\ ;\ z = -1 - 2t\}$ e le soluzioni sono: $(-4y - t\ ,\ y\ ,\ -1 - 2t\ ,\ t)$.

$\boxed{\mathcal{B}}$ Data la matrice A a lato
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Dire, usando la definizione intrinseca di caratteristica (quella coi minori), che caratteristica ha A.

Calcoliamo $\det(A)$ *partendo da* R_4*:*

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$= (-2)(12) - 4(-6) = 0$$

Quindi l'unico minore di ordine 4 *di* A *è nullo.*

È facile trovare subito un minore di ordine 3 *non nullo di* A*, per esempio il determinante della sottomatrice inquadrata*

$$\left(\begin{array}{c|ccc|} 2 & 0 & 4 & 4 \\ \hline -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}\right)$$

Di conseguenza $\varrho(A) = 3$.

---

2. Dire quali delle colonne di A sono combinazione lineare delle altre.

Evidentemente la terza colonna non è combinazione lineare delle altre perché non si può ottenere un' 1 alla quarta riga.
Esaminiamo allora le altre tre e vediamo se C_4 *è combinazione lineare dei* C_1 *e* C_2*:*

$aC_1 + bC_2 = C_4$ *cioè* $a\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$*, da cui:*

$\begin{cases} 2a + b = 4 \\ -a + 3b = 1 \\ a + 3b = 5 \end{cases}$ *, da cui* $\{a = 2\ ;\ b = 1\}$*, cioè:*

$2C_1 + C_2 = C_4$ *che si può anche scrivere come:*
$C_2 = C_4 - 2C_1$ *e anche* $C_1 = -(1/2)C_2 + (1/2)C_4$*, cioè ognuna delle colonne* C_1, C_2, C_4 *è combinazione lineare delle altre.*

---

3. Determinare esplicitamente tutte le soluzioni in $M_{44}(\mathbb{R})$ dell'equazione $(X + I) \cdot B = A$, dove B è la matrice a lato.
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo subito che B *è invertibile, quindi dall'equazione si può ricavare* X *con i passaggi che seguono:*

$(X + I) \cdot B = A \qquad (X + I) \cdot B \cdot B^{-1} = A \cdot B^{-1} \qquad X + I = A \cdot B^{-1} \qquad X = A \cdot B^{-1} - I$

Quindi calcoliamo:

$$X = A \cdot B^{-1} - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1 \end{pmatrix}$$

NOME ______________________ COGNOME ______________________

Compito di Geometria - Sede di Savona - 27 ottobre 1999

$\boxed{\mathcal{C}}$ Sono dati i tre numeri complessi a, b, c.

$$a = -\sqrt{3} + i \qquad b = \frac{a^7}{64} \qquad c = \text{Soluzione di } z^5 = a \text{ tale che } \mathrm{Re}\,(c) < 0 \text{ e } \mathrm{Im}\,(c) < 0$$

1. Scrivere ciascuno dei tre numeri in forma algebrica e in forma esponenziale e disegnarli nel piano di Argand-Gauss.

Il numero a è già in forma algebrica. Il suo modulo è $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Un argomento θ si ricava dal sistema $\begin{cases} \cos(\theta) = -\sqrt{3}/2 \\ \sin(\theta) = 1/2 \end{cases}$ *Per esempio $\theta = 5\pi/6$. Quindi $a = 2e^{5\pi i/6}$ è la forma esponenziale.*

Si ha : $b = \dfrac{a^7}{64} = \dfrac{2^7 e^{35\pi i/6}}{64} = 2e^{35\pi i/6}$. Dato che dividendo 35 per 6 si ha 5 col resto di 5, allora $\dfrac{35\pi}{6} = \dfrac{6 \cdot 5 + 5}{6}\pi = 5\pi + \dfrac{5\pi}{6}$ e quest'ultimo numero è trigonometricamente equivalente a $\pi + \dfrac{5\pi}{6}$ o anche a $-\dfrac{\pi}{6}$, quindi una forma esponenziale per b è $b = 2e^{-\pi i/6}$.
La forma algebrica è $b = 2\cos(-\pi/6) + 2\sin(-\pi/6) \cdot i = \sqrt{3} - i$.

Le soluzioni di $z^5 = a$ sono $\sqrt[5]{2}e^{5\pi i/(6\cdot 5) + 2k\pi i/5}$. I loro argomenti sono $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{5}$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Esaminiamo questi argomenti per vedere quale delle soluzioni sta nel terzo quadrante:

$k = 0$	*Arg:* $\dfrac{\pi}{6}$		*Nel primo quadrante.*
$k = 1$	*Arg:* $\dfrac{17\pi}{30}$	*compreso tra $\pi/2$ e π*	*Nel secondo quadrante*
$k = 2$	*Arg:* $\dfrac{29\pi}{30}$	*compreso tra $\pi/2$ e π*	*Nel secondo quadrante*
$k = 3$	*Arg:* $\dfrac{41\pi}{30}$	*compreso tra π e $3\pi/2$*	*Nel terzo quadrante*

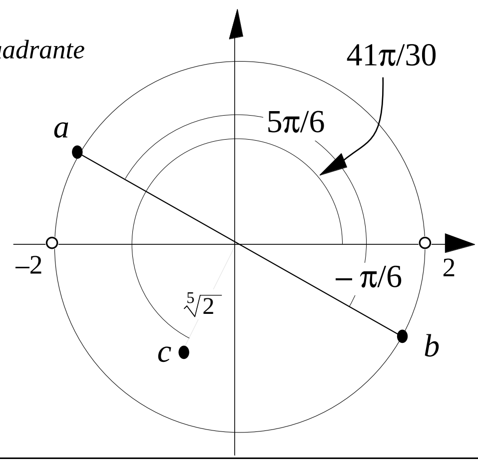
Quindi:

$$c = \sqrt[5]{2}e^{41\pi i/30}$$

Questa è la forma esponenziale.
La forma algebrica è:

$$c = \sqrt[5]{2}\cos(41\pi/30) + \sqrt[5]{2}\sin(41\pi/30) \cdot i$$

Dato che $41\pi/30$ non è un angolo con seno e coseno notevoli, ci fermiamo qui.



---

2. Scrivere un polinomio a coefficienti reali $P(x)$ avente a come radice di molteplicità 2.

Se un numero compleso non reale è radice di un numero complesso anche il suo coniugato lo è con la stessa molteplicità:, quindi il polinomio può essere:

$$P(x) = (x-(-\sqrt{3}+i))^2(x-(-\sqrt{3}-i))^2 = (x+\sqrt{3}-i)^2(x+\sqrt{3}+i)^2 = ((x+\sqrt{3})^2+1)^2 = (x^2+2\sqrt{3}x+4)^2$$

$\boxed{\mathcal{D}}$ 1. Nell'IR-spazio vettoriale $M_{22}(\mathbb{R})$ è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Dimostrare che le tre matrici A, A^{-1}, I sono linearmente dipendenti e dire quali di esse sono combinazione lineari delle altre.

Calcoliamo A^{-1}*:*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) R_2 \to R_2 - R_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) R_1 \to R_1 - R_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Scriviamo una combinazione lineare nulla di A, A^{-1}, I*:*

$aA + bA^{-1} + cI =$

$$= \begin{pmatrix} a & a \\ a & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b & -b \\ -b & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b+c & a-b \\ a-b & 2a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui $\begin{cases} a+2b+c = 0 \\ a-b = 0 \\ 2a+b+c = 0 \end{cases}$. *Il sistema lineare ha* ∞^1 *soluzioni* $(a\ ,\ a\ ,\ -3a)$*, quindi per esempio*

$$A + A^{-1} - 3I = 0$$

Questa è una relazione di lineare dipendenza. Dato che ciascuna delle tre matrici si può ricavare da questa relazione, allora ognuna di esse è combinazione lineare delle altre.

---

2. Nell'IR-spazio vettoriale $M_{33}(\mathbb{R})$ è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Dimostrare che le tre matrici A, A^{-1}, I sono linearmente dipendenti e dire quali di esse sono combinazione lineari delle altre.

Calcoliamo A^{-1}*:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \qquad \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - 2R_3 \\ R_1 \to R_1 + 2R_2 \end{array}$$

Pertanto A^{-1} *coincide con* A*, quindi la relazione di lineare dipendenza tra le tre matrici è*

$$A - A^{-1} + 0 \cdot I = 0$$

Quindi A *e* A^{-1} *sono ciascuna combinazione lineare dell'altra, mentre* I *non può essere loro combinazione lineare.*