Compiti

Compito di Matematica 3
6 novembre 2003
Parte di Geometria. Testo composto da due pagine. Rispondere alle domande su questi fogli usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

$\boxed{\mathcal{A}}$ Dati i sistemi lineari $Ax = b$ e $Ax = b_1$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b_1 = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 2.9 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Verificare che le soluzioni dei due sistemi lineari sono rispettivamente $x = (0\,,\,1\,,\,0)$ e $x_1 = (0.3\,,\,0.6\,,\,0.1)$
2. Usare questi dati per dare una stima inferiore di $\mathrm{cond}_2(A)$
3. Usare i dati anche per dare una stima inferiore di $\mathrm{cond}_1(A)$
4. Verificare che $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e quindi calcolare esplicitamente $\mathrm{cond}_1(A)$.

$\boxed{\mathcal{B}}$ Nello spazio vettoriale $C^\infty[1,2]$ dotato del prodotto scalare usuale (coll'integrale).

1. Calcolare una base ortonormale per il sottospazio $W = L\{1/x, x\}$
2. Calcolare la proiezione ortogonale $p(x)$ della funzione $f(x) = x^2$ su W.
3. Dire cosa significa il fatto che $p(x)$ è il vettore di W con la minima distanza da $f(x)$.
4. Sia $f(x) \in C^\infty[1,2]$ una funzione e $p(x)$ la sua proiezione su W, Dimostrare che, se almeno uno tra $\displaystyle\int_1^2 f(x)x\,dx$ e $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx$ è non nullo, allora $\displaystyle\int_1^2 f(x)p(x)dx > 0$.

Consiglio: partire dalla funzione $1/x$ per calcolare la base

---

Compito di Matematica 3
17 novembre 2004
Parte di Geometria. Testo composto da due pagine. Rispondere alle domande su questi fogli usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

$\boxed{\mathcal{A}}$ Data la matrice 10×10 A $\qquad A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1/2 \end{pmatrix}$

$\boxed{1}$ 1. Verificare che $-1/2$ è un autovalore con molteplicità 9.

$\boxed{1}$ 2. Verificare che $(1, 1, \ldots, 1)$ è autovettore e calcolare il relativo autovalore.

$\boxed{4}$ 3. Sia $b = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)^T$. Osserviamo che se $x = \left(-\frac{18}{19}, \frac{20}{19}, -\frac{18}{19}, \ldots, \frac{20}{19}\right)$, allora $Ax = b$.
Sostituiamo b con $b_1 = (1 \pm \delta, 0 \pm \delta, \ldots, 0 \pm \delta)^T$ con $\mid \delta \mid < 0.1$.
Usando la norma -2, dare una stima per ε tale che $Ax_\varepsilon = b_1$ se $x_\varepsilon = \left(-\frac{18}{19} \pm \varepsilon\,, \frac{20}{19} \pm \varepsilon\,, \ldots, \frac{20}{19} \pm \varepsilon\right)$

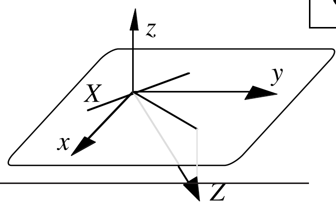
$\boxed{5}$ $\boxed{\mathcal{B}}$ In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare euclideo usuale sia $W = L\{(2, 1, -1, 0)\,,\,(0, 1, 1, 2)\}$.

1. Scrivere la matrice P di proiezione su W.
2. Posto $w = (1, 1, 1, 1)$, calcolare w_1 sua proiezione su W e confrontare $\parallel w \parallel$ con $\parallel w_1 \parallel$.

$\boxed{5}$ $\boxed{\mathcal{C}}$ Nell'$\mathbb{R}-$spazio vettoriale $C^0[0,1]$ dotato del prodotto scalare usuale (coll'integrale), determinare la proiezione ortogonale $p(x)$ della funzione $f(x) = 3x + 1$ sul sottospazio $L\{5x - 3\,,\,\sqrt{x}\}$.

Compito di Matematica 3
10 novembre 2005
Parte di Geometria. Testo composto da due pagine. Rispondere alle domande su questi fogli usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

$\boxed{5}$ $\boxed{\mathcal{A}}$ Data la matrice 3×3 A forniamo i seguenti dati: $\qquad A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$
Il massimo autovalore in modulo è 12.08 circa
Il sistema $Ax = b$ con $b = [3 \quad 1 \quad 4]^T$ ha la soluzione $[1 \quad -1 \quad 0]^T$
Il sistema $Ax = b$ con $b = [3 \quad 1.2 \quad 4]^T$ ha la soluzione $[2.08 \quad -2.52 \quad 0.48]$
Dedurne una valutazione per il minimo autovalore in modulo di A.



$\boxed{5}$ $\boxed{\mathcal{B}}$ Determinare tutti i sistemi di assi ortogonali X, Y, Z tali che Z abbia la direzione del vettore $(1, 1, -1)$ e X giaccia sul piano xy
Scrivere poi le matrici ortogonali di passaggio.

$\boxed{6}$ $\boxed{\mathcal{B}}$ In $C^{\infty}([1, 2])$ dotato del prodotto scalare usuale (con l'integrale) siano:

$f_1 = ax^2 + 1 \qquad f_2 = 1/x.$

1. Determinare a in modo che f_1 e f_2 siano ortogonali.
2. Calcolare la proiezione ortogonale di $g = 1$ (funzione costante) su $W = L\{f_1, f_2\}$
3. Senza svolgere i conti (troppo lunghi), scrivere una formula per la distanza tra g e W.

Esami 2004

Esame di Matematica 3
14 gennaio 2004

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

$\boxed{3}$ $\boxed{\mathcal{A}}$ Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ è dato il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle_s$ così definito:
Se $v, v_1 \in \mathbb{R}^2$ (vettori colonna), allora $\langle v, v_1\rangle := v^T \cdot A \cdot v_1$ dove $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

1. Dire perché $\langle\ ,\ \rangle_s$ è un prodotto scalare.
2. Determinare una base ortonormale per $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{3}$ $\boxed{\mathcal{B}}$ Data la quadrica $Q : x^2 + xy + z = 0$

1. Dire cosa è l'intersezione tra Q e i tre seguenti piani: $\alpha : x + y = 0 \quad \beta : x - y = 0 \quad \gamma : z = 0$.
2. Dire per esclusione, dalle tre sezioni studiate, che quadrica è Q.
3. Scrivere i cilindri non degeneri con generatrici paralleli agli assi coordinati contenenti la conica intersezione tra Q e β.

$\boxed{5}$ $\boxed{\mathcal{C}}$ Data la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

1. Calcolare $\mathrm{cond}_2(A)$.
2. Calcolare $\mathrm{cond}_2(A + kI)$ e $\mathrm{cond}_2(A^n)$ per ogni $k \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in$ $(n \neq 0)$
3. Determinare l'unico $k \in \mathbb{R}$ e gli unici $n \in$ per cui rispettivamente $\mathrm{cond}_2(A + kI)$ e $\mathrm{cond}_2(A^n)$ sono minimi.

Esame di Matematica 3
3 febbraio 2004

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

$\boxed{3}$ $\boxed{\mathcal{A}}$ Nello spazio vettoriale $C^{\infty}[1, 2]$ dotato del prodotto scalare usuale (coll'integrale), determinare una base ortogonale per il sottospazio $W = L\{1/x^2, 1/x^3\}$

$\boxed{4}$ $\boxed{\mathcal{B}}$ È data l'ellisse di centro $(0, 2, 0)$ di vertici $V_{1,2}(\pm 1, 2, 0)$ e $V_{3,4}(0, 2, \pm 4)$. Sono poi date le due rette $\begin{cases} y = \pm 2x \\ z = 0 \end{cases}$ che intersecano l'ellisse in $V_{1,2}$.

1. Scrivere una rappresentazione cartesiana per l'ellisse.
2. Scrivere il cono quadrico contenente le due rette e l'ellisse.

$\boxed{4}$ $\boxed{\mathcal{C}}$ La matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -4 & -3 \\ 6 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ ha gli autovalori $7.2395 \quad 9.2783 \quad 0.0556 \quad -8.5733$.

1. Calcolare $\mathrm{cond}_2(A)$.
2. Il sistema lineare $Ax = [8\ 1\ 1\ 5]^T$ ha la soluzione esatta $[3.7500 \quad -3.2500 \quad 5.5000 \quad -3.7500]^T$
   Dare (senza calcolarla esplicitamente) una stima per la soluzione di $Ax = [8.1 \quad 0.9 \quad 1.1 \quad 4.9]^T$

Esame di Matematica 3
17 febbraio 2004

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

4 $\boxed{\mathcal{A}}$ Nello spazio vettoriale $C^\infty[-1,1]$ dotato del prodotto scalare usuale (coll'integrale), determinare la proiezioni $p_1(x)$ e $p_2(x)$ rispettivamente di $\sin(x)$ e di $\cos(x)$ sul sottospazio $W = L\{x, x^2\}$ e dire quale problema di minimo risolvono p_1 e p_2.

---

4 $\boxed{\mathcal{B}}$

1. Dire che quadrica è $kz^2 + 2z + 4x^2 - y^2 = 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.
2. Dire per quali k la sua intersezione col piano $x = 2y$ è degenere e scrivere le rette che la compongono.

3 $\boxed{\mathcal{C}}$ È data la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcolare $\mathrm{cond}_1(A)$ e $\mathrm{cond}_2(A)$ per ogni $k \neq 0$
2. Risolvere per $k = 1$ il sistema lineare $Ax = [2\ 1\ 1]^T$ e stimare la soluzione di $Ax = [1.9 \quad 0.9 \quad 0.9]^T$

Esame di Matematica 3
26 aprile 2004

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

$\boxed{\mathcal{A}}$

1. Determinare una rappresentazione cartesiana per le due circonferenze di asse $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$ e rispettivamente di raggio 1 e centro $C_1(1,0,0)$ e raggio 2 e centro $C_2(1,2,2)$
2. Scrivere una rappresentazione cartesiana per l'iperboloide a una falda avente γ_1 come cerchio di gola e contenente γ_2.

$\boxed{\mathcal{B}}$ Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ è dato il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle_s$ così definito:
se $v, v_1 \in \mathbb{R}^2$ (vettori colonna), allora $\langle v, v_1 \rangle := v^T \cdot A \cdot v_1$

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ $\langle\ ,\ \rangle_s$ è un prodotto scalare.
2. Scelto uno di questi k, determinare una base ortonormale per $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\mathcal{C}}$ È data la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & * \\ -2/3 & 1/3 & * \\ 2/3 & * & * \end{pmatrix}$$

1. Completare A a matrice ortogonale simmetrica.
2. Dedurre dalle proprietà di A quali sono i suoi autovalori.
3. Calcolare $\mathrm{cond}_2(A + kI)$ per ogni $k \neq 0$

Esame di Matematica 3
4 giugno 2004

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

È data la matrice reale simmetrica $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

1. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ associata da A è definita positiva.
2. Scelto uno di questi k ($k \neq 0$), determinare una base ortonormale per $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare $\langle v, w \rangle_s = v^T A\, w$ (vettori colonna).
   (Sugg: Iniziare con la base canonica, ma non nel solito ordine. . .)
3. Discutere $\mathrm{cond}_2(A)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

---

4. Posto $k = 1$, descrivere l'insieme $q = \{v \in \mathbb{R}^3 : \| v \| = 1\}$ determinandone anche almeno un asse di simmetria.
5. Sempre per $k = 1$, descrivere l'insieme $q \cap \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, (1,-1,0) \rangle = \alpha\}$ dicendo se esiste un α per cui è costituito da un solo vettore. (stavolta prodotto scalare euclideo)

Esame di Matematica 3
5 luglio 2004

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

$\boxed{\mathcal{A}}$ Nello spazio vettoriale $C^\infty[-\pi,\pi]$ dotato del prodotto scalare usuale (coll'integrale), determinare la distanza del vettore $f = 1 + 2x$ dal sottospazio $W = L\{\sin(x), \cos(x)\}$

$\boxed{\mathcal{B}}$ Gli autovalori della matrice $A \cdot A^T$ sono (all'incirca)

$0.0022\ ,\ 2.4175\ ,\ 18.8818\ ,\ 91.6986$

La soluzione del sistema $Ax = (1\ ,\ 4\ ,\ 4\ ,\ 4)^T$ è $x_1 = (2/3\ ,\ -2/3\ ,\ -1\ ,\ 2)^T$

Senza calcolarla, dare una stima per la soluzione di $Ax = (1.1\ ,\ 4\ ,\ 3.9\ ,\ 4)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathcal{C}}$ Nello spazio in cui è stabilito un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche $Oxyz$

1. Determinare una rappresentazione cartesiana per l'ellisse di centro $C(1,1,1)$ e assi $\{y = 1\ ;\ z = 1\}$, $\{x = 1\ ;\ z + y = 2\}$. Il primo semiasse (quello orizzontale) di lunghezza 2, il secondo di lunghezza $\sqrt{2}$.
2. Determinare una rappresentazione cartesiana per il paraboloide ellittico di vertice $V(1,0,0)$ (e asse la retta $\overline{CV}$) contenente l'ellisse.

Esame di Matematica 3
15 settembre 2004

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

$\boxed{\mathcal{A}}$ Nello spazio vettoriale $C^\infty[1,2]$ dotato del prodotto scalare usuale (coll'integrale), verificare la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz per le due funzioni $f_1 = \dfrac{ax^2+b}{x}$ e $f_2 = 1/x$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ e dire per quali a, b la diseguaglianza è stretta o massima.

$\boxed{\mathcal{B}}$ Data la matrice simmetrica A dipendente dal parametro k

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcolare $\mathrm{cond}_2(A)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, nei casi in cui è possibile, discutendo per quali k è massima o minima.

---

2. Data la matrice A per $k = -1$ e $\underline{x} = [x\ y\ z]^T$, discutere la quadrica $\underline{x}^T A\, \underline{x} = 2y + \lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Determinare un λ per cui la quadrica sia un iperboloide a una falda di rotazione e determinare l'asse di rotazione.
4. Per questo λ scrivere il cerchio di gola dell'iperboloide e scrivere una rotazione di coordinate che porti la circonferenza sul piano $Z = 1$.