Spazi vettoriali

01. a. Scriviamo $a(1,1,0)+b(0,1,1)+c(1,2,1)=(0,0,0)$. Allora si ottiene l'eguaglianza $(a+c\,,\ a+b+2c\,,\ b+c)=(0,0,0)$ da cui $\{a+c=0\ ,\ a+b+2c=0\ ,\ b+c=0\}$. Risolvendo il sistema lineare in a,b,c, si scopre che ha soluzioni non banali tra cui $a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=-1$, quindi:

    $1(1,1,0)+1(0,1,1)-1(1,2,1)=(0,0,0)$

    b. $1(1,2,3)-2(4,5,6)+1(7,8,9)=(0,0,0)$

    c. $1(1,0,0)+1(2,3,0)-3(1,1,0)=(0,0,0)$

    d. $\pi(1,\pi,0)+0(10^{45},\pi,2)-1(\pi,\pi^2,0)=(0,0,0)$

    Un'altra combinazione lineare si ottiene per esempio raddoppiando i coefficienti.

02. Scriviamo $(1,2,0)=a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(1,1,0)$.
Si ricava: $(1,2,0)=(a+c\,,\ b+c\,,\ 0)$ da cui il sistema lineare in a,b,c:
$\{1=a+c\ ;\ 2=b+c\}$ che ha ∞^1 soluzioni, tra le quali: $\{a=1\ ;\ b=2\ ;\ c=0\}$ da cui:
$(1,2,0)=1(1,0,0)+2(0,1,0)+0(1,1,0)$
Un'altra soluzione è $\{a=0\ ;\ b=1\ ;\ c=1\}$ da cui:
$(1,2,0)=0(1,0,0)+1(0,1,0)+1(1,1,0)$

03. I tre sono vettori sono linearmente indipendenti in quanto la matrice formata dalle loro coordinate ha determinante diverso da 0. Essendo tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$, essi ne costituiscono una base. Pertanto $(1,1,1)$ può esprimersi in un solo modo come loro combinazione lineare. Scriviamo $(1,1,1)=a(1,1,0)+b(0,1,1)+c(1,0,1)$. Si ricava: $\{1=a+c; 1=a+b; 1=b+c\}$. Il sistema ha un'unica soluzione: $\{a=1/2, b=1/2, c=1/2\}$, quindi:
$(1,1,1)=1/2(1,1,0)+1/2(0,1,1)+1/2(1,0,1)$

04. Dall'eguaglianza $(1,2,1)=-(1,0,1)+2(1,1,1)$ si ricava che ciascuno dei primi tre è combinazione lineare dei rimanenti:

    $(1,2,1)=-(1,0,1)+2(1,1,1)+0(0,1,2)$
    $(1,0,1)=-(1,2,1)+2(1,1,1)+0(0,1,2)$
    $(1,1,1)=1/2(1,2,1)+1/2(1,0,1)+0(0,1,2)$

    Ma $(0,1,2)$ non lo è perché se fosse $x(1,2,1)+y(1,0,1)+z(1,1,1)=(0,1,2)$, si ricaverebbe: $\{x+y+z=0\ ;\ 2x+z=1\ ;\ x+y+z=2\}$ e questo sistema 3×3 non ha soluzioni.

    Altro modo: la matrice a lato ha caratteristica 3, ma l'unico minore 3×3 ricavabile dalle prime tre colonne ha determinante 0, per cui $(0,1,2)$ non è combinazione lineare dei rimanenti.

    $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

05. a. Se fosse $a(1,0,0)+b(0,1,1)+c(0,0,1)=(0,0,0)$, allora si avrebbe: $(a\ ,\ b\ ,\ b+c)=(0,0,0)$ da cui $a=b=c=0$.

    b. Analogo ad a., oppure perché la matrice a lato ha determinante diverso da 0.

    $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    c. Ovvio: è diverso da 0.

    d. Ovvio: non sono proporzionali.

    e. Ovvio: non sono proporzionali.

    f. Se $a\begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,2 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 2\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}$, allora $\begin{pmatrix} b+2c & 0 \\ a+c & a+2b+c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}$ cioè $b+2c=0\ ;\ a+c=0\ ;\ a+2b+c=0$ da cui $a=b=c=0$.

    g. Se $a\cdot 1+b(x+1)+c(x^2+1)=0$, allora $(a+b+c)+b\cdot x+c\cdot x^2=0$. Ma questa è un'eguaglianza di polinomi, che quindi può essere vera solo se tutti i coefficienti sono nulli, cioè solo se $a=b=c=0$.

    h. Se $a\cdot 3+b\cdot\sin(x)+c\cdot\cos(x)=0$, allora, dato che questa è un'eguaglianza di funzioni, la funzione a primo membro deve valere ovunque 0. In particolare vale 0 se $x=0$ da cui $3a+c=0$, vale 0 se $x=\pi/2$ da cui $3a+b=0$ e vale 0 se $x=\pi$ da cui $3a-c=0$. Dalle tre eguaglianze in a,b,c si deduce $a=b=c=0$.

06. a. È già base.

b. È già base.

c. Per esempio $(0,1,1),(1,0,0),(0,1,0)$

d. Per esempio $(0,1,1),(0,7,i),(1,0,0)$

e. Per esempio $(i,0),(0,i)$ (è già base)

f. Per esempio $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Nei casi g. e h. lo spazio non ha dimensione finita.

07. Per esempio $u = \frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}(u-v) + 0 \cdot v = 1(u+v) + 0(u-v) - 1 \cdot v$.

08. a. No: per esempio $(1,0),(0,1)$ stanno in V, ma la loro somma no.

b. No: per esempio $(1,0,0)$ sta in V, ma $\sqrt{2}(1,0,0)$ no.

c. Sì: se $P(x), Q(x) \in V$, allora $P(1) = P(0)$ e $Q(1) = Q(0)$, quindi, per definizione di somma di funzioni e di prodotto di una funzione per uno scalare: $(P+Q)(0) = (P+Q)(1)$ e $\lambda P(1) = \lambda P(0)$, pertanto $(P+Q)(x) \in V$ e $\lambda P(x) \in V$, quindi V è sottospazio.

d. Sì, è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo.

e. No: per esempio $(1,1),(2,4)$ stanno in V, ma la loro somma no.

f. No: Per esempio $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ stanno in V, ma la loro somma no.

g. Sì: se $P'(1) = 0$ e $Q'(1) = 0$, per le proprietà delle derivate $(P+Q)'(1) = 0$ e $(\lambda P)'(1) = 0$.

h. No: x^2 e $1 - x^2$ stanno in V, ma la loro somma no.

09. Per a. e b. non ha senso. Per c. non è possibile perché non ha dimensione finita.

d. Le soluzioni sono $(3z - t \ , \ z - t/3 \ , \ z \ , \ t)$. I vettori del sottospazio si scrivono quindi come: $z(3,1,1,0) + t(-1,-1/3,0,1)$. Quindi i due vettori $(3,1,1,0), (-1,-1/3,0,1)$ sono generatori. Inoltre sono linearmente indipendenti (sono due e non sono proporzionali). Quindi costituiscono una base.

Non ha senso per e. , f. e h. . Non è possibile per g. perché non ha dimensione finita.

10. Le verifiche del fatto che sono sottospazi sono di routine. A titolo di esempio proviamo che le matrici simmetriche formano sottospazio:

Se A e B sono simmetriche, allora $a_{ij} = a_{ji}$ e $b_{ij} = b_{ji}$ per ogni i, j. Quindi dato che l'elemento (i,j)-esimo di $A+B$ è $a_{ij} + b_{ij}$ si ha $a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$ e $A+B$ è simmetrica. Analogamente per λA. Esempi di basi sono:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. Si osservi che nelle matrici antisimmetriche la diagonale principale è nulla. Basi per i sottospazi sono per esempio:

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d. Diamo esempi di basi solo per le triangolari superiori (le altre sono analoghe)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11. a. Se fosse $a(u-v)+b(u+v)+c(v+w)=0$ allora $(a+b)u+(-a+b+c)v+cw=0$ e dato che u,v,w sono linearmente indipendenti allora $(a+b)=(-a+b+c)=c=0$ da cui $a=b=c=0$.

    b. Per ipotesi è possibile scrivere $au+bv+cw=0$ (con a,b,c non tutti nulli). Allora cerchiamo x,y,z tali che $x(u-v)+y(u+v)+z(v+w)=0$ cioè $(x+y)u+(-x+y+z)v+zw=0$. Possiamo scegliere $x+y=a$; $-x+y+z=b$; $z=c$ cioè $x=(a-b+c)/2$, $y=(a+b-c)/2$, $z=c$ e dato che a,b,c sono non tutti nulli, si vede che anche x,y,z sono non tutti nulli.

    c. Per ipotesi ogni vettore $z \in V$ si può scrivere come $z=au+bv+cw$; con conto simile al precedente si trova: $z=((a-b+c)/2)(u-v)+((a+b-c)/2)(u+v)+c(v+w)$.

    d. Per ipotesi è possibile scrivere $au+bv+cw=0$ con a,b,c non tutti nulli. Allora $c \neq 0$ (altrimenti si avrebbe $au+bv=0$ con a,b non tutti nulli). Pertanto $w=(-a/c)u+(-b/c)v$.

    e. Controesempio: $u \neq 0$ qualunque, $v=2u$ e w lin. indip. con u. Chiaramente w non è combinazione lineare di u e v.

12. Vediamo se è possibile trovare x e y non entrambi nulli tali che $x(au+bv)+y(cu+dv)=0$, cioè $(xa+yc)u+(xb+yd)v=0$. Poiché u,v sono linearmente indipendenti, ciò è possibile se e solo se $\begin{cases} xa+yc &= 0 \\ xb+yd &= 0 \end{cases}$ cioè se e solo se il sistema omogeneo ha soluzioni non banali cioè se e solo se $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=0$. Quindi sono linearmente dipendenti se e solo se $ad-bc=0$.

13. Scriviamo $v=a(1,1,0)+b(0,2,1)+c(0,0,2)$. Allora $(1,2,1)=(a,a+2b,b+2c)$ cioè: $\{1=a\ ;\ 2=a+2b\ ;\ 1=b+2c\}$. Risolvendo il sistema lineare si trova: $a=1$; $b=1/2$; $c=1/4$. Quindi $v_{\mathcal{B}}$ è la matrice a lato. Esiste poi certamente un vettore di coordinate $[1,2,3]^T$ ed è ovviamente: $v=1(1,1,0)+2(0,2,1)+3(0,0,2)=(1,5,8)$.
$$v_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

14. Dovrà essere $(1,2,1)=v_1+v_2+v_3$ e $(0,1,1)=v_2+v_3$. Da cui $v_1=(1,1,0)$ e $v_2+v_3=(0,1,1)$. Ogni base che soddisfi queste condizioni va bene, per esempio la base $(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)$.

15. I tre vettori sono linearmente dipendenti dato che $-(1,1,0)+(1,3,2)=2(0,1,1)$. Quindi, per ottenere una base basta usare il metodo degli scarti successivi. Per esempio scartando il terzo si ottengono due vettori linearmente indipendenti e quindi $(1,1,0),(1,3,2)$ è una base. Analogamente un'altra base è $(1,1,0),(0,1,1)$.

16. • Il sistema che definisce V_1 ha ∞^1 soluzioni che sono $((3/2)z\ ,\ -(3/2)z\ ,\ z)$ $(z \in \mathbb{R})$. Quindi $\dim(V_1)=1$ e una base per V_1 è per esempio $(3,-3,2)$. Un sistema di generatori che non sia base è per esempio il seguente: $(3,-3,2),(6,-6,4)$.

    • Il sistema che definisce V_2 ha ∞^2 soluzioni che sono $(-2y+z\ ,\ y\ ,\ z)$ $(y,z \in \mathbb{R})$. Quindi $\dim(V_2)=2$ e una base per V_2 è per esempio $(2,-1,0),(1,0,1)$; un sistema di generatori che non sia base è per esempio il seguente: $(2,-1,0),(1,0,1),(1,1,3)$.

17. Si può completare la successione usando vettori della base canonica, per esempio:
$(1,0,-1,1),(2,0,1,-1),(1,0,0,0),(0,1,0,0)$ o anche
$(1,0,-1,1),(2,0,1,-1),(0,1,0,0),(0,0,0,1)$ ma non nei seguenti modi:
$(1,0,-1,1),(2,0,1,-1),(1,0,0,0),(0,0,1,0)$
$(1,0,-1,1),(2,0,1,-1),(1,0,0,0),(0,1,0,0)$ perché i quattro vettori sono linearmente dipendenti.

18. V ha dimensione 3 perché 3 è la caratteristica della matrice dei quattro vettori che lo generano. Dato che il terzo vettore è somma dei primi due, è possibile estrarre una base per V eliminando il primo o il secondo o il terzo vettore, ma non il quarto.

19. Dato che i tre vettori che generano V sono linearmente indipendenti, un modo di verificare le appartenenze a V è quello di controllare se è nullo il determinante della matrice delle coordinate dei tre vettori che generano V e del vettore in questione e si verifica che:
$v \in V \qquad w \notin V \qquad u \notin V$

20. a. I due vettori che generano V soddisfano entrambi l'equazione omogenea $x+y+z=t$, quindi ogni vettore di V (che è loro combinazione lineare) la soddisfa.

b. I tre vettori che generano W ne sono anche una base (sono linearmente indipendenti). Il determinante della matrice formata da $(3,0,2,1)$ e dalle coordinate dei tre vettori di W è nullo, per cui $(3,0,2,1)$ sta in W. Analogamente è nullo il determinante della matrice formata da $(2,2,3,1)$ e dalle coordinate dei tre vettori di W per cui anche $(2,2,3,1) \in W$. Questo basta ad assicurare che $V \subset W$.

c. Una base per V è per esempio $(1,-1,0,0),(0,2,-2,-1)$. Dopo si procede esattamente come in b.

21. d. Per esempio basta osservare che $(0,-1,1,1) \in V$, ma $(0,-1,1,1) \notin W$ (dato che non è nullo il determinante della matrice formata da $(0,-1,1,1)$ e dalle coordinate dei tre vettori di W).

22. V è sottospazio perché, se $A_1, A_2 \in V$, allora $A_1B = BA_1$ e $A_2B = BA_2$ da cui facilmente $(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)B = B(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)$ cioè $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in V$.

    Si pone $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e si vede che $A \in V$ se e solo se $a = b + d$ e $2c = 3b$. Questo è un sistema lineare con ∞^2 soluzioni dipendenti da b e d. Due soluzioni linearmente indipendenti si trovano per esempio ponendo successivamente $b = 0$, $d = 1$, e $b = 1$, $d = 0$. In questo modo si trovano due matrici linearmente indipendenti: I, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3/2 & 0 \end{pmatrix}$ che quindi formano una base per V.

    Dato che $\dim(V) = 2$ si vede che un'altra base è I, B^{-1} (due matrici linearmente indipendenti che stanno ovviamente in V).

23. V è sottospazio perché, se $A_1, A_2 \in V$, allora $A_1B = D_1$ e $A_2B = D_2$ (D_1 e D_2 diagonali) da cui $(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)B = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ che è sempre diagonale cioè $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in V$. Procedendo come nell'esercizio precedente, si trova $b = 2a$ e $c = -3d$. Una base per V è quindi per esempio $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.