Spazi vettoriali

01. Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che sono linearmente dipendenti le seguenti terne di vettori e scrivere per ogni terna due combinazioni lineari nulle a coefficienti non tutti nulli dei tre vettori:

    a. $(1,1,0)\,,\,(0,1,1)\,,\,(1,2,1)$
    b. $(1,2,3)\,,\,(4,5,6)\,,\,(7,8,9)$
    c. $(1,0,0)\,,\,(2,3,0)\,,\,(1,1,0)$
    d. $(1,\pi,0)\,,\,(10^{45},\pi,2)\,,\,(\pi,\pi^2,0)$

02. Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Esprimere se possibile $(1,2,0)$ come combinazione lineare dei vettori $(1,0,0)\,,\,(0,1,0)\,,\,(1,1,0)$ in due modi diversi.

03. Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Esprimere se possibile $(1,1,1)$ come combinazione lineare dei vettori $(1,1,0)\,,\,(0,1,1)\,,\,(1,0,1)$ in due modi diversi.

04. Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Dati i vettori $(1,2,1)\,,\,(1,0,1)\,,\,(1,1,1)\,,\,(0,1,2)$, dire quali dei quattro sono combinazione lineare dei rimanenti.

05. Provare che sono linearmente indipendenti le seguenti successioni di vettori:

a. $(1,0,0),(0,1,1),(0,0,1)$	in $\mathbb{R}^3$	($\mathbb{R}$-spazio)
b. $(1,1,1),(2,1,0,),(5,0,0)$	in $\mathbb{R}^3$	($\mathbb{R}$-spazio)
c. $(0,1,1)$	in $\mathbb{R}^3$	($\mathbb{R}$-spazio)
d. $(0,1,1)\,,\,(0,7,i)$	in $\mathbb{C}^3$	($\mathbb{C}$-spazio)
e. $(i,0)\,,\,(0,i)$	in $\mathbb{C}^2$	($\mathbb{C}$-spazio)
f. $\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$	in $M_{22}(\mathbb{R})$	($\mathbb{R}$-spazio)
g. $1\,,\,x+1\,,\,x^2+1$	in $\mathbb{R}[x]$	($\mathbb{R}$-spazio)
h. $3\,,\,\sin(x)\,,\,\cos(x)$	in $C^0(\mathbb{R})$	($\mathbb{R}$-spazio)

06. Nei casi dell'esercizio precedente in cui lo spazio è di dimensione finita, completare a base le successioni di vettori linearmente indipendenti

07. Siano u,v vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Esprimere in due modi distinti u come combinazione lineare di $u+v\,,\,u-v\,,\,v$.

08. Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sotto-$\mathbb{R}$-spazi vettoriali ?

a. $V=\{(x,y):xy=0\}$	in $\mathbb{R}^2$
b. $V=\{(x,y,z):x\in\mathbb{Q}\}$	in $\mathbb{R}^3$
c. $V=\{P(x):P(1)=P(0)\}$	in $\mathbb{R}[x]$
d. $V=\{(x,y,z,t):x=3y=3z-t\}$	in $\mathbb{R}^4$
e. $V=\{(x,y,z):x^2=y\}$	in $\mathbb{R}^3$
f. $V=\{A:\det(A)=0\}$	in $M_{22}(\mathbb{R})$
g. $V=\{P(x):P'(1)=0\}$	in $\mathbb{R}[x]$
h. $V=\{P(x):\deg(P)=2\}$	in $\mathbb{R}[x]$

09. Nei casi in cui è possibile, determinare una base dei sottospazi dell'esercizio precedente.

10. Ricordiamo che nell' $\mathbb{R}$-spazio $M_{nn}(\mathbb{R})$ si ha:

    a. A è simmetrica se $a_{ij}=a_{ji}$ per ogni i,j.
    b. A è antisimmetrica se $a_{ij}=-a_{ji}$ per ogni i,j.
    c. A è diagonale se $a_{ij}=0$ per ogni $i\neq j$.
    d. A è triangolare superiore (inferiore) se $a_{ij}=0$ per $i>j$ $(i<j)$.

    Provare che le matrici simmetriche etc. costituiscono sottospazi. Per $n=2$ e per $n=3$ determinare basi dei sottospazi.

11. Siano u,v,w vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Provare che:

    a. Se u,v,w sono linearmente indipendenti anche $u-v\,,\,u+v\,,\,v+w$ lo sono.
    b. Se u,v,w sono linearmente dipendenti anche $u-v\,,\,u+v\,,\,v+w$ lo sono.

c. Se u, v, w generano V anche $u - v$, $u + v$, $v + w$ lo generano.

d. Se u, v, w sono vettori linearmente dipendenti e u, v sono linearmente indipendenti, allora w è combinazione lineare di u e v.

e. Mostrare con un controesempio che, se u, v, w sono vettori linearmente dipendenti e anche u, v sono linearmente dipendenti, non è detto che w sia combinazione lineare di u e v.

12. Siano u e v vettori linearmente indipendenti in un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Per quali $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ i vettori $au + bv$, $cu + dv$ sono linearmente indipendenti ?

13. In $\mathbb{R}^3$. Sia $\mathcal{B} : (1,1,0), (0,2,1), (0,0,2)$ base. Scrivere $v_{\mathcal{B}}$ dove $v = (1,2,1)$. Esiste v tale che $v_{\mathcal{B}} = [1\ 2\ 3]^T$?

14. In $\mathbb{R}^3$. Trovare una base $\mathcal{B}$ rispetto alla quale $v(1,2,1)$ abbia coordinate $[1\ 1\ 1]^T$ e $w = (0,1,1)$ abbia coordinate $[0\ 1\ 1]^T$.

15. Determinare due diverse basi per il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $(1,1,0), (1,3,2), (0,1,1)$.

16. Siano $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 2x - 3z = 0\}$ e $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Determinare una base e un sistema di generatori che non sia base per ciascuno di essi.

17. Scrivere due differenti basi di $\mathbb{R}^4$ comprendenti i vettori $(1,0,-1,1), (2,0,1,-1)$.

18. In $\mathbb{R}^4$. Sia $V = L\{(1,2,0,1), (0,0,1,-2), (1,2,1,-1), (1,1,0,0)\}$; quante basi per V si possono estrarre dal sistema di generatori dato ?

19. Sia $V = L\{(1,2,0,1), (0,0,2,1), (1,1,2,0)\}$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Dire quali dei vettori seguenti stanno in V: $v(0,1,0,2), w(0,1,0,1), u(1,-1,-1,0)$.

20. In $\mathbb{R}^4$. Provare che $V \subset W$ nei seguenti casi:

a. $V = L\{(0,1,1,2), (0,2,0,2)\}$ $\quad W = \{(x, y, z, t) : x + y + z = t\}$

b. $V = L\{(3,0,2,1), (2,2,3,1)\}$ $\quad W = L\{(0,1,1,0), (1,1,1,1), (1,0,1,0)\}$

c. $V = \{(x, y, z, t) : x + y + z = z - 2t = 0\}$ $\quad W = L\{(1,-1,0,0), (0,0,2,1), (3,-1,2,1)\}$

21. Provare che $V \not\subset W$ nel seguente caso:

d. $V = \{(x, y, z, t) : x + y + z = z - t = 0\}$ $\quad W = L\{(1,-1,0,0), (0,0,2,1), (3,-1,2,1)\}$

22. In $M_{22}(\mathbb{R})$. Sia $V = \{A : A \cdot B = B \cdot A\}$ (B matrice fissata). Provare che V è sottospazio e trovarne una base nel caso in cui B sia la matrice a lato. $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

23. Come l'es. precedente, ma con $V = \{A : A \cdot B \text{ sia diagonale}\}$.