NOME ______________________ COGNOME ______________________

Compito di Geometria - Corsi: Gestionale e Logistica e della Produzione - 1 dicembre 1999

Testo composto di due fogli (quattro pagine). Rispondere alle seguenti domande su questi fogli usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

$\boxed{\mathcal{A}}$ Dato il seguente sottoinsieme dell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $M_{22}(\mathbb{R})$:

$$W = \left\{ A \in M_{22}(\mathbb{R}) \ : \ A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ è una matrice diagonale} \right\}$$

1. Dire perché W è un sottospazio vettoriale.

Le matrici di W sono le matrici $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tali che $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & x-3y \\ z+2t & z-3t \end{pmatrix}$ sia diagonale, quindi sono le matrici $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tali che $x - 3y = 0$ e $z + 2t = 0$.
Quindi W è un sottospazio dato che è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

---

2. Scrivere <u>tutte</u> le matrici di W e dire se in W ci sono matrici diagonali.

Le soluzioni del sistema omogeneo sono $\begin{cases} x = 3y \\ z = -2t \end{cases}$
Quindi possiamo scrivere tutte le matrici di W: $\begin{pmatrix} 3y & y \\ -2t & t \end{pmatrix}$.
È evidente che si hanno matrici diagonali solo per $y = 0$ e $t = 0$, quindi l'unica matrice diagonale in W è quella nulla.

---

3. Determinare una base $\mathcal{B}$ per W.

Le matrici di W si possono scrivere come $\begin{pmatrix} 3y & y \\ -2t & t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
Quindi le due matrici $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ costituiscono un sistema di generatori per W.
Dato che sono linearmente indipendenti (sono due e non proporzionali), allora costituiscono anche una base per W.

---

4. Completare la base $\mathcal{B}$ di W a base di $M_{22}(\mathbb{R})$.

Basta aggiungere due vettori della base "canonica" di $M_{22}(\mathbb{R})$, per esempio $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
I quattro vettori sono linearmente indipendenti perché la matrice delle loro coordinate
$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *ha determinante diverso da 0.*
Com'è noto, quattro vettori linearmente indipendenti nello spazio $M_{22}(\mathbb{R})$ che ha dimensione 4, costituiscono una base di $M_{22}(\mathbb{R})$.

$\boxed{\mathcal{B}}$ È data l'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associata tramite la base canonica alla matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare una base per $\ker(f)$

Basta risolvere il sistema omogeneo associato ad A:

$$\begin{cases} 2x & = 0 \\ -3x & = 0 \\ 2x + y + 2z - t & = 0 \\ 2x + y + t & = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x & = 0 \\ y + 2z - t & = 0 \\ y + t & = 0 \end{cases} \quad E_3 \to E_3 - E_2 \begin{cases} x & = 0 \\ y + 2z - t & = 0 \\ -2z + 2t & = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi ∞^1 e sono $(0\ ,\ -t\ ,\ t\ ,\ t)$.
I vettori del nucleo sono pertanto tutti e soli i multipli di $(0, -1, 1, 1)$ che ne costituisce una base.

---

2. Determinare una base per $\mathrm{Im}\,(f)$.

Si ha: $\qquad \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\ker(f)) = 3$
Un sistema di generatori per l'immagine si può ricavare dalle colonne di A ed è costituito dai seguenti quattro vettori:

$(2, -3, 2, 2)\ ,\ (0, 0, 1, 1)\ ,\ (0, 0, 2, 0)\ ,\ (0, 0, -1, 1)$

Dato che $\mathrm{Im}\,(f)$ ha dimensione 3, occore scartarne uno, per esempio $(0, 0, -1, 1)$ che è la differenza tra il terzo e il secondo. Quindi una base per $\mathrm{Im}\,(f)$ è

$(2, -3, 2, 2)\ ,\ (0, 0, 1, 1)\ ,\ (0, 0, 2, 0)$

---

3. Dire quali dei seguenti vettori della base canonica appartengono a $\mathrm{Im}\,(f)$

$$v_1 = (1, 0, 0, 0) \qquad v_4 = (0, 0, 0, 1)$$

Vediamo se esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $a(2, -3, 2, 2) + b(0, 0, 1, 1) + c(0, 0, 2, 0) = (1, 0, 0, 0)$, cioè tali che abbia soluzioni il sistema lineare 4×3 associato alla matrice seguente

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Evidentemente il sistema non ha soluzioni perché le prime due equazioni sono $2a = 1$ e $-3a = 0$.
Quindi $v_1 \notin \mathrm{Im}\,(f)$

Analogamente vediamo se ha soluzioni il sistema lineare associato alla matrice seguente

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Eliminando le prima equazione proporzionale alla seconda si ottiene un sistema 3×3. La sua matrice dei coefficienti ha determinante diverso da 0 e il sistema ha una soluzione.
Quindi $v_4 \in \mathrm{Im}\,(f)$

NOME ______________________ COGNOME ______________________

Compito di Geometria - Corsi: Gestionale e Logistica e della Produzione - 1 dicembre 1999

CONTINUA CON I DATI DI PAGINA 2

4. Dire perché f è semplice e determinare una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per f.

Calcoliamo gli autovalori di A:

$$\det\begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -x & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2-x & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = (2-x)(-x)(2-x)(1-x)$$

Gli autovalori sono quindi: $\begin{cases} \lambda_1 = 2 & \textit{molteplicità: } 2 \quad 1 \leq \dim(V_2) \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \dim(V_2) = 1,2 \\ \lambda_2 = 0 & \textit{molteplicità: } 1 \quad 1 \leq \dim(V_0) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \dim(V_0) = 1 \\ \lambda_3 = 1 & \textit{molteplicità: } 1 \quad 1 \leq \dim(V_1) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \dim(V_1) = 1 \end{cases}$

Per dimostrare che f è semplice occorre verificare che $\dim(V_2) = 2$.

Calcoliamo le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$ che riduciamo subito:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textit{Eliminiamo} \\ R_1 \textit{ e } R_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} R_2 \to R_2 + 2/3 R_1 \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono ∞^2 e sono $(2t, -3t, z, t)$ che si scrivono anche come:
$t(2,-3,0,1) + z(0,0,1,0)$*, quindi i due vettori* $(2,-3,0,1)$, $(0,0,1,0)$ *costituiscono una base per V_2 che ha dimensione 2.*

Possiamo ora concludere che f è semplice.

Per quanto riguarda $\lambda_2 = 0$, una base per V_0 è già stata trovata, dato che $V_0 = \ker(f)$.
La base è $(0,-1,1,1)$.

Per quanto riguarda $\lambda_3 = 1$, occorrono le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$ che devono essere ∞^1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 + 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - 2R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_4 \to R_4 + R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono ora evidenti e sono $(0,0,t,t)$. Una base per V_1 è quindi $(0,0,1,1)$.
Una base di autovettori è pertanto:

$$(2,-3,0,1)\ ,\ (0,0,1,0)\ ,\ (0,-1,1,1)\ ,\ (0,0,1,1)$$

---

5. Scrivere due matrici 4×4: P invertibile e D diagonale, tali che $P^{-1}AP = D$ (non è necessario il calcolo di P^{-1}).

P e D si ricavano immediatamente dal problema precedente e sono:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathcal{C}}$

1. Dire perché esiste un'unica applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa simultaneamente le tre condizioni a lato.

$$\varphi(1,1,1) = (0,1,0)$$
$$\varphi(0,1,0) = (0,0,0)$$
$$\varphi(0,1,1) = (0,2,2)$$

Esiste un'unica applicazione lineare che soddisfa le tre condizioni perchè i tre vettori $(1,1,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$ *costituiscono una base di* $\mathbb{R}^3$*, dato che*

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

2. Per questa φ calcolare la matrice associata tramite la base canonica.

Calcoliamo:

$\varphi(1,0,0) = \varphi((1,1,1)-(0,1,1)) = \varphi(1,1,1) - \varphi(0,1,1) = (0,1,0) - (0,2,2) = (0,-1,-2)$

$\varphi(0,1,0) = (0,0,0)$ *(già noto)*

$\varphi(0,0,1) = \varphi((0,1,1)-(0,1,0)) = \varphi(0,1,1) - \varphi(0,1,0) = (0,2,2) - (0,0,0) = (0,2,2)$

Quindi la matrice φ*:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Dire perché φ non è semplice.

Calcoliamo gli autovalori di A*:*

$$\det(A - xI) = \det\begin{pmatrix} -x & 0 & 0 \\ -1 & -x & 2 \\ -2 & 0 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)x^2$$

Quindi 0 *è autovalore di molteplicità* 2*, ma* A *ha caratteristica* 2*, dato che le due ultime righe sono linearmente indipendenti, quindi* $\dim(V_0) = \dim(\ker\varphi) = 1$*, pertanto* φ *non è semplice.*