Sistemi e matrici

ALGORITMO GAUSSIANO

01. Usando l'algoritmo di Gauss dire se hanno soluzioni reali e, in caso affermativo, risolvere i seguenti sistemi (il numero delle incognite è scritto a lato della graffa):
Nei sistemi c. e f., scivere le soluzioni in tutti i modi possibili, cioè con tutte le possibili scelte delle incognite non pivotali.

a. $\underset{3}{}\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ x-y+2z &= 0 \\ -3x+y-3z &= -1 \end{cases}$ b. $\underset{4}{}\begin{cases} x+y-z+t = 1 \\ x-3y+z = 0 \\ -x+y+t = 1 \end{cases}$ c. $\underset{4}{}\begin{cases} y-z+2t = 1 \\ 2y-2z = 0 \\ -y+z+2tz = 1 \end{cases}$

d. $\underset{3}{}\begin{cases} 5y-z &= -1 \\ x-3y &= 1 \\ 2x-y-z &= 1 \\ 3x+y-2z &= -1 \end{cases}$ e. $\underset{5}{}\begin{cases} x+y = 2 \\ 3x-y = 0 \\ z+t = 6 \\ t+u = 7 \end{cases}$ f. $\underset{4}{}\begin{cases} z+2t = 1 \\ x+2y+t = 2 \\ 2x+4y-z = 3 \end{cases}$

02. Mediante l'algoritmo gaussiano, stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ hanno soluzioni i sistemi lineari seguenti e, in caso affermativo dire quante sono:

a. $\underset{3}{}\begin{cases} 2x+y-z = 1 \\ x-y+z = 0 \\ x+2y-2z = k \end{cases}$ b. $\underset{3}{}\begin{cases} x+2y-z = 1 \\ x-3y = 0 \\ 2x-y+z = k^2 \end{cases}$ c. $\underset{3}{}\begin{cases} x+2y+z = 1 \\ y-z = 1 \\ x+k^2+2z = k+k^2 \end{cases}$

03. Per ognuno dei tre sistemi lineari a lato nelle incognite x, y, z, t dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$, assegnati mediante la loro matrice completa:
- Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ il sistema è ridotto e in caso contrario determinare un sistema ridotto equivalente al dato.
- Dire, per ogni $k \in \mathbb{R}$ se il sistema ha soluzioni e quante.
- Determinare, quando possibile, tutte le soluzioni.

a. $\left(\begin{array}{cccc|c} k^2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & k^2-1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k+1 & k^2-1 & 0 \end{array}\right)$

b. $\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 2 & 1 & 0 \\ k & 1 & k+3 & k+3 & 1 \\ k & 1 & 2 & k^2 & 1+k \\ 0 & 0 & k+1 & k+2 & 1 \end{array}\right)$

c. $\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & k-1 & k^2-4 & k & 1 \end{array}\right)$

04. Mediante la riduzione gaussiana o altre serie di operazioni elementari, stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ hanno soluzioni i sistemi lineari seguenti e, in caso affermativo dire quante sono:

a. $\underset{2}{}\begin{cases} kx-y = 1 \\ x-4ky = 2 \end{cases}$ b. $\underset{3}{}\begin{cases} kx+y-z = 1 \\ kx-y+kz = -1 \end{cases}$ c. $\underset{2}{}\begin{cases} kx+2ky = k \\ kx+y = 1-k \end{cases}$

d. $\underset{2}{}\begin{cases} kx+y = -1 \\ (1+k)x+y = k \\ (3-k)x = 2k-1 \end{cases}$ e. $\underset{3}{}\begin{cases} kx+y = 1 \\ 2x+(k+1)y+z = 1 \\ kx+3y+z = 4 \end{cases}$ f. $\underset{3}{}\begin{cases} kx-y+(k+1)z = 0 \\ -x+ky = 1 \\ (k-1)y+2z = 1 \\ x-y+(k-1)z = -k \end{cases}$

05. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ hanno soluzioni diverse dalla banale e quante soluzioni hanno i sistemi omogenei seguenti:

a. $\underset{3}{}\begin{cases} kx+y = 0 \\ x+z = 0 \\ x+ky-2z = 0 \end{cases}$ b. $\underset{4}{}\begin{cases} kx+y+z+t = 0 \\ x-y+t = 0 \\ 2x+z+t = 0 \\ kx+3y+2z = 0 \end{cases}$ c. $\underset{7}{}\begin{cases} x-ky+z+t-2u+v+w = 0 \\ kx-y+z+t-2u+v+w = 0 \end{cases}$

06. Per ogni coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ dire quante soluzioni ha il sistema a lato, dipendente da $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} ab & 1 & 0 & 1 \\ 0 & b+1 & 0 & 1 \\ 0 & b+1 & a(b-1) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

Determinare un $a \in \mathbb{R}$ per il quale il sistema ha soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$ e un $a \in \mathbb{R}$ per il quale il sistema <u>non</u> ha soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$.

MATRICI

11. Completare la tabella seguente dicendo quali prodotti tra le matrici seguenti sono possibili. In caso affermativo eseguirli.

1⁰ fattore \ 2⁰ fattore	A	B	C	D	E	F
A	no	no				
B	sì	sì				
C						
D						
E						
F						

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$F = (0\ 1\ -1)$$

12. Siano A, B, C matrici quadrate dello stesso ordine. Dire quali di queste affermazioni sono vere (e perché) e quali false (mostrando un controesempio).

a. $A \cdot B = B \cdot A$
b. Se $A \cdot B = 0$, allora ($A = 0$ oppure $B = 0$)
c. Se $A \cdot B = B$, allora $A = I$
d. $A + B + C = C + B + A$
e. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
f. Se $A \cdot B = A \cdot C$, allora $B = C$
g. Se $A + B = A + C$, allora $B = C$
h. $(A + B)^T = A^T + B^T$
i. $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A$
j. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
k. $A^2 \cdot B^2 = (A \cdot B)^2$
l. Se $A = A^2$, allora $A = 0$ oppure $A = I$
m. Se $A^2 = 0$, allora $A = 0$
n. Se $A^2 = I$, allora A è invertibile
o. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
p. $A^2 - I = (A + I)(A - I)$

13. Come l'esercizio precedente supponendo inoltre che esistano A^{-1} e B^{-1}:

a. $A \cdot B$ è invertibile
b. $A + B$ è invertibile
c. Se $A \cdot B = A \cdot C$, allora $B = C$
d. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
e. $A^{-1} \cdot B \cdot A = B$
f. $(A^{-1}BA)^5 = A^{-5}B^5A^5$
g. $(A^{-1}BA)^5 = A^{-1}B^5A$
h. $A \cdot B^{-1} \neq 0$
i. Se $AB = C$, allora $B = CA^{-1}$
j. Se $A^2 = I$, allora $A = \pm I$

14. Siano A, B matrici reali 4×4. Dire in quali casi è possibile dare condizioni su A e B affinché le equazioni matriciali seguenti abbiano sicuramente soluzione X e, in questo caso scrivere esplicitamente la soluzione.

a. $AX = B$
b. $AX + X = B$
c. $AX + BX = C$
d. $AXA + AXB + B = I$
e. $AX + XB = I$
f. $AXB + X = B$

15. In $M_{22}(\mathbb{R})$: determinare tutte le matrici A tali che $A^2 = 0$.

16. In $M_{22}(\mathbb{R})$: trovare una matrice $A \neq I, 0$ tale che $A^2 = A$ (Suggerimento: cercare A diagonale).

17. Siano $A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$. Dimostrare che:

a. Se $A \cdot B = 0$ e $B \neq 0$ allora A non è invertibile.
b. Se A non è invertibile, esiste una matrice B non nulla tale che $A \cdot B = 0$.

18. Calcolare l'inversa di ciascuna delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

19. Siano A, B matrici reali $n \times n$, A invertibile. Dire quali di queste affermazioni sono vere (e perché) e quali false (mostrando un controesempio).

a. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
b. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
c. $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
d. $\det(A^{-1} \cdot B \cdot A) = \det(B)$
e. $\det(A^2) = (\det(A))^2$
f. $\det(-A) = -\det(A)$

20. Calcolare il determinante di ciascuna delle seguenti matrici:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&1&1&2&1&0\\0&0&2&0&5&0\\0&0&7&0&0&0\\4&1&3&2&2&5\\0&1&4&0&1&0\\0&1&1&4&3&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&2&3&0&0&0\\3&4&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&2&3\\0&0&0&4&5&6\\0&0&0&3&2&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&2&3&7&8&9\\1&0&9&9&9&5\\0&0&1&2&9&8\\0&0&1&3&9&7\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&12&12&13&96\\1&12&12&13&87\\3&-3&9&0&81\\7&8&-2&9&65\\1&-1&3&1&9\end{pmatrix}$$

21. a. Scrivere la matrice di permutazione P tale che per ogni matrice $A\in M_{33}(\mathbb{R})$, $P\cdot A$ abbia le stesse righe di A, ma permutate ciclicamente verso il basso (cioè nell'ordine r_3, r_1, r_2)

b. Che matrice è $A\cdot P$?

SISTEMI LINEARI

31. Determinare, usando fin quando possibile la strategia della pivotizzazione parziale, per quali $a\in\mathbb{R}$ ha soluzioni e quante il sistema lineare 4×4 nelle incognite x,y,z,t.

$$\begin{pmatrix}3&0&1&1\\0&4&1&1\\1&1&a&1\\2&0&1&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\a\end{pmatrix}$$

32. Discutere, usando ogni volta il metodo che si ritiene più opportuno, il numero di soluzioni dei sistemi lineari seguenti al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$.

a. $_3\begin{cases}x+y+az=2a-1\\x+ay+z=a\\ax+y+z=1\end{cases}$ b. $_2\begin{cases}ax+y=-1\\2x+(1+a)y=2\\(2-a^2)x+y=a+2\end{cases}$ c. $_3\begin{cases}(a^2-a+1)x-2y=1\\x-2y+(a^2-a)z=a\end{cases}$

d. $_2\begin{cases}2x+ay=1\\y=a\\2x+(a-1)y=-1\\ax+3y=a+1\end{cases}$ e. $_3\begin{cases}(a+1)x+4y-(1+a)z=1\\a^2x+(a+1)y-az=1\\-ax+(1-3a)y+a^2z=1\end{cases}$ f. $_3\begin{cases}ax-y+z=-a\\-x+ay-z=1\\(a-2)x+\\\quad+(2a-1)y-z=a^2\end{cases}$

g. $_4\begin{cases}y+z+t=1\\ax+z+at=2\\x-y+2az=0\\x+2z+t=1\end{cases}$ h. $_3\begin{cases}(a-1)x+y+z=0\\2y+z=0\\(a-1)x+ay+2z=2a\\4x+(a-2)z=0\end{cases}$ i. $_3\begin{cases}ax+(2a+1)y+az=1\\x+y-z=0\\(a+1)y+2az=a\\ax+ay-az=a\end{cases}$

33. Discutere, usando opportunamente i metodi noti, il numero di soluzioni dei sistemi lineari seguenti al variare dei parametri $a,b\in\mathbb{R}$ e schematizzare la situazione in un piano cartesiano di coordinate a,b.

a. $_3\begin{cases}x+2y-2z=1\\x-y-z=b\\-4x+ay+4z=2\end{cases}$ b. $_2\begin{cases}x+ay=1\\-x+2y=0\\2x+by=1\end{cases}$ c. $_3\begin{cases}ax+by-z=1\\-x+by=1\\2x+by-2z=1\end{cases}$

d. $_3\begin{cases}ax+y+z=a\\x+2y+z=0\\bx+az=a\\(a-1)x-y=a\end{cases}$ e. $_3\begin{cases}ax+y+bz=b\\ax+y+z=2\\by+z=0\end{cases}$

34. Costruire un sistema lineare a tre equazioni e tre incognite avente tra le soluzioni le tre terne $(0,1,0),(1,0,1),(0,0,0)$.

CARATTERISTICA

41. Scrivere, se possibile, due matrici 4×4 A,B di caratteristica 3, A avente un solo minore 3×3 non nullo e B avente due soli minori 3×3 non nulli.

42. Discutere la caratteristica delle due matrici al variare di $k\in\mathbb{R}$ e dire per quali k la 4^a colonna è combinazione lineare delle altre tre e per quali k la combinazione è unica.

$$A\begin{pmatrix}k&2&3&1\\0&k&1&1\\k&0&k&-k\\-k&2&1&3k\end{pmatrix}\quad B\begin{pmatrix}0&k+2&0&1\\-1&0&1&k+1\\k+1&2&-1&0\\-1&2&k+1&2\end{pmatrix}$$

43. a. Scrivere una matrice $M \in M_{44}(\mathbb{R})$ di caratteristica 3 nella quale ogni riga sia combinazione lineare delle altre.

b. Scrivere una matrice $N \in M_{44}(\mathbb{R})$ di caratteristica 3 nella quale la prima riga non sia combinazione lineare delle altre.

44. Per ciascuna delle 5 colonne C_i della matrice A dire se C_i è combinazione lineare delle rimenenti (se sì dire qual è, se no dire perché no).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

45. a. Sia $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$.di caratteristica $\varrho(A) = p$. Dimostrare che per ogni i con $0 \le i \le \varrho(A)$ esiste una matrice $B_i \in M_{nn}$ tale che $\varrho(A \cdot B_i) = i$.

b. Se B è una matrice invertibile quanto valgono $\varrho(A \cdot B)$ e $\varrho(B \cdot A)$?

46. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Trovare P, Q matrici invertibili tali che $P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esistono P e Q qualunque tali che $P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? E tali che $P \cdot A \cdot Q = 0$?

FATTORIZZAZIONE LU

51. In ognuno dei sguenti casi, sia A la matrice indicata.

a. Determinare due matrici: L triangolare inferiore e U triangolare superiore, tali che $A = LU$. Risolvere mediante la fattorizzazione determinata il sistema $Ax = b$ con $b = [2\ 0\ 0\ 4]^T$

b. Determinare tre matrici: P di permutazione (prodotto di matrici elementari di scambio), L triangolare inferiore e U triangolare superiore, tali che $PA = LU$.

c. Determinare tre matrici: P di permutazione (prodotto di matrici elementari di scambio), L triangolare inferiore e U triangolare superiore, tali che $PA = LU$, in modo corrispondente a una pivotizzazione parziale di A. Risolvere mediante la fattorizzazione determinata il sistema $Ax = b$ con $b = [1\ 3\ 2]^T$

d. Determinare tre matrici: P di permutazione (prodotto di matrici elementari di scambio), L triangolare inferiore e U triangolare superiore, tali che $PA = LU$, in modo corrispondente a una pivotizzazione parziale di A.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

52. Data la matrice $A \in M_{33}(\mathbb{R})$, al variare di $a \in \mathbb{R}$:

a. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la matrice A ammette una fattorizzazione LU e per quali è invece possibile solo una fattorizzazione $PA = LU$.

b. Determinare una fattorizzazione $A = LU$ o, se non è possibile, $PA = LU$ per $a = -1$ e per $a = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

53. Calcolare il numero di operazioni aritmetiche necessarie a ridurre per righe la matrice $n \times n$ tridiagonale T.

$$T = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & & & 0 \\ \cdots & \cdots & & & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & & & & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}$$