

Sistemi e matrici : Risposte

Premessa: Uso dei simboli $[,]$ e $[\pm]$.

Questi simboli di uso corrente possono significare la congiunzione logica “e” o la congiunzione logica “o” a seconda delle circostanze. Per esempio:

- La scrittura $k = 0, 1$ significa: $k = 0$ oppure $k = 1$.
- La scrittura $k \neq 0, 1$ significa: $k \neq 0$ e $k \neq 1$.
- La scrittura $k = \pm 1$ significa: $k = -1$ oppure $k = 1$.
- La scrittura $k \neq \pm 1$ significa: $k \neq -1$ e $k \neq 1$.

01. a. Scriviamo la matrice, usiamo come pivot per la prima incognita il numero incorniciato e riduciamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 3R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{array} \right)$$

L'ultima equazione è proporzionale alla seconda e può essere eliminata. Il sistema è ridotto, ha due pivot e quindi ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale z .

Per determinarle, riduciamo totalmente la matrice:

$$R_2 \rightarrow -1/2 R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad R_1 \rightarrow R_1 - R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Il sistema è: } \begin{cases} x + z/2 = 1/2 \\ y - (3/2)z = 1/2 \end{cases} \text{ da cui le soluzioni: } \left(\frac{1-z}{2}, \frac{1+3z}{2}, z \right) (z \in \mathbb{R})$$

01. b. Scriviamo la matrice, usiamo come pivot per la prima incognita il numero incorniciato e riduciamo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 + (1/2)R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3/2} & 3/2 \end{array} \right)$$

Il sistema è ridotto, ha i 3 pivot incorniciati e quindi ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale z .

Riduciamo totalmente iniziando con $R_3 \rightarrow 2/3 R_3$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 + R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-4} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow (-1/4)R_2 \\ R_1 \rightarrow R_1 - R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \right)$$

Pertanto le soluzioni sono: $\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2}, z, 1 \right)$

01. c. La matrice dei coefficienti è una matrice 3×4 e, dato che l'incognita x ha tutti i coefficienti nulli, la riduciamo usando come primo pivot a_{22} :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{Eliminando l'ultima riga,} \end{array}$$

proporzionale alla seconda, il sistema è ridotto con due pivot ed ha quindi ∞^2 soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali x e z . Si ricavano subito $t = 1/2$ e la y in funzione di z . Le soluzioni sono $(x, z, z, 1/2)$

Evidentemente l'incognita t dev'essere pivotale e, dato che si ha la relazione $y = z$, allora y e z non possono essere contemporaneamente non pivotali. Quindi l'unico altro modo di scrivere le soluzioni del sistema è quello di scegliere come incognite non pivotali x e y e scrivere quindi le soluzioni come $(x, y, y, 1/2)$.

01. d. Scriviamo la matrice del sistema; per ridurla occorre innanzitutto uno scambio di righe perché a_{11} è nullo e non può essere pivot. Possiamo eseguire $R_1 \leftrightarrow R_2$ e poi continuare:

Sistemi e matrici - **Risposte 2.17**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right) R_1 \leftrightarrow R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right) R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \quad R_4 \rightarrow R_4 - 3R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & -2 & -4 \end{array} \right)$$

La seconda e la terza riga sono identiche, la quarta è proporzionale alla seconda, *ma solo per i coefficienti* e non per il termine noto, quindi il sistema non ha soluzioni. D'altra parte con $R_4 \rightarrow R_4 - 2R_2$ si otterrebbe l'equazione $0 = -2$.

01. e. La matrice del sistema si riduce con una sola operazione elementare:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right) R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

La matrice è ridotta con 4 pivot e il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale u . Le soluzioni si ricavano subito e sono: $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, u - 1, 7 - u, u \right)$

01. f. Per ridurre la matrice occorrono uno scambio di righe e un'altra operazione elementare:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right) R_1 \uparrow R_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right) R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

Eliminando l'ultima equazione che è proporzionale alla seconda, il sistema è ridotto, ha due pivot e quindi ha ∞^2 soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali y e t . Le soluzioni si possono quindi scrivere come: $(2 - 2y - t, y, 1 - 2t, t)$.

È possibile usare ogni coppia di incognite, come incognite non pivotali tranne la coppia z, t , dato che si ha la relazione $z = 1 - 2t$. Le soluzioni si possono scrivere quindi in altri 4 modi usando le altre possibili coppie di incognite non pivotali:

$$\left(-2y + \frac{3+z}{2}, y, z, \frac{1-z}{2} \right) \text{ con } y, z \quad \left(x, \frac{2-x-t}{2}, 1-2t, t \right) \text{ con } x, t$$

$$\left(x, \frac{3+z}{4} - \frac{x}{2}, z, \frac{1-z}{2} \right) \text{ con } x, z \quad \left(x, y, -3 + 2x + 4y, 2 - x - 2y \right) \text{ con } x, y$$

02. a. Riduciamo la matrice mediante l'algoritmo gaussiano standard, cosa possibile in quanto nessuno dei coefficienti dipende da k :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & k \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & k - 1/2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & k - 1 \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - (1/2)R_1 \quad R_3 \rightarrow R_3 + R_2$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - (1/2)R_1$$

Risulta subito chiaro che, se $k \neq 1$ il sistema non ha soluzioni, mentre, se $k = 1$, il sistema ha due pivot e quindi ∞^1 soluzioni.

02. b. Riduciamo la matrice mediante l'algoritmo standard di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & k^2 \end{array} \right) R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \quad R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & k^2 - 2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & k^2 - 1 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_2$$

La matrice è ridotta con 3 pivot, qualunque valore assuma il parametro k , quindi il sistema ha sempre una e una sola soluzione.

02. c. Riduciamo la matrice mediante l'algoritmo standard di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & k^2 & 2 & k + k^2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & k^2 - 2 & 1 & k + k^2 - 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k^2 - 1 & k + 1 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \quad R_3 \rightarrow R_3 - (k^2 - 1)R_2$$

Se $k^2 - 1 \neq 0$, se cioè $k \neq \pm 1$, la matrice è ridotta con 3 pivot e il sistema ha quindi una e una sola soluzione.

Sistemi e matrici - **Risposte 3.17**

Se $k = 1$, l'ultima riga è $(0 \ 0 \ 0 \ | \ 2)$, quindi il sistema non ha soluzioni.

Se $k = -1$, l'ultima riga è $(0 \ 0 \ 0 \ | \ 0)$, quindi il sistema è ridotto con due pivot e ha quindi ∞^1 soluzioni.

03. a. Se $k \neq 0, 1, -1$, allora $k, k^2 - 1, k + 1$ sono pivot e il sistema è chiaramente ridotto.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \text{Se } k = 0, \text{ la matrice è} & \text{Se } k = 1, \text{ la matrice è} & \text{Se } k = -1, \text{ la matrice è} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \text{e non è ridotta.} & \text{e non è ridotta.} & \text{ed è ridotta.} \end{array} \right.$$

In conclusione il sistema è ridotto per ogni $k \neq 0, 1$.

Se $k \neq 0, 1, -1$ il sistema è ridotto, non ha un'equazione del tipo $0 = 1$ e ha tre pivot non nulli: $k^2, k^2 - 1, k + 1$, per cui ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale t e si trovano facilmente per sostituzione a partire dall'ultima equazione:

$$\left(\frac{1+t-2kt}{k^2} + \frac{1+(1-k)t}{k^2(k^2-1)}, \frac{-1+(k-1)t}{k^2-1}, (1-k)t, t \right)$$

Se $k = 0$, riducendo con $R_2 \rightarrow R_2 + R_1$ e $R_3 \rightarrow R_3 + R_2$ si ottiene la matrice a lato. Il sistema è ora ridotto, non ha un'equazione del tipo $0 = 1$ e ha due pivot quindi ha ∞^2 soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali x e t e sono: $(x, 1+t, t, t)$

Se $k = 1$, le due ultime equazioni del sistema sono: $\{z = -1; 2z = 0\}$. Il sistema è chiaramente incompatibile e non ha soluzioni.

Se $k = -1$ il sistema è ridotto, ha due pivot, non ha un'equazione del tipo $0 = 1$ per cui ha ∞^2 soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali y e t e sono $(-y - t - 1, y, -1, t)$

Conclusione: Se $k \neq 0, 1, -1$ ∞^1 soluzioni
 Se $k = 0$ o $k = -1$ ∞^2 soluzioni
 Se $k = 1$ nessuna soluzione

03. b. Riduciamo la matrice completa del sistema mediante l'algoritmo di Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 2 & 1 & 0 \\ k & 1 & k+3 & k+3 & 1 \\ k & 1 & 2 & k^2 & 1+k \\ 0 & 0 & k+1 & k+2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-1 & 1+k \\ 0 & 0 & k+1 & k+2 & 1 \end{array} \right)$$

Se eliminiamo R_4 che coincide con R_2 , il sistema è ridotto purché $k \neq 0, k+1 \neq 0, k^2-1 \neq 0$, cioè $k \neq 0, 1, -1$.

Per $k \neq 0, 1, -1$ il sistema ha tre equazioni significative e quindi ∞^1 soluzioni che si possono trovare con le seguenti operazioni:

$R_3 \rightarrow R_3/(k+1)$ (possibile perché $k \neq -1$), da cui $t = 1/(k-1)$. Sostituendo questo valore in R_2 si ottiene: $z = -3/(k^2-1)$. L'incognita y è non pivotale, per cui rimane come parametro

libero. Sostituendo i valori trovati di y, z, t in R_1 si ottiene infine: $x = \frac{-(k^2-1)y + 5 - k}{k(k^2-1)}$.

Quindi le soluzioni per $k \neq 0, 1, -1$ sono: $\left(\frac{-(k^2-1)y + 5 - k}{k(k^2-1)}, y, \frac{-3}{k^2-1}, \frac{1}{k-1} \right)$

Esaminiamo ora i casi particolari:

Se $k = 0$: $\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$ È chiaro che il sistema è ridotto con x incognita non pivotale per cui ci sono ∞^1 soluzioni che si ricavano facilmente: $(x, -5, 3, -1)$.

Se $k = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$ Il sistema è ridotto e, dato che l'ultima equazione è $0 \cdot t = 2$, allora non ha soluzioni.

Se $k = -1$: $\left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ Il sistema è ridotto e ha solo due righe significative, pertanto ha ∞^2 soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali y, z e sono: $(-y - 2z - 1, y, z, 1)$

Sistemi e matrici - **Risposte 4.17**

03. c. Evidentemente, se $k - 1 \neq 0$, il sistema non è ridotto. Mentre se $k = 1$ il sistema lo è.

Un'operazione elementare che si può eseguire per qualunque $k \in \mathbb{R}$ è $R_3 \rightarrow R_3 - (k - 1)R_2$. La matrice completa del sistema è in questo caso quella a lato.

Se i due numeri $k, k^2 - 4$ sono diversi da 0, cioè se $k \neq 0, 2, -2$, la matrice è ridotta con tre pivot: $k, 1, k^2 - 4$.

Quindi per $k \neq 0, 2, -2$ (anche per $k = 1$) il sistema ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale t . Le soluzioni si ricavano facilmente dal sistema ridotto:

$$\begin{cases} kx + y + 2t & = 1 \\ y + 2t & = 0 \\ (k^2 - 4)z + (2 - k)t & = 1 \end{cases} \quad \left(\frac{1}{k}, -2t, \frac{1 - (2 - k)t}{k^2 - 4}, t \right)$$

Sostituendo uno alla volta i tre valori esclusi $k = 0, 2, -2$, si vede subito che il sistema è ridotto anche per $k = 2$ e per $k = -2$, ma non per $k = 0$.

Se $k = 2$ il sistema non ha soluzioni perché l'ultima riga è $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \mid 1)$

Se $k = -2$ la matrice è quella a lato. È ridotta, ha tre pivot e quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale z . Le soluzioni sono immediate e sono: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, z, \frac{1}{4}\right)$

Sostituiamo ora $k = 0$ e continuiamo la riduzione:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array} \mid \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \mid \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right)$$

Il sistema è ora ridotto ed evidentemente non ha soluzioni.

In conclusione: Per $k = 0, 2$ non ha soluzioni, per gli altri k ne ha ∞^1 .

04. a. Scriviamo la matrice. Per ridurla conviene innanzitutto scambiare le due righe in modo da avere un pivot non dipendente da k .

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & -1 & 1 \\ 1 & -4k & 2 \end{array} \right) R_1 \leftrightarrow R_2 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4k & 2 \\ k & -1 & 1 \end{array} \right) R_2 \rightarrow R_2 - kR_1 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4k & 2 \\ 0 & 4k^2 - 1 & 1 - 2k \end{array} \right)$$

Se $4k^2 - 1 \neq 0$, se cioè $k \neq \pm 1/2$, allora la matrice è ridotta e ha due pivot, quindi il sistema ha una soluzione.

Se $k = 1/2$ l'ultima riga è $(0 \ 0 \mid 0)$ e quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale y .

Se $k = -1/2$ l'ultima riga è $(0 \ 0 \mid 2)$ e quindi il sistema non ha soluzioni.

04. b. Scriviamo la matrice. L'operazione $R_2 \rightarrow R_2 - R_1$ si può sempre fare, anche se $k = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 1 \\ k & -1 & k & -1 \end{array} \right) R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & k+1 & -2 \end{array} \right)$$

Se $k \neq 0$ la matrice è ridotta con due pivot e il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale z .

Se $k = 0$ la matrice non è ridotta, ma la si riduce subito con $R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1$. L'ultima riga diventa $(0 \ 0 \ -1 \mid 2)$, quindi la matrice è ridotta con due pivot. Il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni dipendenti però dall'incognita non pivotale x .

In conclusione il sistema ha sempre ∞^1 soluzioni.

04. c. Scriviamo la matrice. L'operazione $R_2 \rightarrow R_2 - R_1$ si può sempre fare, anche se $k = 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & 2k & k \\ k & 1 & 1 - k \end{array} \right) R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \left(\begin{array}{cc|c} k & 2k & k \\ 0 & 1 - 2k & 1 - 2k \end{array} \right)$$

Se $k \neq 0, 1/2$ la matrice è ridotta con due pivot e il sistema ha quindi una soluzione.

Se $k = 0$ il sistema si riduce all'unica equazione $y = 1$ e ha quindi le ∞^1 soluzioni $(x, 1)$.

Se $k = 1/2$ l'ultima equazione è non significativa, il sistema si riduce all'unica equazione $(1/2)x + y = 1/2$ e ha quindi ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale y .

In conclusione il sistema ha ∞^1 soluzioni se $k = 0, 1/2$, altrimenti ne ha una.

Sistemi e matrici - **Risposte 5.17**

05. a. Dato che tutti i coefficienti dell'incognita x dipendono da k , conviene scambiare l'ordine delle incognite in modo da semplificare l'algoritmo gaussiano.

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & 1 & -1 \\ 1+k & 1 & k \\ 3-k & 0 & 2k-1 \end{array} \right) \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & -1 \\ 1 & 1+k & k \\ 0 & 3-k & 2k-1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - (3-k)R_2 \end{array}}$$

La matrice è ridotta con 2 pivot, indipendenti da k , ma a causa dell'ultima equazione, ha soluzioni (ne ha una sola) solo se $k = \pm 2$.

Osserviamo che, dovendola trovare, occorre tener conto che la prima incognita è ora la y e la seconda è la x .

05. b. Anche qui, dato che tutti i coefficienti dell'incognita x dipendono da k , può convenire scambiare l'incognita x con la z . Occorrerà poi scambiare due righe per avere un pivot non nullo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 0 & 1 \\ 2 & k+1 & 1 & 1 \\ k & 3 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & k+1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & k & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 3 & k & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1}$$

Mediante l'operazione elementare $R_3 \rightarrow R_3 - (2-k)R_2$ la matrice diventa quella lato. Dato che l'elemento a_{33} si annulla per $k = 2, -1$, allora:

Se $k \neq 2, -1$ la matrice è ridotta con tre pivot quindi il sistema ha una soluzione.

Se $k = 2$, l'ultima riga diventa $(0 \ 0 \ 0 \ | \ 3)$, e quindi il sistema non ha soluzioni.

Se $k = -1$, l'ultima riga diventa $(0 \ 0 \ 0 \ | \ 0)$, la matrice è ridotta con due pivot e quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale x (e non z , ricordiamo che c'è stato uno scambio di colonne). Conclusione:

Se $k \neq 2, -1$ 1 soluzione Se $k = 2$ nessuna soluzione Se $k = -1$ ∞^1 soluzioni

05. c. Per ridurre la matrice conviene innanzitutto scambiare R_1 con R_2 in modo da avere un pivot non dipendente da k .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & k+1 & 0 \\ -1 & k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & k-1 & -k \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & k & 0 & 1 \\ k & -1 & k+1 & 0 \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & k-1 & -k \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 + kR_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_1 \end{array}}$$

Ora conviene eseguire $R_2 \leftrightarrow R_3$ in modo da semplificare la successiva operazione elementare.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 0 & -1+k^2 & k+1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 & 1-k \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 - (k+1)R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2 \end{array}}$$

A questo punto può non convenire più ridurre del tutto la matrice, ma confrontare invece le ultime due equazioni che si scrivono (se $k \neq -1, 3$): $\left\{ z = \frac{1}{k+1}; z = \frac{-k}{k-3} \right\}$. Perché

ci siano soluzioni quindi è necessario che $\frac{1}{k+1} = \frac{-k}{k-3}$, cioè che $k^2 + 2k - 3 = 0$ ovvero $k = -3, 1$. Se k non è uno di questi due valori, il sistema è comunque senza soluzioni (anche se $k = -1$ o $k = 3$, come si verifica subito). Restano da esaminare i due casi $k = -3, 1$:

Se $k = 1$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente ∞^1 soluzioni. Se $k = -3$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente una soluzione.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right) \quad \left| \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{array} \right)$$

Riassumendo: Se $k \neq 1, -3$ non c'è nessuna soluzione, se $k = 1$ ci sono ∞^1 soluzioni, se $k = -3$ c'è una soluzione.

Sistemi e matrici - **Risposte 6.17**

06. a. Basta ridurre la matrice dei coefficienti, iniziando con uno scambio di righe per evitare che il pivot dipenda da k .

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 0 \\ 1 & k & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & k & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & -3+k^2 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - kR_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{matrix} \quad R_3 \rightarrow R_3 - kR_1$$

I pivot sono due se $k^2 \neq 3$ e sono tre in caso contrario, quindi:

Se $k = \pm\sqrt{3}$ ci sono ∞^1 soluzioni non banali, altrimenti c'è solo la soluzione banale.

b. Riduciamo iniziando con uno scambio di righe per evitare che il pivot dipenda da k .

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ k & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R_1 \\ \downarrow \\ R_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ k & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - kR_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - kR_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+k & 1 & 1-k \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3+k & 2 & -k \end{pmatrix}$$

È possibile proseguire la riduzione, ma si può anche notare che $R_4 = R_2 + R_3$, per cui R_4 può essere eliminata. Dato che ci sono meno di quattro pivot, allora c'è sempre almeno un'incognita non pivotale, quindi il sistema ha sempre almeno ∞^1 soluzioni e quindi anche soluzioni non banali. Per sapere anche quante sono, scambiamo R_2 con R_3 . Si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1+k & 1 & 1-k \end{pmatrix} \quad R_3 \rightarrow R_3 - \frac{1+k}{2} R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & (1-k)/2 & (3-k)/2 \end{pmatrix}$$

Se $k \neq 1$ allora ci sono tre pivot, se $k = 1$ anche, quindi il sistema ha sempre ∞^1 soluzioni.

c. Il sistema ha sempre soluzioni non banali perché non può avere più di due pivot e quindi ci sono almeno 5 incognite non pivotali. Per sapere quante sono riduciamo la matrice con $R_2 \rightarrow R_2 - kR_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ k & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & -k & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1+k^2 & 1-k & 1-k & -2+2k & 1-k & 1-k \end{pmatrix}$$

Se $k^2 \neq 1$, allora ci sono 2 pivot.

Se $k = -1$, ci sono sempre 2 pivot.

Se $k = 1$, la seconda riga è nulla e c'è un'unico pivot.

In conclusione: se $k = 1$ ci sono ∞^6 soluzioni, se $k \neq 1$ ce ne sono ∞^5 .

07. Riduciamo la matrice completa con $R_3 \rightarrow R_3 - R_2$: $\left(\begin{array}{cccc|c} ab & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & b+1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a(b-1) & 0 & b-a \end{array} \right)$

Quindi se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e $b \neq 1$ e $b \neq -1$, il sistema è ridotto con tre pivot e ha una soluzione.

Esaminiamo il caso $a = 0$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & b+1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right)$

A causa dell'ultima equazione il sistema può aver soluzioni solo se $b = 0$. Ma, se $b = 0$, sono incompatibili le prime due. Quindi per $a = 0$ il sistema non ha soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$.

Esaminiamo ora il caso $b = 0$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 0 & -a \end{array} \right)$. Se $a = 1$, le prime due equazioni sono

identiche. Eliminandone una, il sistema è ridotto, con due pivot, quindi ha ∞^2 soluzioni. Se invece $a \neq 1$ le prime due equazioni sono incompatibili e il sistema non ha soluzioni.

Esaminiamo ora il caso $b = 1$: $\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{array} \right)$

Se $a \neq 0$, il sistema è ridotto, ma, a causa dell'ultima equazione, non ha soluzioni, tranne che nel caso $a = 1$, per cui è ridotto con due pivot e ha quindi ∞^2 soluzioni.

Se $a = 0$, non è ridotto, ma, come abbiamo già visto, non ha soluzioni.

Sistemi e matrici - **Risposte 7.17**

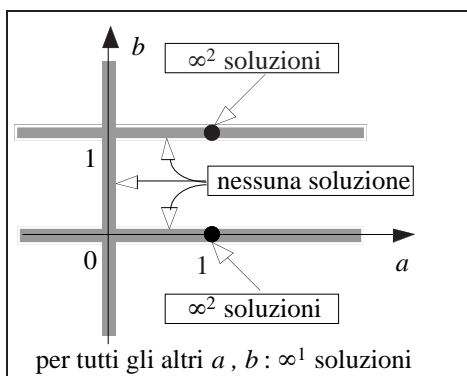
Esaminiamo ora il caso $b = -1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -a & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -2a & 0 & -1-a \end{array} \right)$$

Se $a \neq 0$, con $R_2 \leftrightarrow R_3$ diventa ridotta con tre pivot e il sistema ha perciò ∞^1 soluzioni.

Se $a = 0$, come abbiamo già visto, il sistema non ha soluzioni.

La situazione può essere schematizzata nel disegno al lato nel piano cartesiano $[a, b]$, in cui per ogni coppia di valori (a, b) è segnata la situazione.



Per quanto riguarda l'ultima domanda, come si vede:

- Se $a = 0$ il sistema non ha soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$.
- Se $a = 1$ il sistema ha sempre soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$.

E questi sono gli unici valori di a che soddisfino i criteri richiesti.

11.

	A	B	C	D	E	F
A	no	no	sì	sì	no	no
B	sì	sì	no	no	sì	no
C	no	no	sì	sì	no	no
D	no	no	no	no	no	no
E	no	no	no	no	no	sì
F	sì	sì	no	no	sì	no

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 13 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 13 & 5 & -8 & 1 \end{pmatrix} \quad B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} \quad C \cdot C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C \cdot D = \begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 7 & 9 \\ 9 & 13 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E \cdot F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$F \cdot A = (-3 \quad 1 \quad 5 \quad 1) \quad F \cdot B = (-5 \quad 1 \quad -1) \quad F \cdot E = (-2)$$

12. a. Falso. Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b. Falso. Controesempio: A e B come in a.

c. Falso. Controesempio: Se $A \cdot B = B$, allora $A \cdot B - B = 0$ che si può scrivere $A \cdot B - I \cdot B = 0$ cioè $(A - I) \cdot B = 0$. Basta quindi determinare due matrici non nulle il cui prodotto sia 0. Per esempio quelle di a.

$$\text{Scegliamo quindi } A - I = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ cioè } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Allora $A \cdot B = B$ e ovviamente A non è la matrice identica.

d. Vero. Come è noto, la somma è commutativa.

e. Vero. È la distributività del prodotto rispetto alla somma.

f. Falso. Controesempio: A e B come in a. e $C = 0$.

g. Vero. Basta aggiungere $-A$ ad entrambi i membri dell'equazione.

h. Vero. È una semplice verifica immediata.

i. Vero. Infatti: $A \cdot A^2 = A \cdot (A \cdot A) = (A \cdot A) \cdot A = A^2 \cdot A$.

j. Falso. Controesempio: A e B come in a., dato che $(A + B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$ e $A \cdot B \neq B \cdot A$.

k. Falso. Dato che $(A \cdot B)^2 = A \cdot B \cdot A \cdot B = A \cdot (B \cdot A) \cdot B$, mentre $A^2 B^2 = A \cdot A \cdot B \cdot B = A \cdot (A \cdot B) \cdot B$. Occorre quindi scegliere due matrici A e B tali che $A \cdot B \neq B \cdot A$. Le due matrici del caso a, però non vanno bene, perché $A \cdot B = 0$ e quindi si ha l'identità. Però scambiandole e scegliendo quindi le due matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ si ha, come si verifica eseguendo i prodotti, un controesempio.

l. Falso. Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- m. Falso. Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- n. Vero. Infatti, in questo caso A è l'inversa di sé stessa.
- o. Falso. Controesempio: A e B come in a. , dato che $(A+B) \cdot (A-B) = A^2 - A \cdot B + B \cdot A + B^2$ e $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- p. Vero. Infatti $(A+I) \cdot (A-I) = A^2 - A \cdot I + I \cdot A + I^2$ e, diversamente dal caso precedente, A e I commutano.
13. a. Vero. Infatti: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
- b. Falso. Controesempio: $A = I$ e $B = -I$.
- c. Vero. Se infatti $A \cdot B = A \cdot C$, allora $A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot A \cdot C$ da cui $B = C$.
- d. Falso. Per esempio:
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 Allora: $(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- e. Falso. Controesempio: A e B come in d.
- f. Falso. Si ha:

$$(A^{-1}BA)^5 = \overbrace{(A^{-1}BA) \cdots (A^{-1}BA)}^{5 \text{ volte}} = A^{-1}B(A \cdot A^{-1})B(A \cdot A^{-1}) \cdots BA = A^{-1}BB \cdots BA = A^{-1}B^5A$$
 Se fosse $(A^{-1}BA)^5 = A^{-5}B^5A^5$ si avrebbe quindi $A^{-1}B^5A = A^{-5}B^5A^5$. Moltiplicando a sinistra per A^5 e a destra per A^{-1} si ottiene:
 $A^5 \cdot A^{-1}B^5 \cdot A \cdot A^{-1} = A^5 \cdot A^{-5} \cdot B^5 \cdot A^5 \cdot A^{-1}$ da cui $A^4 \cdot B^5 = B^5 A^4$.
 Per avere un controesempio, bastano quindi due matrici A e B tali che A^4 e B^5 non commutino, per esempio A e B come in d.
- g. Vero. Per la dimostrazione confronta f.
- h. Vero. Infatti A e B^{-1} sono invertibili e il prodotto di matrici invertibili è invertibile.
- i. Falso. Come controesempio scegliamo A e B come in d. e poniamo $C = A \cdot B$. Allora si ha che $B = A^{-1} \cdot C$, mentre $C \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot A^{-1}$ che è diversa da B .
- j. Falso. Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
14. a. Se A è invertibile, si possono moltiplicare entrambi i membri dell'equazione a sinistra per A^{-1} e si ottiene:
 $A^{-1}AX = A^{-1}B$, da cui $X = A^{-1} \cdot B$
 Se A non è invertibile non si può dire niente sulla risolubilità o meno dell'equazione, senza conoscere A e B .
- b. Raccogliamo X a destra del primo membro: $(A+I) \cdot X = B$. Se $A+I$ è invertibile, si può moltiplicare l'equazione a sinistra per $(A+I)^{-1}$ e si ottiene: $X = (A+I)^{-1}B$
 Se $A+I$ non è invertibile non si può dire niente sulla risolubilità o meno dell'equazione, senza conoscere A e B .
- c. Raccogliamo X a destra del primo membro: $(A+B) \cdot X = C$. Se $A+B$ è invertibile, si può moltiplicare l'equazione a sinistra per $(A+B)^{-1}$ e si ottiene: $X = (A+B)^{-1}C$
 Se $A+B$ non è invertibile non si può dire niente sulla risolubilità o meno dell'equazione, senza conoscere A, B e C .
- d. Portiamo B a secondo membro e raccogliamo A a sinistra del primo membro:
 $A \cdot (XA + XB) = I - B$.
 Possiamo ancora raccogliere X a sinistra dell'espressione in parentesi e ottenere
 $A \cdot X \cdot (A+B) = I - B$.
 Se A e $A+B$ sono invertibili, si può moltiplicare l'equazione a sinistra per A^{-1} e a destra per $(A+B)^{-1}$ e ottenere $X = A^{-1}(I-B)(A+B)^{-1}$.
 Se A non è invertibile o $A+B$ non è invertibile non si può dire niente sulla risolubilità o meno dell'equazione, senza conoscere A e B .

Sistemi e matrici - **Risposte 9.17**

e. Sapendo che $A \cdot X + X \cdot B = C$, qualunque tentativo di moltiplicare a destra o a sinistra per A^{-1} o B^{-1} o $(A + B)^{-1}$ non riesce a isolare la matrice X a primo membro, per cui non è possibile dare matricialmente una espressione elementare per X senza conoscere A e B , né dare condizioni affinché l'equazione abbia soluzioni.

f. Anche qui qualunque tentativo di isolare la matrice X a primo membro, fallisce, per cui non è possibile dare matricialmente un'espressione elementare per X senza conoscere A e B .

15. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, allora $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$. La matrice è nulla se, simultaneamente $\{a^2 + bc = 0; ab + bd = 0; ac + dc = 0; bc + d^2 = 0\}$.

Conviene, innanzitutto esaminare la seconda equazione: $(a + d)b = 0$ dalla quale si deducono due possibilità:

- $b = 0$, nel qual caso dalle altre si trova subito $a = 0$ e $d = 0$ (nessuna condizione su c).

Quindi le matrici del tipo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ sono tra quelle cercate.

- $a + d = 0$, nel qual caso dalle altre si trova solo $a^2 + bc = 0$. Quindi anche le matrici del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ con $a^2 + bc = 0$ sono tra quelle cercate.

In definitiva, tenendo presente che tra le matrici del secondo tipo rientrano anche quelle del primo tipo, si conclude sinteticamente che:

Le matrici cercate sono tutte e sole quelle del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ con $a^2 + bc = 0$.

16. Per esempio $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

17. a. Se esistesse A^{-1} si avrebbe $A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot 0$ da cui $B = 0$.

b. Il sistema omogeneo $A \cdot x = 0$ ha almeno una soluzione non nulla b , dato che $\rho(A) < n$. Poniamo quindi $B = (b | b | \dots | b)$. Allora $B \neq 0$ e $A \cdot B = 0$.

18. A Calcoliamo A^{-1} riducendo A e contemporaneamente I mediante l'algoritmo di Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \\ \uparrow \\ R_3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3 \\ R_1 \rightarrow R_1 - 3R_3 \end{array}$$

$$R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

B La matrice B è a blocchi: basta invertire i singoli blocchi con l'algoritmo standard.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & -5/12 & 1/2 & 5/12 \\ 0 & 0 & 5/24 & -1/4 & 7/24 \end{pmatrix}$$

C La matrice C è quasi diagonale. La si riduce a I dividendo ogni riga per l'elemento della diagonale. Per completare la riduzione occorre $R_1 \rightarrow R_1 - 5R_5$. Le stesse operazioni su I forniscono subito l'inversa.

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

D La matrice è antidiagonale. Per ridurla occorre scambiare l'ordine delle righe e dividere ogni riga per il pivot. L'inversa è una matrice antidiagonale però con gli elementi scambiati e invertiti.

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E Matrice anti-a blocchi. Generalizzazione del caso precedente: si invertono e si scambiano i singoli blocchi

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & 5/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -4/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

19. a. Vera. È semplicemente il teorema di Binet.

- b. Falsa. Controesempio: $A = I$ e $B = I$. Allora $\det(A + B) = \det(2I) = 2^n$, mentre $\det(A) + \det(B) = \det(I) + \det(I) = 2$. Se $n \neq 1$ sono diversi.
- c. Vera. Infatti $1 = \det(I) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$ e quindi $1 = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$.
- d. Vera. Infatti $\det(A^{-1} \cdot B \cdot A) = \det(A^{-1}) \cdot \det(B) \cdot \det(A) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(B)$ (è possibile lo scambio perché ora si tratta di numeri e non di matrici). Dato che $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ (vedi problema precedente), si ottiene $\det(B)$.
- e. Vera. Infatti $\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) = (\det(A))^2$.
- f. Falsa. Infatti $-A$ si ottiene moltiplicando ciascuna delle n righe di A per -1 , quindi il suo determinante è il determinante di A moltiplicato per $(-1)^n$. Quindi, se n è pari e $\det(A) \neq 0$, allora $\det(A) = \det(-A)$ e quindi sono differenti. Se però n è dispari l'affermazione è vera.

20. A Si può osservare che $C_1 + C_3 = 2C_2$; questo implica che $\det(A) = 0$

B Sviluppiamo successivamente lungo R_3, R_2, R_3, C_1 :

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 7 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 7 \cdot 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 7 \cdot 5 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 7 \cdot 5 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot 2 = 280$$

C La matrice è a blocchi: il determinante è il prodotto dei determinanti dei singoli blocchi. Dato che il secondo blocco ha determinante nullo, allora $\det(C) = 0$.

D La matrice è triangolare superiore a blocchi: gli elementi sopra i tre blocchi non intervengono nel calcolo del determinante, quindi :

$$\det(D) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 1 \cdot 1 = -2$$

E Basta sottrarre R_2 da R_1 e proseguire:

$$\det(E) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 12 & 12 & 13 & 87 \\ 3 & -3 & 9 & 0 & 81 \\ 7 & 8 & -2 & 9 & 65 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} = 9 \det \begin{pmatrix} 1 & 12 & 12 & 13 \\ 3 & -3 & 9 & 0 \\ 7 & 8 & -2 & 9 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Cerchiamo di} \\ \text{azzerare l'ul-} \\ \text{tima riga:} \end{array} \begin{array}{l} C_1 \rightarrow C_1 - C_4 \\ C_2 \rightarrow C_2 + C_4 \\ C_3 \rightarrow C_3 - 3C_4 \end{array}$$

$$= 9 \cdot \det \begin{pmatrix} -12 & 25 & -27 & 13 \\ 3 & -3 & 9 & 0 \\ -2 & 17 & -29 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 9 \cdot \det \begin{pmatrix} -12 & 25 & -27 \\ 3 & -3 & 9 \\ -2 & 17 & -29 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Cerchiamo di} \\ \text{azzerare la se-} \\ \text{conda riga:} \end{array} \begin{array}{l} C_3 \rightarrow C_3 - 3C_1 \\ C_2 \rightarrow C_2 + C_1 \end{array}$$

$$= 9 \cdot \det \begin{pmatrix} -12 & 13 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 15 & -23 \end{pmatrix} = 9 \cdot (-3) \cdot ((-12) \cdot (-23) - 9 \cdot (-2)) = 11718$$

31. a. Dato che la matrice completa è quadrata, conviene innanzitutto calcolarne il determinante, facilitandoci il compito tramite qualche operazione elementare sulle righe e sulle colonne.

$$\det \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 2 & 1+k & 2 \\ 2-k^2 & 1 & k+2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & 1+k & 3+k \\ 2-k^2 & 1 & 3+k \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ k^2 & k & 0 \\ 2-k^2 & 1 & 3+k \end{pmatrix} =$$

$$\begin{array}{c} C_3 \rightarrow C_3 + C_2 \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_3 \end{array}$$

$$= (3+k) \det \begin{pmatrix} k & 1 \\ k^2 & k \end{pmatrix} = 0. \text{ Quindi il determinante è nullo qualunque sia } k \in \mathbb{R}.$$

In conclusione la matrice completa ha sempre caratteristica minore di 3; occorre quindi esaminare la caratteristica della matrice dei coefficienti:

La sottomatrice formata da R_1, R_2, C_1, C_2 ha determinante $\det \begin{pmatrix} k & 1 \\ 2 & 1+k \end{pmatrix} = k^2 + k - 2$ che si annulla per $k = 1, -2$. Quindi

Se $k \neq 1, -2$, allora $\varrho(A) = 2$ e di conseguenza anche $\varrho(A|b) = 2$ e quindi il sistema ha una soluzione.

Sistemi e matrici - **Risposte** 11.17

Se $k = 1$ o $k = -2$, le ultime due righe sono rispettivamente $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$ e $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$
 Quindi in entrambi i casi il sistema non ha soluzioni.

31. b. Calcoliamo la caratteristica della matrice dei coefficienti iniziando col calcolo del suo determinante.

$$\det \begin{pmatrix} k+1 & 4 & -(1+k) \\ k^2 & k+1 & -k \\ -k & 1-3k & k^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} k+1 & 4 & 0 \\ k^2 & k+1 & k^2-k \\ -k & 1-3k & k^2-k \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} k+1 & 4 & 0 \\ k^2+k & 4k & 0 \\ -k & 1-3k & k^2-k \end{pmatrix}$$

$C_3 \rightarrow C_3 + C_1$ $R_2 \rightarrow R_2 - R_3$

Il determinante è 0 per ogni k . Quindi $\rho(A) \leq 2$ per ogni k .

Può convenire ora calcolare il determinante di una sottomatrice 3×3 della matrice completa per esempio di quello costituito con C_1, C_2, C_4

$$\det \begin{pmatrix} k+1 & 4 & 1 \\ k^2 & k+1 & 1 \\ -k & 1-3k & 1 \end{pmatrix} = k + 2k^2 - 3k^3 \text{ ed è nullo per } k = 0, 1, -1/3.$$

Se $k \neq 0, 1, -1/3$, la matrice completa ha quindi caratteristica 3, mentre quella dei coefficienti ha caratteristica ≤ 2 , per cui il sistema non ha soluzioni.

Se $k = 0$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente ∞^1 soluzioni. | Se $k = 1$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema non ha evidentemente soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left|\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)\right.$$

Se $k = -1/3$ occorre ridurre la matrice dei coefficienti:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2/3 & 4 & -2/3 & 1 \\ 1/9 & 2/3 & 1/3 & 1 \\ 1/3 & 2 & 1/9 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - (1/6)R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - (1/2)R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2/3 & 4 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 4/9 & 5/6 \\ 0 & 0 & 4/9 & 1/2 \end{array}\right)$$

Quindi anche per $k = -1/3$, il sistema non ha soluzioni.

Conclusione: Se $k = 0$, il sistema ha ∞^1 soluzioni, se $k \neq 0$, non ne ha.

31. c. Conviene innanzitutto calcolare il determinante della matrice completa, sviluppandolo lungo l'ultima colonna (quella dei termini noti):

$$\det \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ k-1 & k & 2 & 2k \\ 4 & 0 & k-2 & 0 \end{pmatrix} = 2k \cdot \det \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & k-2 \end{pmatrix} = 2k(2k^2 - 6k)$$

Il determinante si annulla quindi per $k = 0, 3$. Per valori diversi da $k = 0$ e $k = 3$, quindi $\rho(A|b) = 4$, mentre $\rho(A) \leq 3$ e il sistema non ha soluzioni.

Se $k = 0$, il sistema è omogeneo e, mediante semplici operazioni elementari, si vede che ha tre pivot, quindi l'unica soluzione banale.

Se $k = 3$, sempre mediante semplici operazioni elementari, si vede che compare un'equazione incompatibile, per cui il sistema non ha soluzioni.

Conclusione: Se $k = 0$, il sistema ha una soluzione, se $k \neq 0$, non ne ha.

32. Come pivot per la prima colonna va bene 3, quindi iniziamo la riduzione eseguendo le operazioni elementari $R_3 \rightarrow R_3 - (1/3)R_1$ e $R_4 \rightarrow R_4 - (2/3)R_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & k-1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & k-2/3 & k \end{array}\right) \begin{array}{l} 4 \text{ va bene come pivot per la seconda} \\ \text{colonna quindi:} \\ R_3 \rightarrow R_3 - (1/4)R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k-7/12 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & k-2/3 & k \end{array}\right)$$

A questo punto la riduzione mediante massimo pivot non è più possibile (dipende da a) né conveniente, per cui calcoliamo $\det(A)$ (A matrice dei coefficienti):

$\det(A) = 3 \cdot 4 \cdot ((k-7/12)(k-2/3) - 5/36) = 12k^2 - 15k + 3$. Pertanto se $k \neq 1$ e $k \neq 1/4$, allora $\det(A) \neq 0$, il sistema è di Cramer e ammette una e una sola soluzione.

$$\text{Se } k = 1: \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5/12 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{array} \right) R_4 \rightarrow R_4 - (5/4)R_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5/12 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Il sistema è ridotto, ha tre incognite pivotali e quindi ∞^1 soluzioni.

$$\text{Se } k = 1/4: \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/3 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & -5/12 & 1/4 \end{array} \right) R_4 \rightarrow R_4 + R_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/3 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{array} \right).$$

Il sistema è ridotto e evidentemente non ha soluzioni.

Conclusione: Se $k = 1$: ∞^1 soluzioni.

Se $k = 1/4$: nessuna soluzione.

In tutti gli altri casi una e una sola soluzione.

33. a. Riduciamo la matrice completa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2k-1 \\ 1 & k & 1 & k \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2k-1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1+k-2k^2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2k-1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 1-k \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & 2-2k^2 \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \qquad R_3 \rightarrow R_3 + R_2$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - kR_1$$

Gli elementi della diagonale si annullano per $k = 1$ e per $k = -2$. Quindi:

Se $k \neq 1, -2$, la matrice è ridotta con tre pivot e il sistema ha una soluzione.

Se $k = 1$, le ultime due righe sono nulle e quindi il sistema ha un pivot e ∞^2 soluzioni.

Se $k = -2$, l'ultima riga è $(0 \ 0 \ 0 \ | \ -6)$, quindi il sistema non ha soluzioni.

33. b. Il minore incorniciato della matrice dei coefficienti $\left(\begin{array}{cc|c} k^2 - k + 1 & \boxed{\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ -2 & k^2 - k \end{array}} & \left| \begin{array}{c} 1 \\ k \end{array} \right. \end{array} \right)$ è nullo per $k = 0, 1$. Quindi:

Se $k \neq 0, 1$, allora $\rho(A) = 2$ e di conseguenza anche $\rho(A|b) = 2$ e quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Se $k = 0$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema non ha evidentemente soluzioni. | Se $k = 1$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente ∞^2 soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

33. c. Scriviamo la matrice e iniziamo l'algoritmo gaussiano:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 2 & k-1 & -1 \\ k & 3 & k+1 \end{array} \right) R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \quad R_4 \rightarrow R_4 - (k/2)R_1 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & -1 & -2 \\ k & 3 - k^2/2 & k+1 - k/2 \end{array} \right)$$

La seconda e la terza equazione si possono scrivere come $\{y = k; y = 2\}$, quindi:

Se $k \neq 2$ il sistema non ha soluzioni.

Se $k = 2$, le tre ultime equazioni sono proporzionali e quindi il sistema ha una soluzione.

33. d. Guardando la matrice completa del sistema, si vede che è più semplice, creare degli zeri nella terza colonna invece che nella prima, mediante operazioni elementari. Per questo non è neanche necessario scambiare le colonne:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 1 & -k \\ -1 & k & -1 & 1 \\ k-2 & 2k-1 & -1 & k^2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 1 & -k \\ k-1 & k-1 & 0 & 1-k \\ 2k-2 & 2k-2 & 0 & k^2-k \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 1 & -k \\ k-1 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & k^2+k-2 \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \qquad R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + R_1$$

Se $k \neq -2, 1$, il sistema non ha soluzioni, perché il termine noto $k^2 + k - 2 \neq 0$.

Sistemi e matrici - **Risposte 13.17**

Se $k = -2$, le matrici completa e incompleta hanno caratteristica 2 perché è non nullo il minore inquadro, quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & \boxed{-1} & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Se $k = 1$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente ∞^2 soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

33. e. Usiamo come primo pivot quello incorniciato di R_3 che non dipende da k :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 & k & 2 \\ \boxed{1} & -1 & 2k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ \downarrow \\ R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2k & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - kR_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 - 2k^2 & k & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 - 2k & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Scambiamo ora due righe per usare il pivot inquadro che non dipende da k .

$$\begin{array}{l} R_2 \\ \downarrow \\ R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 - 2k^2 & k & 2 \\ 0 & 1 & 2 - 2k & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 - kR_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - 2k^2 - k & 0 & 2 - k \\ 0 & 0 & 1 - 2k & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Le due ultime equazioni sono $\begin{cases} (1 - 2k^2 - k)z = 2 - k \\ (1 - 2k)z = 0 \end{cases}$

Il coefficiente $1 - 2k^2 - k$ si annulla per $k = -1, 1/2$ e il coefficiente $1 - 2k$ per $k = 1/2$.

Se $k \neq -1, 1/2$, allora le due ultime equazioni sono $\left\{ z = \frac{2 - k}{1 - 2k^2 - k}; z = 0 \right\}$, quindi occorre che sia $k = 2$, altrimenti non ci sono soluzioni.

Se $k = 2$, le ultime due righe sono $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right)$, la matrice è ridotta e il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Se $k = -1$, la terza riga è $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 1)$, quindi il sistema non ha soluzioni.

Se $k = 1/2$, la terza riga è $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 3/2)$, quindi il sistema non ha soluzioni.

Conclusione: Se $k = 2$, il sistema ha ∞^1 soluzioni, se $k \neq 2$, non ne ha.

33. f. Effettuiamo qualche operazione elementare sulle righe della matrice completa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 2k + 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k + 1 & 2k & k \\ k & k & -k & k \end{array} \right) \begin{array}{l} R_4 \rightarrow R_4 - R_1 \\ \downarrow \\ R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 2k + 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k + 1 & 2k & k \\ 0 & -k - 1 & -2k & k - 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ \downarrow \\ R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ k & 2k + 1 & k & 1 \\ 0 & k + 1 & 2k & k \\ 0 & -k - 1 & -2k & k - 1 \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - kR_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k + 1 & 2k & 1 \\ 0 & k + 1 & 2k & k \\ 0 & -k - 1 & -2k & k - 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k + 1 & 2k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k - 1 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{array} \right)$$

Quindi perché il sistema abbia soluzioni occorre che $k = 0$ e contemporaneamente $k - 1 = 0$.

Questo non è possibile, quindi:

Il sistema non ha soluzioni per alcun $k \in \mathbb{R}$

34. a. Si può iniziare con l'algoritmo gaussiano:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & b \\ -4 & a & 4 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 4R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & b - 1 \\ 0 & a + 8 & -4 & 6 \end{array} \right)$$

A questo punto è possibile calcolare il determinante della matrice dei coefficienti che è $4 - a$.

Di conseguenza, se $a \neq 4$, il sistema è di Cramer e ha un'unica soluzione, qualunque sia b .

Se $a = 4$, riduciamo ulteriormente la matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & b - 1 \\ 0 & 12 & -4 & 6 \end{array} \right) R_3 \rightarrow R_3 + 4R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & b - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4b + 2 \end{array} \right)$$

Sistemi e matrici - Risposte 14.17

Quindi il sistema ha soluzioni e ne ha ∞^1 , solo se $b = -1/2$.

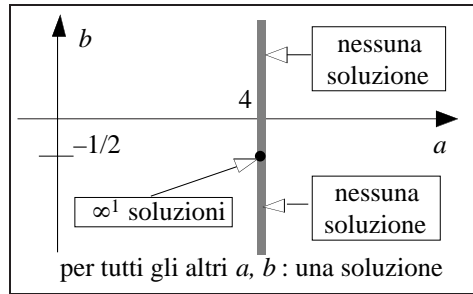
In conclusione:

Se $a \neq 4$: una soluzione.

Se $a = 4$ e $b \neq -1/2$: nessuna soluzione.

Se $a = 4$ e $b = -1/2$: ∞^1 soluzioni.

La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.



34. b. Iniziamo l'algoritmo gaussiano:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & b & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & a+2 & 1 \\ 0 & b-2a & -1 \end{array} \right)$$

A questo punto conviene calcolare il determinante della matrice completa.

Si ha: $\det(A|b) = a - b - 2$.

Se questo determinante è diverso da 0, cosa che accade se $b \neq a - 2$, allora il sistema non ha soluzioni, perché $\rho(A|b) = 3$, mentre $\rho(A) \leq 2$.

Vediamo ora cosa succede se $b = a - 2$. Sostituendo b , la terza equazione è proporzionale alla seconda e può essere trascurata, quindi la matrice del sistema è $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & a+2 & 1 \end{array} \right)$.

È quindi chiaro che se $a \neq -2$, la matrice è ridotta e il sistema ha una soluzione, mentre, se $a = -2$ (e quindi $b = -4$), l'ultima equazione è incompatibile.

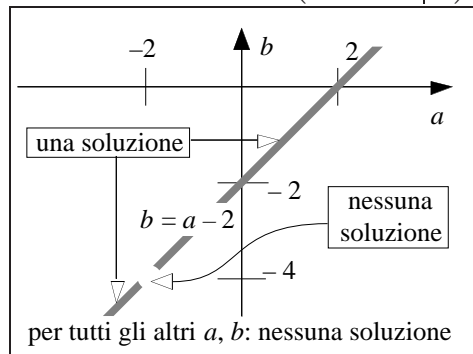
In conclusione:

Se $b \neq a - 2$: nessuna soluzione.

Se $b = a - 2$ e $a \neq -2$: una soluzione.

Se $a = -2$ e $b = -4$: nessuna soluzione.

La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.



34. c. Conviene creare degli zeri nella seconda colonna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & -1 & 1 \\ -1 & b & 0 & 1 \\ 2 & b & -2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & -1 & 1 \\ -1-a & 0 & 1 & 0 \\ 2-a & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

A questo punto conviene calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

Si ha: $\det(A) = b \cdot (2a - 1)$.

Se questo determinante è diverso da 0, cosa che accade se $a \neq 1/2$ e $b \neq 0$, allora il sistema ha una soluzione, perché è un sistema di Cramer.

Se $a = 1/2$, l'ultima riga può essere trascurata e la matrice ha caratteristica 2 per ogni b , perché è non nullo il minore inquadro, quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Se $b = 0$, la matrice dei coefficienti ha caratteristica sempre 2 perché è non nullo il minore inquadro.

L'unico minore significativo di ordine 3 della matrice completa (quello formato da C_1, C_3, C_4) ha determinante $2a - 1$.

Pertanto, se $a \neq 1/2$ (e sempre $b = 0$), allora $\rho(A|b) = 3$ e il sistema non ha soluzioni, mentre se $a = 1/2$ ne ha ∞^1 , come già visto sopra.

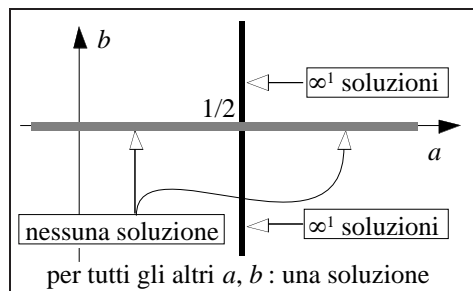
In conclusione:

Se $a \neq 1/2$ e $b \neq 0$: una soluzione.

Se $a = 1/2$: ∞^1 soluzioni per ogni b .

Se $a \neq 1/2$ e $b = 0$: nessuna soluzione.

La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.



34. d. Conviene creare degli zeri nella colonna C_2 che non dipende da parametri:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ b & 0 & a & a \\ a-1 & -1 & 0 & a \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1-2a & 0 & -1 & -2a \\ b & 0 & a & a \\ 2a-1 & 0 & 1 & 2a \end{array} \right)$$

L'ultima riga può essere trascurata in quanto proporzionale alla seconda. Il determinante della matrice dei coefficienti è $a - 2a^2 + b$, quindi:

Se $b \neq 2a^2 - a$ il sistema ha una soluzione, perché è un sistema di Cramer.

Se $b = 2a^2 - a$ sostituiamo b (dato che è difficile esplicitare a dall'equazione $b = 2a^2 - a$):

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} & a \\ 1-2a & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -1 \\ \hline \end{array} & -2a \\ 2a^2-a & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & a \\ \hline \end{array} & a \end{array} \right) \text{ Il minore inquadrate è diverso da 0, quindi } \varrho(A) = 2.$$

Per calcolare $\varrho(A|b)$ si può considerare l'unica sottomatrice di $(A|b)$ (oltre A) che lo contiene, quella formata da C_2, C_3, C_4 . Il suo determinante è $-a + 2a^2$ ed è nullo per $a = 0, 1/2$. In questi due casi, per il teorema di Kronecker, $\varrho(A|b) = 2$, altrimenti è 3.

In conclusione:

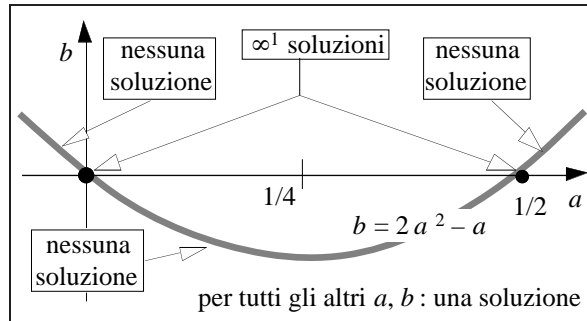
Se $b \neq 2a^2 - a$: una soluzione.

Se $b = 2a^2 - a$ e $a \neq 0, 1/2$: nessuna soluzione.

Se $a = 0$ e $b = 0$: ∞^1 soluzioni.

Se $a = 1/2$ e $b = 0$: ∞^1 soluzioni.

Notiamo che $b = 2a^2 - a$ è la parabola di vertice $(1/4, -1/8)$ passante per $(0, 0)$ e $(1/2, 0)$. La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.



34. e. Eseguiamo un'operazione elementare:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & b & b \\ a & 1 & 1 & 2 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array} \right) R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & b & b \\ 0 & 0 & 1-b & 2-b \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è $a \cdot b \cdot (b - 1)$, quindi se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e $b \neq 1$, allora il sistema ha una soluzione, perché è un sistema di Cramer.

Esaminiamo quindi i tre casi particolari:

Se $a = 0$, calcoliamo il determinante dell'unica sottomatrice 3×3 significativa della matrice completa: Quindi, se $b \neq -2, 1$, $\varrho(A|b) = 3$, mentre $\varrho(A) = 2$, quindi il sistema non ha soluzioni.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b & b \\ 0 & 1-b & 2-b \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix} = b^2 + b - 2$$

Se $b = -2$ (sempre $a = 0$): $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array} \right)$ e il

sistema ha ∞^1 soluzioni. Il caso $b = 1$ (e $a = 0$) può venire esaminato nel sottocaso $b = 1$.

Se $b = 0$ la matrice è quella a lato ed il sistema non ha soluzioni, qualunque sia a .

Se $b = 1$ la matrice è quella a lato ed il sistema non ha soluzioni, qualunque sia a .

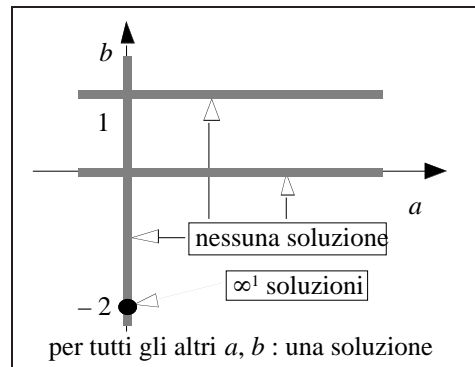
In conclusione:

Se $a \neq 0, b \neq 0, b \neq 1$: una soluzione.

Se $a = 0$ e $b = -2$: ∞^1 soluzioni.

Se $a = 0$ e $b \neq -2$: nessuna soluzione.

Se $b = 0$ o $b = 1$: nessuna soluzione.



La situazione può essere schematizzata nel disegno sopra.

41. A. Riduciamo finché è possibile la matrice:

$$\begin{pmatrix} k & 2 & 3 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ k & 0 & k & -k \\ -k & 2 & 1 & 3k \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_1 \end{array} \begin{pmatrix} k & 2 & 3 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & -2 & k-3 & -k-1 \\ 0 & 4 & 4 & 3k+1 \end{pmatrix}$$

A questo punto conviene calcolare il determinante di A :

$\det(A) = k(3k^3 - 4k^2 - k + 2)$. Il determinante si annulla per $k = 0$ e per k soddisfacente l'equazione di terzo grado $3k^3 - 4k^2 - k + 2 = 0$.

Per tentativi, si scopre che $k = 1$ è una radice del polinomio $3k^3 - 4k^2 - k + 2 = 0$.

Dividendo $3k^3 - 4k^2 - k + 2 = 0$ per $k - 1$, si trova il quoziente $3k^2 - k - 2$ che si annulla per $k = 1, -2/3$. Quindi il determinante di A è nullo per $k = 0, 1, -2/3$. Di conseguenza:

Se $k \neq 0, 1, -2/3$, $\varrho(A) = 4$, perché l'unico minore di ordine 4 è non nullo.

Esaminiamo $k = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ La matrice ha tre righe proporzionali. Eliminando le ultime due si ottiene una matrice ridotta con due righe significative, quindi:

Se $k = 1$, $\varrho(A) = 2$.

Esaminiamo $k = -2/3$: $\begin{pmatrix} -2/3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2/3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -11/3 & -1/3 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ La matrice ha almeno un minore di ordine 3 non nullo, per esempio il determinante della matrice incorniciata, quindi:

Se $k = -2/3$, $\varrho(A) = 3$.

Per quanto riguarda la quarta colonna:

Se $k \neq 0, 1, -2/3$ la matrice non ha alcuna colonna che sia combinazione lineare delle altre.

Per $k = 1$, c'è almeno un minore non nullo di ordine 2, per esempio quello incorniciato sopra, costituito da colonne che non comprendono la quarta.

Anche per $k = -2/3$, c'è un minore non nullo di ordine 3, costituito da colonne che non comprendono la quarta, per esempio quello già considerato in precedenza. Quindi:

Se $k = 1, -2/3$ la 4^a colonna è combinazione lineare delle altre colonne, altrimenti no.

41. B. Calcoliamo il determinante di B previa qualche operazione elementare:

$$\begin{pmatrix} 0 & k+2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & k+1 \\ k+1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & k+1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 + (k+1)R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & k+2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 2 & k & (k+1)^2 \\ 0 & 2 & k & 1-k \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_4 \rightarrow R_4 - R_3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & k+2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 2 & k & (k+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & -k^2 - 3k \end{pmatrix}$$

Ora il determinante è immediato sviluppando successivamente lungo la prima colonna e l'ultima riga ed è: $(-k^2 - 3k)(k+2)k$. Il determinante è nullo per $k = 0, -2, -3$, quindi:

Se $k \neq 0, -2, -3$, la caratteristica è 4, perché l'unico minore di ordine 4 è non nullo.

Esaminiamo $k = 0$: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Eliminando l'ultima riga che è nulla e la terza riga che è uguale alla prima si ottiene una matrice con un minore di ordine due non nullo, quindi:

Se $k = 0$, $\varrho(B) = 2$.

Esaminiamo $k = -2$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ La matrice ha almeno un minore di ordine 3 non nullo, per esempio il determinante della matrice incorniciata, quindi:

Se $k = -2$, $\varrho(B) = 3$.

Esaminiamo $k = -3$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

La matrice ha almeno un minore di ordine 3 non nullo, per esempio il determinante della matrice incorniciata, quindi:

Se $k = -3$, $\rho(B) = 3$.

Per quanto riguarda la quarta colonna:

Se $k \neq 0, -2, -3$ la matrice non ha alcuna colonna che sia combinazione lineare delle altre. Per $k = 0$, c'è almeno un minore non nullo di ordine 2, per esempio quello incorniciato sopra, costituito da colonne che non comprendono la quarta.

Per $k = -2$, si nota subito che $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, quindi non c'è alcun minore non nullo di ordine 3 costituito da colonne che non comprendono la quarta, che pertanto non è combinazione lineare delle altre.

Per $k = -3$, c'è un minore non nullo di ordine 3, costituito da colonne che non comprendono la quarta, per esempio quello già considerato in precedenza.

Quindi:

Se $k = 0, -3$ la 4^a colonna è combinazione lineare delle altre colonne, altrimenti no.

42. Guardiamo i minori 3×3 della matrice: Il primo (C_1, C_2, C_3) ha determinante zero, per cui una delle colonne è combinazione lineare delle altre. Basta risolvere il sistema $\begin{cases} a = 4 \\ a - b = 1 \end{cases}$ (ottenuto da $aC_1 + bC_2 = C_3$) per scoprire che $4C_1 + 3C_2 = C_3$ e quindi C_1, C_2, C_3 sono ciascuna combinazione lineare delle altre due. Svolgendo un conto analogo su C_1, C_2, C_4 si scopre che $3C_1 + 2C_2 = C_4$. Il determinante di C_1, C_2, C_5 è diverso da zero, pertanto C_5 non è combinazione lineare di C_1 e C_2 e quindi neanche di tutte le altre, perché, se lo fosse, dalle relazioni tra C_1, C_2, C_3, C_4 si dedurrebbe che C_5 è combinazione lineare di C_1 e C_2 .