Spazi vettoriali

01. Quali dei seguenti insiemi sono in modo "naturale" $\mathbb{R}$-spazi vettoriali ?

$$C^1([0,1]) \ , \ \mathbb{C} \ , \ \mathbb{R}^2 \ , \ \mathbb{Q} \ , \ \mathbb{C}^2 \ , \ \{0\} \ , \ \mathbb{C}[x] \ , \ \mathbb{C}\times\mathbb{C}[x] \ , \ M_{23}(\mathbb{R})$$

02. Quali dei precedenti insiemi sono in modo "naturale" $\mathbb{C}$-spazi vettoriali ?

03. Siano u, v vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Esprimere in due modi distinti u come combinazione lineare di $u+v$, $u-v$, v.

04. Siano u, v, w vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Provare che:
   a. Se u, v, w sono linearmente indipendenti anche $u-v$, $u+v$, $v+w$ lo sono.
   b. Se u, v, w sono linearmente dipendenti anche $u-v$, $u+v$, $v+w$ lo sono.
   c. Se u, v, w generano V anche $u-v$, $u+v$, $v+w$ lo generano.
   d. Se u, v, w sono vettori linearmente dipendenti e u, v sono linearmente indipendenti, allora w è combinazione lineare di u e v.
   e. Mostrare con un controesempio che, se u, v, w sono vettori linearmente dipendenti e anche u, v sono linearmente dipendenti, non è detto che w sia combinazione lineare di u e v.

05. Siano u e v vettori linearmente indipendenti in un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Per quali $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ i vettori $au+bv$, $cu+dv$ sono linearmente indipendenti ?

06. Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che sono linearmente dipendenti le seguenti terne di vettori e scrivere per ogni terna due combinazioni lineari nulle a coefficienti non tutti nulli dei tre vettori:
   a. $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,2,1)$ b. $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(7,8,9)$
   c. $(1,0,0)$, $(2,3,0)$, $(1,1,0)$ d. $(1,\pi,0)$, $(10^{45},\pi,2)$, $(\pi,\pi^2,0)$

07. Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Esprimere se possibile $(1,2,0)$ come combinazione lineare dei vettori $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ in due modi diversi.

08. Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Esprimere se possibile $(1,1,1)$ come combinazione lineare dei vettori $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ in due modi diversi.

09. Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Dati i vettori $(1,2,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,1)$, $(0,1,2)$, dire quali dei quattro sono combinazione lineare dei rimanenti.

10. Provare che sono linearmente indipendenti le seguenti successioni di vettori:

a. $(1,0,0),(0,1,1),(0,0,1)$	in $\mathbb{R}^3$	($\mathbb{R}$-sp.)	b. $(1,1,1),(2,1,0,),(5,0,0)$	in $\mathbb{R}^3$	($\mathbb{R}$-sp.)
c. $(0,1,1)$	in $\mathbb{R}^3$	($\mathbb{R}$-sp.)	d. $(0,1,1)$, $(0,7,i)$	in $\mathbb{C}^3$	($\mathbb{C}$-sp.)
e. $(i,0)$, $(0,i)$	in $\mathbb{C}^2$	($\mathbb{C}$-sp.)	f. $(i,-1)$, $(1,i)$	in $\mathbb{C}^2$	($\mathbb{R}$-sp.)
g. $1+i$, $1-i$	in $\mathbb{C}$	($\mathbb{R}$-sp.)	h. $\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$	in $M_{22}(\mathbb{R})$	($\mathbb{R}$-sp.)
i. 1 , $x+1$, x^2+1	in $\mathbb{R}[x]$	($\mathbb{R}$-sp.)	j. 3 , $\sin(x)$, $\cos(x)$	in $C^0(\mathbb{R})$	($\mathbb{R}$-sp.)
k. 2 , π	in $\mathbb{R}$	($\mathbb{Q}$-sp.)	l. $1/x$, $1/(x+1)$, $1/(x+2)$	in $C^0([1,2]$	($\mathbb{R}$-sp.)

11. Nei casi dell'esercizio precedente in cui lo spazio è di dimensione finita, completare a base le successioni di vettori linearmente indipendenti

12. Siano u, v, w vettori di $\mathbb{C}^3$ linearmente indipendenti considerando $\mathbb{C}^3$ come $\mathbb{C}$-spazio; provare che sono linearmente indipendenti considerando $\mathbb{C}^3$ come $\mathbb{R}$-spazio. Provare con un controesempio che il viceversa è falso.

13. Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sotto-$\mathbb{R}$-spazi vettoriali ?
   a. $V = \{(x,y) : xy = 0\}$ in $\mathbb{R}^2$
   b. $V = \{(x,y,z) : x \in \mathbb{Q}\}$ in $\mathbb{R}^3$
   c. $V = \{P(x) : P(1) = P(0)\}$ in $\mathbb{R}[x]$
   d. $V = \{f(x) : f(x) = 0 \text{ se } x \in [0,1]\}$ in $C^0(\mathbb{R})$

e. $V = \{f(x) : f'(x) = \sin(x) f''(x)\}$ in $C^0(\mathbb{R})$
f. $V = \{(x, y, z, t) : x = 3y = 3z - t\}$ in $\mathbb{R}^4$
g. $V = \{(x, y) : x = iy\}$ in $\mathbb{C}^2$
h. $V = \{(x, y, z) : x^2 = y\}$ in $\mathbb{R}^3$
i. $V = \{A : \det(A) = 0\}$ in $M_{22}(\mathbb{R})$
j. $V = \{P(x) : P'(1) = 0\}$ in $\mathbb{R}[x]$
k. $V = \{P(x) : \deg(P) = 2\}$ in $\mathbb{R}[x]$
l. $V = \left\{f(x) : \int_0^1 f(x)dx = 0\right\}$ in $C^\infty(\mathbb{R})$
m. $V = \{P(x) : \deg(P) \leq 2\}$ in $\mathbb{R}[x]$

14. Nei casi in cui è possibile, determinare una base dei sottospazi dell'esercizio precedente.
15. Ricordiamo che nell' $\mathbb{R}$-spazio $M_{nn}(\mathbb{R})$ si ha:
   a. A è simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j.
   b. A è antisimmetrica se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j.
   c. A è diagonale se $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$.
   d. A è triangolare superiore (inferiore) se $a_{ij} = 0$ per $i > j$ $(i < j)$.

   Nell' $\mathbb{R}$-spazio $M_{nn}(\mathbb{C})$ si ha:

   e. A è hermitiana se $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ (coniugato) per ogni i, j.

   Provare che le matrici simmetriche etc. costituiscono sottospazi. Per $n = 2$ e per $n = 3$ determinare basi dei sottospazi.

Nel seguito, salvo diverso avviso, si considererà $\mathbb{K}^n$ sempre come $\mathbb{K}$- spazio vettoriale.

20. In $\mathbb{R}^3$. Sia $\mathcal{B} : (1, 1, 0), (0, 2, 1), (0, 0, 2)$ base. Scrivere $v_\mathcal{B}$ dove $v = (1, 2, 1)$. Esiste v tale che $v_\mathcal{B} = [1\ 2\ 3]^T$?
21. In $\mathbb{R}^3$. Trovare una base $\mathcal{B}$ rispetto alla quale $v(1, 2, 1)$ abbia coordinate $[1\ 1\ 1]^T$ e $w = (0, 1, 1)$ abbia coordinate $[0\ 1\ 1]^T$.
22. Sia $\mathbb{R}_3[x] = \{P(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg(P) \leq 3\}$. Determinare le coordinate di $(x - 1)^2$ rispetto alla base $1, x, x^2, x^3$ e rispetto alla base $1, x - 2, (x - 2)^2, (x - 2)^3$.
23. Determinare due diverse basi per il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $(1, 1, 0), (1, 3, 2), (0, 1, 1)$.
24. Siano $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 2x - 3z = 0\}$ e $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Determinare una base e un sistema di generatori che non sia base per ciascuno di essi.
25. Scrivere due differenti basi di $\mathbb{R}^4$ comprendenti i vettori $(1, 0, -1, 1), (2, 0, 1, -1)$.
26. In $\mathbb{R}^4$. Sia $V = L\{(1, 2, 0, 1), (0, 0, 1, -2), (1, 2, 1, -1), (1, 1, 0, 0)\}$; quante basi per V si possono estrarre dal sistema di generatori dato ?
27. Sia $V = L\{(1, 2, 0, 1), (0, 0, 2, 1), (1, 1, 2, 0)\}$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Dire quali dei vettori seguenti stanno in V: $v(0, 1, 0, 2), w(0, 1, 0, 1), u(1, -1, -1, 0)$.
28. Sia $V = L\{(1 - x)^2, 1 - x^2, 1 - x\}$ sottospazio di $\mathbb{R}[x]$. Dire quali dei seguenti vettori stanno in V : $P_1(x) = 1 + x$, $P_2(x) = 1 + x^2$, $P_3(x) = x - x^2$, $P_4(x) = x^2 - x^3$.
29. In $\mathbb{R}^4$. Provare che $V \subset W$ nei seguenti casi:
   a. $V = L\{(0, 1, 1, 2), (0, 2, 0, 2)\}$ $W = \{(x, y, z, t) : x + y + z = t\}$
   b. $V = L\{(3, 0, 2, 1), (2, 2, 3, 1)\}$ $W = L\{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\}$
   c. $V = \{(x, y, z, t) : x + y + z = z - 2t = 0\}$ $W = L\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1), (3, -1, 2, 1)\}$
30. Provare che $V \not\subset W$ nel seguente caso:
   d. $V = \{(x, y, z, t) : x + y + z = z - t = 0\}$ $W = L\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1), (3, -1, 2, 1)\}$
31. In $M_{22}(\mathbb{R})$. Sia $V = \{A : A \cdot B = B \cdot A\}$ (B matrice fissata). Provare che V è sottospazio e trovarne una base nel caso in cui B sia la matrice a lato. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
32. Come l'esercizio precedente, ma con $V = \{A : A \cdot B \text{ sia diagonale}\}$.