LINEARE INDIPENDENZA E GENERATORI

F 01. Negli spazi vettoriali $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{C}^3$ (rispettivamente $\mathbb{R}$-spazio e $\mathbb{C}$-spazio), dimostrare che sono linearmente dipendenti le seguenti terne di vettori e scrivere per ogni terna due combinazioni lineari nulle a coefficienti non tutti nulli dei tre vettori:

a. $(1,1,0)\,,\,(0,1,1)\,,\,(1,2,1)$ b. $(1,2,3)\,,\,(4,5,6)\,,\,(7,8,9)$ in $\mathbb{R}^3$
c. $(1,4,5)\,,\,(2,3,-1)\,,\,(0,0,0)$ d. $(1,\pi,0)\,,\,(10^{45},\pi,2)\,,\,(\pi,\pi^2,0)$ in $\mathbb{R}^3$
e. $(1,i,0)\,,\,(i,-1,0)\,,\,(0,0,i)$ f. $(1,i,1)\,,\,(i,1,-1)\,,\,(1,1,0)$ in $\mathbb{C}^3$

F 02. a. Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, esprimere se possibile $(1,2,0)$ come combinazione lineare dei vettori $(1,0,0)\,,\,(0,1,0)\,,\,(1,1,0)$ in due modi diversi.

b. Sempre nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, esprimere se possibile $(1,1,1)$ come combinazione lineare dei vettori $(1,1,0)\,,\,(0,1,1)\,,\,(1,0,1)$ in due modi diversi.

F 03. Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Dati i vettori $(1,2,1)\,,\,(1,0,1)\,,\,(1,1,1)\,,\,(0,1,2)$, dire quali dei quattro sono combinazione lineare dei rimanenti.

F 04. Provare che sono linearmente indipendenti le seguenti successioni di vettori e completarle a base dello spazio vettoriale indicato.

a. $(1,0,0),(0,1,1),(0,0,1)$ in $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}$-sp.) b. $(1,1,1),(2,1,0),(5,0,0)$ in $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}$-sp.)
c. $(0,1,1)$ in $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}$-sp.) d. $(0,1,1)\,,\,(0,7,i)$ in $\mathbb{C}^3$ ($\mathbb{C}$-sp.)
e. $(i,0)\,,\,(0,i)$ in $\mathbb{C}^2$ ($\mathbb{C}$-sp.) f. $\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$ in $M_{22}(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$-sp.)

F 05. Siano u,v vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Esprimere in due modi distinti u come combinazione lineare di $u+v\,,\,u-v\,,\,v$. Quanti modi esistono ?

F 06. a. Dire perché i vettori $v_1=(1,0,1)$ $v_2=(1,1,2)$ $v_3=(1,2,3)$ $v_4=(-1,2,1)$ in $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti e scrivere tutte le relazioni di lineare dipendenza tra essi.

b. Dire in che modo è possibile operare degli scarti tra i quattro vettori in modo che i restanti siano linearmente indipendenti.

T 07. Siano u,v,w vettori di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Provare che:

a. Se u,v,w sono vettori linearmente dipendenti e u,v sono linearmente indipendenti, allora w è combinazione lineare di u e v.

b. Mostrare con un controesempio che, se u,v,w sono vettori linearmente dipendenti e anche u,v sono linearmente dipendenti, non è detto che w sia combinazione lineare di u e v.

c. Se u,v,w sono linearmente indipendenti anche $u-v\,,\,u+v\,,\,v+w$ lo sono.

d. Se u,v,w sono linearmente dipendenti anche $u-v\,,\,u+v\,,\,v+w$ lo sono.

e. Se u,v,w generano V anche $u-v\,,\,u+v\,,\,v+w$ lo generano.

T 08. Siano u e v vettori linearmente indipendenti in un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Per quali $a,b,c,d\in\mathbb{K}$ i vettori $au+bv\,,\,cu+dv$ sono linearmente indipendenti ?

SOTTOSPAZI E DIMENSIONE

F 10. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sotto-spazi vettoriali e in caso positivo determinarne una base.

a. $V=\{(x,y):xy=0\}$ in $\mathbb{R}^2$
b. $V=\{(x,y,z):x\in\mathbb{Q}\}$ in $\mathbb{R}^3$
c. $V=\{(x,y,z):x+2y+z=1\}$ in $\mathbb{R}^3$
d. $V=L\{(1,1,0),(0,0,0),(0,2,1)\}$ in $\mathbb{R}^3$
e. $V=\{(1,1,0),(0,2,1)\}$ in $\mathbb{R}^3$
f. $V=\{(x,y,z,t):x=3y=3z-t\}$ in $\mathbb{R}^4$
g. $V=\{(a-b\,,\,a+2b\,,\,3b):a,b\in\mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}^3$
h. $V=\{(x,y):x=iy\}$ in $\mathbb{C}^2$

i. $V = \{(x, y, z) : x^2 = y\}$ in $\mathbb{R}^3$
j. $V = \{A : \det(A) = 0\}$ in $M_{22}(\mathbb{R})$

A 11. Ricordiamo che nell' $\mathbb{R}$-spazio $M_{nn}(\mathbb{R})$ si ha:

a. A è simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j.
b. A è antisimmetrica se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j.
c. A è diagonale se $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$.
d. A è triangolare superiore (inferiore) se $a_{ij} = 0$ per $i > j$ $(i < j)$.

Nell' $\mathbb{R}$-spazio $M_{nn}(\mathbb{C})$ si ha:

e. A è hermitiana se $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ (coniugato) per ogni i, j.

Provare che le matrici simmetriche etc. costituiscono sottospazi. Per $n = 2$ e per $n = 3$ determinare basi dei sottospazi.

F 12. Determinare due diverse basi per il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $(1, 1, 0), (1, 3, 2), (0, 1, 1)$.

F 13. Dire perché è possibile completare i vettori $(1, 0, -1, 1), (2, 0, 1, -1)$ a base di $\mathbb{R}^4$ e farlo in almeno due modi differenti usando vettori della base canonica.

C 14. Determinare una base e un sistema di generatori che non sia base per ciascuno dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:
a. $V_1 = \{(x, y, z) : x + y = 2x - 3z = 0\}$ b. $V_2 = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 0\}$

F 15. In $\mathbb{R}^4$ è dato il sottospazio $W = L\{(1, 2, 0, 0), (0, 1, 0, 1)\}$. Scrivere tutti i suoi vettori e dire se ce n'è uno appartenente anche al sottospazio $V_1 = \{(x, y, z, t) : x + 2y - z + 2t = 0\}$

C 16. In $\mathbb{R}^4$. Sia $V = L\{(1, 2, 0, 1), (0, 0, 1, -2), (1, 2, 1, -1), (1, 1, 0, 0)\}$. Dire che dimensione ha V e quante basi per V si possono estrarre dal sistema di generatori dato.

F 17. In $\mathbb{R}^3$. Sia Dire perché $\mathcal{B} : (1, 1, 0), (0, 2, 1), (0, 0, 2)$ è una base e scrivere $v_{\mathcal{B}}$ dove $v = (1, 2, 1)$. Esiste un vettore v tale che $v_{\mathcal{B}} = [1\ 2\ 3]^T$?

F 18. In $\mathbb{R}^3$ sia W il sottospazio una cui base è $\mathcal{B} : (1, 2, 0), (0, 1, -1)$.

a. Scrivere un'altra base $\mathcal{B}_1$ costituita da vettori non proporzionali a quelli della base $\mathcal{B}$.
b. Dire quale tra i vettori $v = (1, 0, 2)$, $w = (0, 1, 2)$ appartiene a W e per questo vettore determinare la matrice delle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ e quella rispetto a $\mathcal{B}_1$.
c. Scrivere una base $\mathcal{B}_2$ di W rispetto a cui il vettore trovato in b. abbia coordinate $[1\ 0]^T$

F 19. Sia $W = L\{(1, 2, 2, 0), (0, 2, 3, -1), (3, 2, 0, 2), (1, 1, 1, 1)\}$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

a. Determinare $\dim(W)$, una base $\mathcal{B}$ per W e scrivere tutti i vettori di W.
b. Dire quali tra i seguenti due vettori stanno in W: $w_1 = (1, 0, -1, 1)$, $w_2 = (2, 1, 1, 1)$
c. Trovare (se esiste) un vettore $w \in W$ con le prime due componenti nulle.
d. Calcolare la matrice delle coordinate di w rispetto a $\mathcal{B}$.
e. Scrivere un'altra base $\mathcal{B}_1$ di W il cui primo vettore sia w.

F 20. Sia $V = L\{(1, 2, 0, 1), (0, 1, -1, 1), (1, 0, 2, -1)\}$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Dire quali tra i seguenti due vettori stanno in V: $v_1 = (2, 1, 3, 1)$, $v_2 = (2, 1, 3, -1)$.

C 21. In $\mathbb{R}^3$. Trovare una base $\mathcal{B}$ rispetto alla quale $v(1, 2, 1)$ abbia coordinate $[1\ 1\ 1]^T$ e $w = (0, 1, 1)$ abbia coordinate $[0\ 1\ 1]^T$.

A 22. In $\mathbb{R}^4$. Provare che $V \subset W$ nei casi a. b. c. e che $V \not\subset W$ nel caso d.

a. $V = L\{(0, 1, 1, 2), (0, 2, 0, 2)\}$ $W = \{(x, y, z, t) : x + y + z = t\}$
b. $V = L\{(3, 0, 2, 1), (2, 2, 3, 1)\}$ $W = L\{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\}$
c. $V = \{(x, y, z, t) : x + y + z = z - 2t = 0\}$ $W = L\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1), (3, -1, 2, 1)\}$
d. $V = \{(x, y, z, t) : x + y + z = z - t = 0\}$ $W = L\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1), (3, -1, 2, 1)\}$

C 23. In $M_{22}(\mathbb{R})$. Sia $V = \{A : A \cdot B = B \cdot A\}$ (B matrice fissata).

a. Provare che V è sempre sottospazio.
b. Trovarne una base nel caso in cui B sia la matrice a lato.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

A 24. Come il problema precedente, ma con $V = \{A : A \cdot B \text{ sia diagonale}\}$.

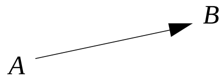
VETTORI GEOMETRICI

F 31. Dire quali di queste affermazioni sono vere:

a. AB è un segmento orientato

b. AB è un vettore (libero)

c. AB rappresenta un vettore libero



F 32. Siano $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vettori geometrici. Dire quali di queste operazioni hanno senso e in caso positivo dire se il risultato è un vettore o uno scalare.

a. $\mid \vec{w} \mid \ \vec{v}$ b. $\mid \vec{v} \mid\mid \vec{w} \mid$ c. $\dfrac{\vec{v}}{\mid \vec{w} \mid}$ d. $\dfrac{\mid \vec{v} \mid}{\vec{w}}$ e. $(\vec{u} \cdot \vec{v})\, \vec{w}$

f. $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w}$ g. $(\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$ h. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$ i. $\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$ j. $\vec{v} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$

k. $\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$ l. $\vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{w}$ m. $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$

F 33. Calcolare $((1,2,0) \wedge (3,2,0)) \wedge (1,1,1)$ e $(1,2,0) \wedge ((3,2,0) \wedge (1,1,1))$

C 34. Sia $\mid \vec{v} \mid = 1$. Esiste un vettore $\vec{w}$ di modulo 2 tale che $\vec{v} \cdot \vec{w} = 5$?
Ed esiste $\vec{w}$ di modulo 2 tale che $\vec{v} \cdot \vec{w} = -1$?

T 35. Provare che se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ e $\mid \vec{u} \mid = \mid \vec{v} \mid = 2$, allora $\mid (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} \mid = 8$.

T 36. Dimostrare che se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$ e $a \in \mathbb{R}$,allora:

a. $(\vec{u} + a\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ b. $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} \wedge \vec{w} = 0$

T 37. Siano $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \neq \vec{0}$ vettori e supponiamo che $\vec{u} \neq \vec{0}$ formi lo stesso angolo sia con $\vec{w}_1$ che con $\vec{w}_2$ e che $\vec{v} \neq \vec{0}$ abbia la stessa proprietà. Dimostrare che se $a\vec{u} + b\vec{v}$ è non nullo allora esso ha ancora la stessa proprietà.

Supponiamo d'ora in poi che nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale V_3 sia fissata una base ortonormale destrorsa $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. Indicheremo quindi i vettori con le loro coordinate rispetto a tale base. Per esempio con $(1,2,-1)$ indicheremo il vettore $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$.
Salvo diverso avviso i seguenti problemi sono nello spazio V_3.
In alcuni problemi lo spazio è V_2 con una base ortonormale $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$.

F 41. Provare che esistono due vettori di modulo 5 paralleli a $(1,2,-1)$ e determinarli.

F 42. Determinare un vettore di modulo 1 ortogonale a $(1,2,3)$ e a $(1,1,-1)$.

F 43. Dati i due vettori $\vec{v}_1 = (1,1,0)$ e $\vec{v}_2 = (2,-1,2)$ e il sottospazio $W = L\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ da essi generato.

a. Determinare un vettore $\vec{v} \in W$ *di modulo* 1, ortogonale a $\vec{\jmath}$.

b. Determinare il vettore $\vec{w} \in W$ *di modulo* 1, avente anche le seguenti due proprietà

$\vec{w}$ sia ortogonale a $\vec{v}_1$ $\vec{w}$ formi un angolo acuto con $\vec{v}_2$

c. Calcolare la matrice delle coordinate di $\vec{v}$ e di $\vec{w}$ rispetto alla base $\mathcal{B} : \vec{v}_1, \vec{v}_2$ di W.

F 44. In V_3 sono assegnati i due vettori $\vec{v} = (1,1,0)$ e $\vec{w} = (0,-1,2)$.

a. Determinare una base *ortonormale* $\mathcal{B}$ per $W = L\{\vec{v}, \vec{w}\}$.

b. In W, determinare le coordinate di $\vec{v}$ e $\vec{w}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

c. Completare i due vettori di $\mathcal{B}$ a base ortonormale $\mathcal{B}_1$ per V_3.

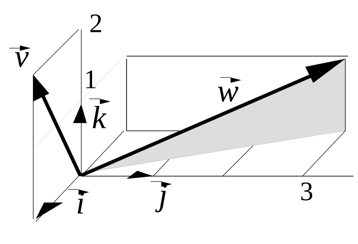
F 45. In V_3 sono dati i due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ rappresentati dai segmenti orientati disegnati.
Sia poi $W = L\{\vec{v}, \vec{w}\}$ il sottospazio vettoriale da essi generato.

a. Calcolare l'angolo θ tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

b. Scrivere le coordinate di un vettore $\vec{u} \in W$ e ortogonale a $\vec{k}$.

c. Completare $\vec{u}$ a base ortogonale di W.

d. Completare $\vec{u}$ a base ortogonale di V_3.



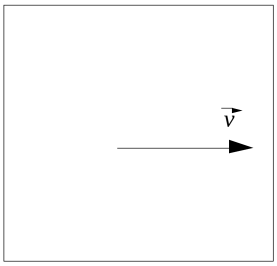
F 46. In V_3 sono dati i tre vettori di modulo 1:

$\vec{v}\,(-2,2,1)/3 \qquad \vec{w}\,(1,2,-2)/3 \qquad \vec{u}\,(1,-4,1)/\sqrt{18}$

a. Verificare che sono linearmente dipendenti.

b. Calcolare i loro angoli reciproci.

c. Usare i dati per effettuare uno schizzo della posizione dei tre vettori nello spazio di dimensione 2 da essi generato, rappresentato nel disegno dal quadrato.



C 47. Determinare i vettori $\vec{v} \neq \vec{0}$ tali che $\vec{v} - \vec{\imath}$ sia ortogonale a $(1,1,2)$ e $\vec{v}$ sia ortogonale a $\vec{\jmath}$.

F 48. Provare che esistono due vettori $\vec{v}$ paralleli a $(1,-1,1)$ tali che $\vec{v} - \vec{\imath}$ abbia modulo 3.

C 49. Dire se sono destrorse o sinistrorse le seguenti basi di V_3:

a. $\vec{\imath}\,,\ \vec{k}\,,\ \vec{\jmath}$ b. $\vec{\jmath}\,,\ \vec{k}\,,\ \vec{\imath}$ c. $\vec{\jmath}+\vec{k}\,,\ \vec{\imath}+\vec{k}\,,\ \vec{\imath}+\vec{\jmath}$

C 50. a. Proiettare il vettore $(1,2,1)$ sul vettore $(0,3,1)$.

b. Trovare un vettore multiplo di $(1,2,1)$ la cui proiezione su $(0,3,1)$ abbia modulo 1. Ne esiste uno solo ?

A 51. Siano $\vec{u} = (1,2,0)$ e $\vec{v} = (0,1,-1)$. Determinare $\vec{w}$ tale che simultaneamente:

1. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ siano linearmente dipendenti. 2. $\vec{w}$ sia ortogonale a $\vec{v}$.

3. la proiezione di $\vec{w}$ su $\vec{u}$ abbia modulo 1.

C 52. In V_2: Determinare tutti i vettori che formano un angolo di $\pi/3$ col vettore $(-1,2)$.

C 53. Determinare tutti i vettori formanti un angolo di $\pi/4$ con $(0,-1,1)$ e di $\pi/2$ con $(1,0,-2)$.

A 54. In V_2: Siano $\vec{v} = (1,-3)$ e $\vec{w} = (2,1)$:

a. Determinare $\vec{u}_1$ ortogonale a $\vec{v}$ tale che la proiezione di $\vec{u}_1$ su $\vec{w}$ coincida con la proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{w}$.

b. Determinare $\vec{u}_2$ di modulo 1 tale che la proiezione di $\vec{u}_2$ su $\vec{w}$ coincida con la proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{w}$.

T 55. Siano $\vec{u}$, $\vec{v}$ vettori non nulli. Determinare tutti i vettori linearmente dipendenti con $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e formanti con essi angoli uguali.

A 56. a. Dati i vettori $\vec{u}_1 = (1,2,0)$, $\vec{u}_2 = (0,-1,1)$, determinare la proiezione ortogonale del vettore $(1,0,0)$ sul sottospazio $L\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

b. Calcolare l'angolo θ tra il vettore $(1,0,0)$ e lo spazio $L\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.