Vettori geometrici

01. a. Vera: è un segmento orientato.
    b. Falsa: un vettore è *un insieme di segmenti orientati.*
    c. Vera: ogni segmento orientato rappresenta un vettore geometrico.

02.
- Sì: è il prodotto dello scalare $|\vec{w}|$ per il vettore $\vec{v}$ e dà luogo a un vettore.
- Sì: è il prodotto di due numeri reali ed è quindi uno scalare.
- Sì, ma solo se $\vec{w} \neq \vec{0}$. È il prodotto dello scalare $1/|\vec{w}|$ per il vettore $\vec{v}$ e dà luogo a un vettore.
- No: non ha senso dividere per un vettore.
- Sì: è il prodotto dello scalare $\vec{u}\cdot\vec{v}$ per il vettore $\vec{v}$ e dà luogo a un vettore.
- No: non si può sommare lo scalare $\vec{u}\cdot\vec{v}$ per il vettore $\vec{w}$.
- Sì: è la somma di due scalari.

03. Nel primo caso no, perché $\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos(\theta)$. Nel secondo sì, basta che l'angolo compreso tra i due vettori abbia coseno $-1/2$.

04. Per ipotesi $\dfrac{\vec{w}_1\cdot\vec{u}}{|\vec{w}_1|\cdot|\vec{u}|} = \dfrac{\vec{w}_2\cdot\vec{u}}{|\vec{w}_2|\cdot|\vec{u}|}$ e $\dfrac{\vec{w}_1\cdot\vec{v}}{|\vec{w}_1|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{\vec{w}_2\cdot\vec{u}}{|\vec{w}_2|\cdot|\vec{u}|}$, pertanto:
$\dfrac{\vec{w}_1\cdot\vec{u}}{|\vec{w}_1|} = \dfrac{\vec{w}_2\cdot\vec{u}}{|\vec{w}_2|}$ e $\dfrac{\vec{w}_1\cdot\vec{v}}{|\vec{w}_1|} = \dfrac{\vec{w}_2\cdot\vec{v}}{|\vec{w}_2|}$. Moltiplicando la prima eguaglianza per λ, la seconda per μ e sommando si ha la tesi.

05. a. $(1,0,0)\cdot(0,1,0) = \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = \sqrt{2}$
$(1,1,0)\cdot(0,1,2) = (\vec{v}_1+\vec{v}_2)\cdot(\vec{v}_2+2\vec{v}_3) = \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2+2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3+\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2+2\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3 = \sqrt{2}+2\sqrt{2}+2+2\sqrt{2} = 2+5\sqrt{2}$
    b. $\cos(\theta_1) = \dfrac{(1,0,0)\cdot(0,0,1)}{|(1,0,0)||(0,0,1)|} = \dfrac{(1,0,0)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{(1,0,0)\cdot(1,0,0)}\sqrt{(0,0,1)\cdot(0,0,1)}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}/2$
$\cos(\theta_2) = \dfrac{(1,0,0)\cdot(0,1,1)}{|(1,0,0)||(0,1,1)|} = \dfrac{(1,0,0)\cdot(0,1,1)}{\sqrt{(1,0,0)\cdot(1,0,0)}\sqrt{(0,1,1)\cdot(0,1,1)}}$
Dato che $(0,1,1)\cdot(0,1,1) = (\vec{v}_2+\vec{v}_3)\cdot(\vec{v}_2+\vec{v}_3) = \vec{v}_2\cdot\vec{v}_2+\vec{v}_3\cdot\vec{v}_3+2\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3 = 2+2+2\sqrt{2}$,
allora $\cos(\theta_2) = \dfrac{\vec{v}_1\cdot(\vec{v}_2+\vec{v}_3)}{\sqrt{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \dfrac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2+\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3}{\sqrt{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = 2\Big/\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)$

11. Il vettore $(1,2-1)$ ha modulo $\sqrt{6}$, i due vettori sono dunque: $\pm\dfrac{5}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$

12. I vettori sono $a(1,-1,1)$ e bisogna che $|(a,-a,a)-(1,0,0)| = \sqrt{(a-1)^2+a^2+a^2} = 3$, da cui $a = 2, -4/3$. I vettori cercati sono quindi $\vec{v} = 2(1,-1,1)$ e $\vec{v} = (-4/3)(1,-1,1)$

13. a. La proiezione è : $\dfrac{(1,2,1)\cdot(0,3,1)}{|(0,3,1)|^2}(0,3,1) = \dfrac{7}{10}(0,3,1)$.
    b. Essendo linearmente dipendente con un vettore non nullo, il vettore è del tipo $a(1,2,1)$. La sua proiezione ortogonale su $(0,3,1)$ è $\dfrac{a(1,2,1)\cdot(0,3,1)}{|(0,3,1)|^2}(0,3,1) = \dfrac{7a}{10}(0,3,1)$ e ha modulo $\left|\dfrac{7a}{10}\right| |(0,3,1)| = \dfrac{7}{10}\sqrt{10}\ |a|$. Da cui $a = \pm\sqrt{10}/7$. Quindi ci sono due vettori che soddisfano la condizione e sono : $\pm\dfrac{10}{7\sqrt{10}}(1,2,1)$

14. Si deve avere: $(\vec{v}-(1,0,0))\cdot(2,1,1) = 0$ e $\vec{v}\cdot(0,1,0) = 0$ cioè:
$\vec{v}\cdot(2,1,1) = (1,0,0)\cdot(2,1,1)$ e $\vec{v}\cdot(0,1,0) = 0$.
Ponendo $\vec{v} = (x,y,z)$ si ha il sistema: $\{2x+y+z = 2\ ;\ y = 0\}$, da cui si trovano i vettori $(x,0,2-2x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

15. Sia (x,y,z) il vettore cercato, allora $(x,y,z)\cdot(1,2,3) = 0$ e $(x,y,z)\cdot(1,1,-1) = 0$. Da cui il sistema lineare $\{x+2y+3z = 0\ ;\ x+y-z = 0\}$ che ha ∞^1 soluzioni. Una soluzione è

$(5,-4,1)$. Per cui un vettore che soddisfa la richiesta è il suo normalizzato, un altro è l'opposto del normalizzato. Soluzioni del problema sono quindi: $(5,-4,1)/\pm\sqrt{42}$

16. Dato che $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono linearmente indipendenti, la prima condizione implica che $\vec{w}$ sia combinazione lineare di $\vec{u}$ e $\vec{v}$, cioè che $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. La seconda impone che $\vec{w}\cdot\vec{v} = 0$, cioè che $a\vec{u}\cdot\vec{v} + b\vec{v}\cdot\vec{v} = 0$ e quindi che $2a + 2b = 0$, ossia $b = -a$, da cui $\vec{w} = a\vec{u} - a\vec{v} = a(\vec{u} - \vec{v})$.
Per la terza condizione: la proiezione è $\dfrac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} = \dfrac{(a\vec{u}+b\vec{v})\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} = \dfrac{3a}{5}(1,2,0)$ che ha modulo $\dfrac{|\,3a\,|}{5} \mid (1,2,0) \mid = \dfrac{|\,3a\,|}{\sqrt{5}}$, da cui $a = \pm\sqrt{5}/3$. Ci sono dunque due soluzioni al problema: $\vec{w} = \pm(\sqrt{5}/3, \sqrt{5}/3, \sqrt{5}/3)$.

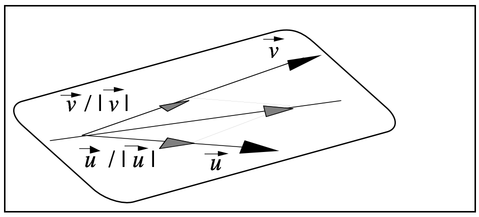
17. Si ha: $\vec{v} = a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2 = (a, 2a+b, -a-b)$. Ponendo $\vec{v}\cdot\vec{v}_2 = 0$ si ricava $2a + b = 0$, da cui, per esempio $a = 1$; $b = -2$ e $\vec{v} = (1,0,1)$. Allora il vettore cercato sarà il normalizzato di $\vec{v}$ oppure il suo opposto. Per esempio $\vec{v} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,,\,0\,,\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

18. I vettori sono (x,y) e occorre che $\dfrac{(x,y)\cdot(-1,2)}{|\,(x,y)\,|\,|\,(-1,2)\,|} = \dfrac{1}{2}$, cioè $\dfrac{-x+2y}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}$, da cui $-2x+4y = \sqrt{5x^2+5y^2}$. Possiamo elevare a quadrato questa equazione supponendo $-2x+4y > 0$ e si ottiene $x^2 + 16xy - 11y^2 = 0$ o anche (ponendo $y \neq 0$) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 16\left(\dfrac{x}{y}\right) - 11 = 0$ da cui $(x/y) = -8 \pm 5\sqrt{3}$. I vettori sono quindi $((-8\pm5\sqrt{3})y, y)$, ma occorre che $-x+2y > 0$, cioè che $(8 \mp 5\sqrt{3})y + 2y > 0$ e, dato che $10 \mp 5\sqrt{3} > 0$ nei due casi (sia con "+" che con "−"), allora occorre che $y > 0$. Quindi i vettori sono $((-8\pm5\sqrt{3})y, y)$ con $y > 0$.

19. Sia $\vec{v} = (x,y,z)$. Si deve avere $\dfrac{(x,y,z)\cdot(1,1,0)}{|\,(x,y,z)\,|\,|\,(1,1,0)\,|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $(x,y,z)\cdot(0,1,1) = 0$, da cui il sistema $\left\{x + y = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ;\ y + z = 0\right\}$ equivalente a $\{z^2 + 2xz = 0\ ;\ y = -z\}$ (ma occorre porre $x+y > 0$ per elevare a quadrato la prima equazione). Quindi i sistemi equivalenti $\{z = 0\ ;\ y = -z\}$ e $\{z + 2x = 0\ ;\ y = -z\}$. Pertanto per la condizione posta i vettori sono $(x,0,0)$ con $x > 0$ e $(x, 2x, -2x)$ con $x > 0$.

20. a. I vettori ortogonali a $\vec{v}$ sono $a(3,1)$. Si deve avere $\dfrac{\vec{u}_1\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\vec{w} = \dfrac{a(3,1)\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\vec{w}$, da cui $(-1/5)(2,1) = (a\cdot 7/5)(2,1)$ e quindi $a = -1/7$. Pertanto $\vec{u}_1 = (-3/7, -1/7)$.
   b. Poniamo $\vec{u}_2 = (x,y)$. Allora $\dfrac{\vec{u}_2\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\vec{w} = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\vec{w}$, da cui $-\dfrac{1}{5}(2,1) = \dfrac{2x+y}{5}(2,1)$ e quindi le condizioni $2x + y = -1$ e $x^2 + y^2 = 1$ da cui $\vec{u}_2 = (-4/5, 3/5)$ oppure $\vec{u}_2 = (0,-1)$.

21. Occorre determinare la bisettrice dei due vettori nel loro piano. Se i due vettori hanno lo stesso modulo, allora un vettore della bisettrice è la loro somma, per cui basta normalizzarli. I vettori cercati sono quindi: $\lambda\left(\dfrac{\vec{u}}{|\,\vec{u}\,|} + \dfrac{\vec{v}}{|\,\vec{v}\,|}\right)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.

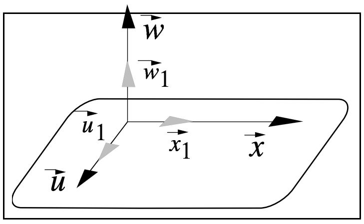


22. Occorre una base o.n. di $W = L\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$. I vettori di W sono del tipo $a(1,2,0) + b(0,-1,1) = (a, 2a-b, b)$. Cerchiamo un vettore di W ortogonale a $\vec{u}_1$: $(a, 2a-b, b)\cdot(1,2,0) = 0$ da cui $5a = 2b$, p.es. $a = 2$, $b = 5$ e si ottiene il vettore $(2,-1,5)$. Quindi una base ortogonale per W è p.es. $(1,2,0), (2,-1,5)$ e una o.n. è $\vec{v}_1 = (1,2,0)/\sqrt{5}$, $\vec{v}_2 = (2,-1,5)/\sqrt{30}$. La proiezione di $(1,0,0)$ su W è $((1,0,0)\cdot\vec{v}_1)\vec{v}_1 + ((1,0,0)\cdot\vec{v}_2)\vec{v}_2 = (1/3, 1/3, 1/3)$.
L'angolo θ è tale che $\cos(\theta) = \dfrac{(1,0,0)\cdot(1/3,1/3,1/3)}{|\,(1,0,0)\,\|\,(1/3,1/3,1/3)\,|} = \sqrt{1/3}$ con $0 < \theta < 2\pi$. Si ha $\theta \simeq 0.95$.

31. • Sì: è il prodotto scalare di due vettori ed è uno scalare.

- No: è ambiguo, dato che in generale $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ e $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ sono differenti.
- Sì: ed è un vettore.
- Sì: è il prodotto scalare del vettore $\vec{u} \wedge \vec{v}$ per il vettore $\vec{w}$ e dà luogo allo scalare prodotto misto.
- Sì: è la differenza di due vettori ed è un vettore.
- Sì: è il prodotto scalare del vettore $\vec{v} \wedge \vec{w}$ per il vettore $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ed è quindi uno scalare.

32. a. Ovvio dato che $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
    b. Ovvio dato che $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{0}$
33. Si ha che $| \vec{u} \wedge \vec{v} | = 4$ e che $\vec{v}$ e $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sono ortogonali, da qui la tesi.
34. La formula del doppio prodotto vettore è (dando opportuni nomi ai vettori) $\vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\vec{w} \cdot \vec{v})\vec{u} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v}$. Scambiando i fattori del primo prodotto vettore e quindi cambiando segno al secondo membro si ha: $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} - (\vec{w} \cdot \vec{v})\vec{u}$
41. Sono rispettivamente: $(-4, 4, 0)$; $(2, -1, -7)$
42. Basta per esempio che sia: $\vec{u} = \vec{w}$ (cfr. es. 34)
43. Bisogna che $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$. In tal caso ha come soluzione almeno il vettore $\vec{x} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) / | \vec{u} |^2$. Infatti, ponendo $\vec{u}_1 = \vec{u} / | \vec{u} |$ e $\vec{w}_1 = \vec{w} / | \vec{w} |$ e $\vec{x}_1 = \vec{w}_1 \wedge \vec{u}_1$, la terna $\vec{w}_1, \vec{u}_1, \vec{x}_1$ è o.n. destrorsa e $\vec{u}_1 \wedge \vec{x}_1 = \vec{w}_1$, da cui si vede subito che $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{w}$, da cui $| \vec{w} || \vec{u} | \vec{u}_1 \wedge \vec{x}_1 = | \vec{w} || \vec{u} | \vec{w}_1$, cioè $| \vec{w} | \vec{u} \wedge \vec{x}_1 = | \vec{u} | \vec{w}$ equivalente a $| \vec{w} | \vec{u} \wedge \dfrac{\vec{w} \wedge \vec{u}}{| \vec{w} || \vec{u} |} = | \vec{u} | \vec{w}$, da cui $| \vec{w} | \vec{u} \wedge \dfrac{\vec{w} \wedge \vec{u}}{| \vec{w} || \vec{u} |} = | \vec{u} | \vec{w}$ e quindi $\vec{u} \wedge \dfrac{\vec{w} \wedge \vec{u}}{| \vec{u} |^2} = \vec{w}$. Se invece $\vec{w}$ non è ortogonale a $\vec{u}$, allora chiaramente $\vec{w}$ non è risultato di un prodotto vettore di $\vec{u}$.



44. Come nell'esercizio precedente una soluzione è $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0) \wedge (\sqrt{2}/3, \sqrt{2}/3, \sqrt{5}/3)$ (i vettori hanno modulo 1), e le altre si ottengono aggiungendo un vettore parallelo a $(\sqrt{2}/3, \sqrt{2}/3, \sqrt{5}/3)$. Le soluzioni sono:
$$(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0) \wedge (\sqrt{2}/3, \sqrt{2}/3, \sqrt{5}/3) + \lambda(\sqrt{2}/3, \sqrt{2}/3, \sqrt{5}/3) =$$
$$= (-\sqrt{10}/6, -\sqrt{10}/6, 2/3) + \lambda(\sqrt{2}/3, \sqrt{2}/3, \sqrt{5}/3)$$
per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.
45. In questo caso conviene porre $\vec{x} = (a, b, c)$ ed eseguire il prodotto vettore. Le soluzioni sono: $\vec{x} = (a, 1 + 2a, 1)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
46. Sinistrorsa , destrorsa , destrorsa (basta controllare se il segno del determinante delle coordinate è positivo).