Ingegneria Navale **Esame del** 22 – 1 – 2009

1) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda-2 & 0 \\ 2\lambda & \lambda+1 & 2\lambda-2 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix} \underset{R_4 \to R_4 - R_1}{\overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda+2 & 2\lambda \end{pmatrix}$

$$\underset{R_4 \to R_4 - R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda \end{pmatrix} \underset{R_4 \to R_4 - R_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

per $\lambda \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ la matrice A ha quindi caratteristica $\rho(A) = 3$.

Per $\lambda = 0$, $A \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_2 \to R_2 + R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e A ha caratteristi $\rho(A) = 1$.

Per $\lambda = 1$, $A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e A ha caratteristica $\rho(A) = 3$.

Pertanto $\rho(A) = 3$per $\lambda \neq 0$, $\rho(A) = 1$ per $\lambda = 0$.

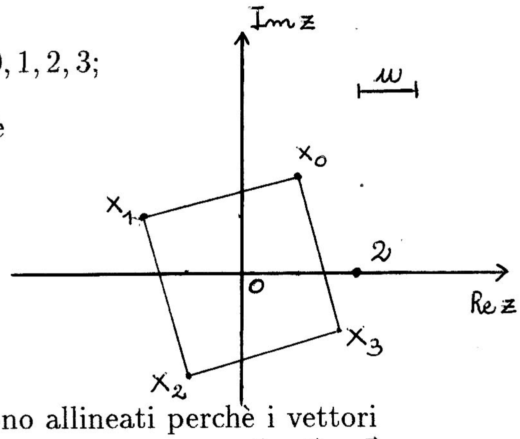
2) Poichè

$$-\frac{16}{e^{i\frac{125}{3}\pi}} = \frac{16e^{i\pi}}{e^{i\frac{5}{3}\pi}} = 16e^{-i\frac{2}{3}\pi} = 16e^{i\frac{4}{3}\pi},$$

le soluzioni dell'equazione $X^4 = -\frac{16}{e^{i\frac{125}{3}\pi}}$ sono

$$X_k = 2e^{i\frac{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi}{4}} \qquad \text{per} \qquad k = 0, 1, 2, 3;$$

la loro rappresentazione nel piano di Argand-Gauss è



3) a) I punti $O(0,0,0)$, $A(1,1,0)$, $B(3,-1,2)$ non sono allineati perchè i vettori $A-O = \vec{i}+\vec{j}$ e $B-O = 3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ non sono paralleli; $(A-O)\wedge(B-O) = 2\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$ è un vettore ortogonale al piano contenente O, A, B.

Il piano contenente i tre punti è allora $\alpha : 2x - 2y - 4z = 0$.
b) Il prodotto scalare fra i vettori $B - A = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ e $A - O = \vec{i} + \vec{j}$ è $(B - A) \cdot (A - O) = 0$ quindi i due vettori sono ortogonali fra loro e il triangolo ABO è rettangolo in A.
c) Esprimiamo la circonferenza $\mathcal{C}$ di diametro $\overline{AB}$ e avente in A la retta tangente AO come intersezione del piano α e della sfera avente come centro il punto medio M di $\overline{AB}$ e come raggio R il segmento $\overline{MA}$.

Poichè $M(2, 0, 1)$ e $R = \sqrt{3}$ si ha

$$\mathcal{C} : \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \end{cases} .$$