Geometria(SV) **Esame del** $8-1-2009$

1) a) Il polinomio caratteristico di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ è

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(2-\lambda)^2 + 9].$$

L'unico autovalore di A è $\lambda = 1$ con molteplicità 1. La matrice A non è diagonalizzabile perchè la somma delle molteplicità dei suoi autovalori (come radici di $P_A(\lambda)$) è diversa dal suo ordine che è 3.
b) Poichè

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_2]{R_2 \leftrightarrow R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - \frac{10}{9}R_2]{R_2 \to \frac{1}{9}R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

l'autospazio associato a all'autovalore 1 ed una sua base sono rispettivamente

$$V_1 = \{(X, 0, 0)/X \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad B_{V_1} = \{(1, 0, 0)\}.$$

Come base di $\mathbb{R}^3$ contenente il massimo numero di autovettori di A scegliamo la base canonica $E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.
c) Poichè $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$ la matrice A è invertibile. È allora possibile trovare $X \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ moltiplicando a sinistra per A^{-1} ambo i membri dell'equazione; si ottiene $X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calcoliamo A^{-1}.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to \frac{2}{13}(R_3 - \frac{3}{2}R_2)]{R_2 \to \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{array}\right)$$

$$\underset{R_2 \to R_2 + \frac{3}{2}R_3}{\overset{R_1 \to R_1 - 3R_3}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & \frac{9}{13} & -\frac{6}{13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{array}\right) \underset{R_1 \to R_1 - 2R_2}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{array}\right) = (I|A^{-1}). \text{ Pertanto } X = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & -7 & -8 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

2) I vettori $\vec{v}_r = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v}_s = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ paralleli a $r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = t - 3 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$ rispettivamente non sono paralleli quindi r ed s non sono parallele. Inoltre $r \cap s = \phi$ perchè $\begin{cases} 2 + t - 2t + 6 = 0 \\ -t - t + 3 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 8 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$ .Dunque r e s sono sghembe. Imponendo che $(P_r - P_s) \cdot \vec{v}_r = (P_r - P_s) \cdot \vec{v}_s = 0$, dove $P_r(2 + t, -t, t - 3)$ e $P_s(2v, v + 2, v)$ $(v \in \mathbb{R})$ sono i generici punti di r e s rispettivamente, si ottiene $\begin{cases} 3t - 2v + 1 = 0 \\ 2t - 6v - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{4}{7} \\ v = -\frac{5}{14} \end{cases}$. Le coordinate dei punti H e K intersezione di r e s con la retta t incidente entrambe e ad esse ortogonale ed una rappresentazione parametrica di t sono rispettivamente

$$H(\frac{10}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{25}{7}), \qquad K(-\frac{5}{7}, \frac{23}{14}, -\frac{5}{14}), \qquad t : \begin{cases} x = \frac{10}{7} + \frac{15}{7}t \\ y = \frac{4}{7} - \frac{15}{14}t \\ z = -\frac{25}{7} - \frac{45}{14}t \end{cases}.$$

3) La dimensione del sottospazio di $\mathbb{C}^4_{\mathbb{C}}$

$$V = L((2i, 1, i, 0), (i, -1, 1, 1), (3i, 3, 2i - 1, -1), (i, 2, i - 1, -1))$$

è la caratteristica della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2i & i & 3i & i \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ i & 1 & 2i - 1 & i - 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - iR_2}{\overset{R_2 \leftrightarrow R_1 - 2iR_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3i & -3i & -3i \\ 0 & 1 + i & -1 - i & -1 - i \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_3 \to \frac{1}{1+i}R_3}{\overset{R_2 \to \frac{1}{3i}R_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{R_4 \to R_4 - R_2}{\overset{R_3 \to R_3 - R_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $\dim V = \rho(M) = 2$ e $B = \{(2i, 1, i, 0), (i, -1, 1, 1)\}$ è una base di V.

$S = \{(2i, 1, i, 0), (i, -1, 1, 1), (3i, 3, 2i-1, -1), (i, 2, i-1, -1)\}$ è un sistema di generatori di V non base.

Poichè $\begin{vmatrix} 2i & i & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ i & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3i \neq 0$ un base di $\mathbb{C}^4$ contenente B è

$$B_{\mathbb{C}^4} = \{(2i, 1, i, 0), (i, -1, 1, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$