Ingegneria Meccanica **Esame del** $13-2-2009$

1) Il centro $C(x,y,z)$ di ciascuna sfera passante per $A_1(1,0,0)$, $A_2(-1,2,0)$, $A_3(0,0,3)$ dovendo essere equidistante da A_1, A_2, A_3, deve soddisfare alle condizioni

$$(x-1)^2+y^2+z^2=(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=x^2+y^2+(z-3)^2 \Rightarrow \begin{cases} -2x+1=2x-4y+5 \\ -2x+1=-6z+9 \end{cases}$$

e quindi appartiene alla retta $r:\begin{cases} x-y+1=0 \\ x-3z+4=0 \end{cases}$. I centri delle sfere S per gli A_i e aventi raggio $\sqrt{34}$ sono i punti $C_t(3t-4,3t-3,t)$ di r aventi distanza $\sqrt{34}$ da uno degli A_i, ad esempio A_1. La condizione

$$(3t-5)^2+(3t-3)^2+t^2=34 \Rightarrow 19t^2-48t=0 \Rightarrow t=0 \cup t=\frac{48}{19}.$$

Si ha allora

$$C_{t=0}(-4,-3,0), \qquad C_{t=\frac{48}{19}}\left(\frac{68}{19},\frac{87}{19},\frac{48}{19}\right),$$

$$S_1:(x+4)^2+(y+3)^2+z^2=34 \qquad \text{e} \qquad S_2:(x-\frac{68}{19})^2+(y-\frac{87}{19})^2+(z-\frac{48}{19})^2=34.$$

2) I vettori $\vec{w}\in V_3$ ortogonali sia a $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ che a $\vec{v}=\vec{j}+\vec{k}$ tali che il volume del parallelepipedo individuato da $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sia 36 sono i $\vec{w}_\lambda=\lambda\vec{u}\wedge\vec{v}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, tali che $|\vec{u}\wedge\vec{v}\cdot\vec{w}_\lambda|=36$, cioè tali che $|-18\lambda|=36$. Poichè $|-18\lambda|=36 \Rightarrow \lambda=\mp 2$ si hanno i vettori

$$\vec{w}_{-2}=-8\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k} \qquad \text{e} \qquad \vec{w}_2=8\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}.$$

3) Il polinomio caratteristico di $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & k \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{R})$ è

$$P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 3 & 3 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & k \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(-1-\lambda)^2(\lambda^2-2\lambda-3).$$

Gli autovalori λ_i di A con le relative molteplicità r_i sono

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{con} \quad r_1 = 3 \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = 3 \quad \text{con} \quad r_2 = 1.$$

Poichè $\sum_{i=1}^{2} r_i = 4$ la prima condizione del criterio necessario sufficiente per la diagonalizzabilità di A è verificata. L'autovalore $\lambda_2 = 3$ verifica la seconda condizione perchè è radice semplice di $P_A(\lambda)$ quindi A è diagonalizzabile se e solo se $\rho(A+I) = 1$. Poichè $(A+I) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ A è diagonalizzabile solo se $k = 0$. Una matrice diagonale simile ad $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ è

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

L'autospazio associato a $\lambda_1 = -1$ e una sua base sono

$$V_{-1} = \{(-y-z-t, y, z, y)/y, z, t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad B_{V_{-1}} = \{(1,-1,0,0), (1,0,-1,0), (1,0,0,-1)\}.$$

Poichè $(A-3I) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} R_1 \to -R_1 \\ R_2 \to \frac{R_2+R_1}{4} \\ \longrightarrow \\ R_3 \to -\frac{1}{4}R_3 \\ R_4 \to -\frac{1}{4}R_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\underset{R_2 - (R_3+R_4) \to -\frac{1}{4}R_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'autospazio associato a $\lambda_2 = 3$ e una sua base sono

$$V_3 = \{(3y, y, 0, 0)/y \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad B_{V_3} = \{(3,1,0,0)\}.$$

Scegliamo $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.