Geometria(SV) **Esame del** $8-1-2009$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) a) Dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile;
b) scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ contenente il massimo numero di autovettori di A.
c) Trovare, se è possibile, una matrice $X \in M_3(\mathbb{R})$ tale che

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Fissato nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$, provare che le rette

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = t - 3 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

sono sghembe e trovare le coordinate dei punti H e K intersezione di r e s con la retta t ad esse ortogonale e incidente entrambe. Trovare una rappresentazione parametrica di t.

3) Trovare la dimensione ed una base B del sottospazio di $\mathbb{C}^4_{\mathbb{C}}$

$$V = L((2i, 1, i, 0), (i, -1, 1, 1), (3i, 3, 2i - 1, -1), (i, 2, i - 1, -1)).$$

Scrivere un sistema di generatori non base di V. Completare B ad una base di $\mathbb{C}^4$.