Ingegneria Navale **Esame del** $9-1-2009$

1) $S:(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=25$ è la sfera di centro $C(-1,3,2)$ e ragio $R=5$. Imponendo che il generico piano $\pi_\lambda : x-2y+2z+\lambda=0$ ($\lambda\in\mathbb{R}$) del fascio di piani paralleli a $\pi : x-2y+2z+6=0$ abbia distanza $\sqrt{R^2-16}=\sqrt{25-16}=3$ da C si ottiene

$$\frac{|\lambda-3|}{3}=3\Rightarrow|\lambda-3|=9\to\lambda=12\cup\lambda=-6.$$

Pertanto i piani paralleli a π che tagliano S secondo circonferenze di raggio 4 sono

$$\alpha : x-2y+2z+12=0 \qquad \text{e} \qquad \beta : x-2y+2z-6=0.$$

2)

$$\alpha=32\frac{(1-i)^{11}i^{1218}}{(1+i\sqrt{3})^{18}}=32\frac{(\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi})^{11}(i^4)^{304}i^2}{(2e^{i\frac{\pi}{3}})^{18}}=2^{10}\sqrt{2}\frac{e^{i\frac{5}{4}\pi}e^{i\pi}}{2^{18}}=\frac{\sqrt{2}}{2^8}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Forma trigonometrica ed esponenziale di α sono rispettivamente

$$\frac{\sqrt{2}}{2^8}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}) \qquad \text{e} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2^8}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Le soluzioni in $\mathbb{C}$ di $e^z=\alpha$ sono

$$z_k=\lg\frac{\sqrt{2}}{2^8}+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi) \qquad \text{con} \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

3) Il polinomio caratteristico di $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$ è

$$P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&1\\-1&2-\lambda&-1\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda-3).$$

Gli autovalori λ_i di A con le rispettive mplteplicità r_i sono

$$\lambda_1=0 \quad \text{con} \quad r_1=2 \qquad \text{e} \qquad \lambda_2=3 \quad \text{con} \quad r_2=1.$$

La prima condizione del criterio necessario sufficiente per la diagonalizzabilità di A è verificata perchè la somma delle molteplicità dei suoi autovalori come radici di $P_A(\lambda)$ è 3 come il suo ordine n. Gli autovalori $\lambda_2=3$ e $\lambda_1=0$ verificano la seconda condizione del criterio rispettivamente perchè $r_2 = 1$ e perchè $\rho(A) = 1 = 3 - 2 = n - r_1$. Pertanto A è diagonalizzabile e una matrice diagonale simile ad A è $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

L'autospazio V_0 associato all'autovalore 0 ed una sua base sono rispettivamente

$$V_0 = \{(2X_2 - X_3, X_2, X_3)/X_2, X_3 \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad B_{V_0} = \{(2,1,0),(1,0,-1)\}.$$

Poichè

$$(A - 3I) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{-R_2 \leftrightarrow R_1 - 2R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} R_1 \to R_1 - \frac{1}{3}R_2 \\ \longrightarrow \\ R_2 \to \frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \to R_3 + R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

l'autospazio V_3 associato all'autovalore 3 ed una sua base sono rispettivamente

$$V_3 = \{(-X_2, X_2, 0)/X_2 \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad B_{V_3} = \{(1,-1,0)\};$$

una matrice $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $\Delta = P^{-1}AP$ è $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.