Ingegneria Meccanica **Esame del** $9-1-2009$

1) La circonferenza $\mathcal{C}: \begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x+2y-4z-2=0 \\ x^2+y^2+z^2-3x+3y-2z=0 \end{cases}$ è anche intersezione della sfera $S_1 : x^2+y^2+z^2-4x+2y-4z-2=0$ e del piano $\pi : x+y+2z+2=0$. La sfera $S_1 : (x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=11$ ha centro $C(2,-1,2)$ e raggio $R=\sqrt{11}$. La distanza di C da π è $d(C,\pi)=\frac{7}{\sqrt{6}}$, pertanto il raggio di $\mathcal{C}$ è

$$r=\sqrt{R^2-d^2(C,\pi)}=\sqrt{11-\frac{49}{6}}=\sqrt{\frac{17}{6}}.$$

Imponendo al generico punto $P_t(2+t,-1-t,2+3t)$ della retta per $P(1,0,-1)$ e C di appartenere al piano $\alpha : 2x+3y-z+5=0$ si ottiene $t=1$. La sfera $\overline{S}$ tangente in P a S_1 ha dunque centro $\overline{C}(3,-2,5)$, il suo raggio è $d(\overline{C},P)=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$ e la sua equazione è $\overline{S}:(x-3)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=44$.

2) Poichè $P(X)\in\mathbb{R}[X]$ deve essere di grado minimo e deve avere la radice semplice 3 e la radice doppia $2+i$ (quindi anche la radice doppia $2-i$) sarà

$$P(X)=(X-3)(X^2-4X+5)^2Q(X)$$

con $Q(X)\in\mathbb{R}[X]$ di grado minimo tale che $Q(3)\neq 0$ e $Q(2+i)\neq 0$.

Deve inoltre essere $P(i)=32$.

Poichè $P(i)=32(1+3i)Q(i)$ il polinomio $Q(X)$ non può essere di grado 0. Sia $Q(X)=a_0+a_1(X)$, con $a_0,a_1\in\mathbb{R}$. La condizione

$$32(1+3i)(a_0+a_1 i)=32 \Rightarrow a_0-3a_1+(3a_0+a_1)i=1 \Rightarrow$$

$$a_0-3a_1-1=3a_0+a_1=0 \Rightarrow a_0=\frac{1}{10}\cup a_1=-\frac{3}{10}.$$

Pertanto $Q(X)=\frac{1}{10}-\frac{3}{10}X$. Poichè $Q(3)\neq 0$ e $Q(2+i)\neq 0$ possiamo scrivere

$$P(X)=(X-3)(X^2-4X+5)^2(\frac{1}{10}-\frac{3}{10}X).$$

3) Il polinomio caratteristico di $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{R})$ è

$$P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^4.$$

L'unico autovalore di A è $\lambda = 0$ con molteplicità $r = 4$. Poichè

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} R_2 \to R_2 + R_1 \\ \longrightarrow \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho(A) = 2$. Pertanto A non è diagonalizzabile perchè $2 = \rho(A) \neq n - r = 4 - 4 = 0$, dove n è l'ordine della matrice A.

L'autospazio associato a $\lambda = 0$ ed una sua base sono rispettivamente

$$V_0 = \{(-2X_2 - X_3, X_2, X_3, 0)/X_2, X_3 \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad B_{V_0} = \{(2, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0)\}.$$

Poichè $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ una base di $\mathbb{R}^4$ contenente il massimo numero di autovettori di A è

$$B_{\mathbb{R}^4} = \{(2, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$