Ingegneria Meccanica **Esame del** 22 – 1 – 2009

1) Poichè $-2i = 2e^{i\frac{3}{2}\pi}$, le soluzioni in $\mathbb{C}$ di $X^2 - 4X + 4 + 2i = 0$, cioè le $x \in \mathbb{C}$ tali che $(x-2)^2 = -2i$, sono

$$x_k = 2 + \sqrt{2}e^{i\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{2}} \qquad \text{per} \qquad k = 0, 1;$$

cioè

$$x_0 = 2+\sqrt{2}(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi) = 1+i \qquad \text{e} \qquad x_1 = 2+\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi) = 3-i.$$

La parte reale e il coefficiente dell'immaginario di ciascuna soluzione dell'equazione $X^2 - 4X + 4 + 2i = 0$ sono allora:

$$\mathrm{Re}x_0 = 1 \quad \mathrm{Im}x_0 = 1 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Re}x_1 = 3 \quad \mathrm{Im}x_1 = -1.$$

2) $V_\lambda = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+\lambda z = x+\lambda y+z = \lambda x+y+z = 0\}$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo che ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$ come matrice incompleta, pertanto si ha $\dim V_\lambda = 3 - \rho(A)$, dove $\rho(A)$ è la caratteristica di A. Poichè

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ \longrightarrow \\ R_3 \to R_3 - \lambda R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ R_3 \to R_3 + R_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & (\lambda+2)(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

per $\lambda \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$ si ha $\dim V_\lambda = 3 - 3 = 0$, pertanto $V_\lambda = \{(0,0,0)\}$ e la base di V_λ è costituita dall'insieme vuoto ϕ.

Per $\lambda = 1$, $A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ quindi

$\dim V_1 = 3 - 1 = 2, \quad V_1 = \{(-y-z, y, z)/y, z \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad B_{V_1} = \{(1,-1,0),(1,0,-1)\}.$

Per $\lambda = -2$, $A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to -\frac{1}{3}R_2 \\ \longrightarrow \\ R_1 \to R_1 + \frac{1}{3}R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ quindi

$\dim V_{-2} = 3 - 2 = 1, \quad V_{-2} = \{(z,z,z)/z \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad B_{V_{-2}} = \{(1,1,1)\}.$

3) a) $s : \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}$ è una rappresentazione parametrica di $s : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$

$P = r \cap s$ è il punto di s le cui coordinate soddisfano le equazioni $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$

di r; poichè $\begin{cases} (2t - 3) - (3 - 2t) - 2 = 0 \\ (3 - 2t) + t - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$ si ha $P(1, -1, 2)$.

b) Imponendo al fascio di piani $(\lambda + \mu)x + \lambda y - 2\mu z + 3\mu = 0$ di asse s il passaggio per il punto $Q(2, 0, 1)$ di r si ottiene $2\lambda = -3\mu$, quindi $\pi : x + 3y + 4z - 6 = 0$ è il piano contenente r ed s.

c) Sia $S_t(2t - 3, 3 - 2t, t)$ il generico punto di s; l'area di ciascun triangolo PS_tQ è $A_t = \frac{|(S_t - P) \wedge (Q - P)|}{2}$.

Poichè $S_t - P = (2t - 4)\vec{i} + (4 - 2t)\vec{j} + (t - 2)\vec{k}$ e $Q - P = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ si ha $(S_t - P) \wedge (Q - P) = (t - 2)\vec{i} + 3(t - 2)\vec{j} + 4(t - 2)\vec{k}$ e quindi $A_t = \frac{\sqrt{26(t-2)^2}}{2}$.

Imponendo che $A_t = \sqrt{26}$ si ottengono per t i valori $t = 4$ e $t = 0$.

Pertanto i punti di $S_t \in s$ per i quali il triangolo PS_tQ ha area $\sqrt{26}$ sono $S_4(5, -5, 4)$ e $S_0(-3, 3, 0)$.