Geometria(SV) **Esame del** $21-1-2009$

1) a) Poichè $-81=3^4e^{i\pi}$ le radici in $\mathbb{C}$ delpolinomio $P(X)=X^4+81$ sono

$$X_k=3e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}} \qquad \text{per} \qquad k=0,1,2,3,$$

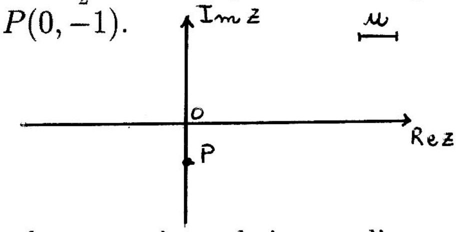
quindi $X_0=3e^{i\frac{\pi}{4}}=3\frac{\sqrt{2}}{2}+i3\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad X_1=3e^{i\frac{3}{4}\pi}=-3\frac{\sqrt{2}}{2}+i3\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$X_2=3e^{i\frac{5}{4}\pi}=-3\frac{\sqrt{2}}{2}-i3\frac{\sqrt{2}}{2}=\overline{X}_1$, $\quad X_3=3e^{i\frac{7}{4}\pi}=3\frac{\sqrt{2}}{2}-i3\frac{\sqrt{2}}{2}=\overline{X}_0$.

Per il teorema di Ruffini possiamo scrivere:
$P(X)=(X-3\frac{\sqrt{2}}{2}-i3\frac{\sqrt{2}}{2})(X-3\frac{\sqrt{2}}{2}+i3\frac{\sqrt{2}}{2})(X+3\frac{\sqrt{2}}{2}-i3\frac{\sqrt{2}}{2})(X+3\frac{\sqrt{2}}{2}+i3\frac{\sqrt{2}}{2})$.

La scomposizione in fattori reali di grado minimo di $P(X)=X^4+81$ è allora

$$P(X)=(X^2-3\sqrt{2}X+9)(X^2+3\sqrt{2}X+9).$$

b) Si ha $z=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{2}=-i$, pertanto nel piano di Argand-Gauss a z corrisponde il punto $P(0,-1)$.



2) La matrice completa associata al sistema lineare è

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda+4 & 3 & \lambda+1 & 3\lambda \\ 4 & \lambda & 4-\lambda & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1-\frac{\lambda+4}{2}R_3 \leftrightarrow \frac{1}{2}R_3 \\ \longrightarrow \\ R_2\to R_2-2R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & \frac{2-\lambda}{2} & \frac{\lambda-2}{2} & 2\lambda-4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ R_3\to R_3+\frac{1}{2}R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda-4 \end{array}\right);$$

pertanto per $\lambda\in\mathbb{R}-\{2\}$ il sistema è incompatibile.

Per $\lambda=2$ $(A|b)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, pertanto il sistema è compatibile e ha le ∞^2 soluzioni $\{(1-\frac{1}{2}X_2-\frac{1}{2}X_3, X_2, X_3)/X_2,X_3\in\mathbb{R}\}$.

3) a) Il punto $P=r\cap\pi$ è il punto $P(1+t,2-t,3+2t)\in r$ le cui coordinate soddisfano l'equazione del piano $\pi: 2x-3y+z-6=0$.
Poichè $2(1+t)-3(2-t)+(3+2t)-6=0\Rightarrow t=1$ si ha $P(2,1,5)$.

b) Imponendo che il generico punto $P_t(1+t, 2-t, 3+2t)$ di r disti $\sqrt{14}$ da π si ottiene $\frac{|7t-7|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \Rightarrow |t-1| = 2 \Rightarrow t = -1 \cup t = 3$. I punti di r che distano $\sqrt{14}$ da π sono allora

$$P_{-1}(0,3,1) \qquad \text{e} \qquad P_3(4,-1,9).$$

c) Esprimiamo la retta s di π incidente e ortogonale ad r come intersezione di π e del piano α per P e ortogonale ad r. Poichè l'equazione di α è $x - y + 2z - 11 = 0$ si ha $s : \begin{cases} 2x - 3y + z - 6 = 0 \\ x - y + 2z - 11 = 0 \end{cases}$.