Geometria **Ingegneria Navale** **Esame del** $7-2-2012$

1) a) Le rette $r:\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=-1-2t\end{cases}$ e $s:\begin{cases}x=2-2t\\y=2-t\\z=1+t\end{cases}$ sono sghembe. Infatti esse non sono parallele in quanto $\vec{u}_r=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, parallelo a r, e $\vec{u}_s=-2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, parallelo a s, non sono proporzionali e r e s non sono incidenti perchè il sistema $\begin{cases}2+t=2-2v\\-1+t=2-v\\-1-2t=1+v\end{cases}$ equivalente a $\begin{cases}t+2v=0\\t+v=3\\-2t-v=2\end{cases}$ è incompatibile:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&0\\1&1&3\\-2&-1&2\end{array}\right)\underset{R_3\to R_3+2R_1}{\overset{R_2\to-(R_2-R_1)}{\longrightarrow}}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&0\\0&1&-3\\0&3&2\end{array}\right)\underset{R_3\to R_3-3R_2}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&0\\0&1&-3\\0&0&11\end{array}\right).$$

b) La proiezione ortogonale di $P(3,2,3)$ su r è il punto H intersezione di r con il piano $\pi: x+y-2z+1=0$ per P e ortogonale a r; un punto di r soddisfa l'equazione di π se e solo se $t=-\frac{2}{3}$ quindi si ha $H(\frac{4}{3},-\frac{5}{3},\frac{1}{3})$.
La retta per P e ortogonale sia a r che a s è intersezione del piano $x+y-2z+1=0$ per P e ortogonale a r e del piano $2x+y-z-5=0$ per P e ortogonale a s, quindi una sua rappresentazione cartesiana è $t:\begin{cases}x+y-2z+1=0\\2x+y-z-5=0\end{cases}$.
c) La sfera S di raggio minimo tangente sia a r che a s ha come centro il punto medio M del segmento di estremi i punti A e B in cui la retta perpendicolare p (ortogonale e incidente) a r e s le incide e raggio $R=AM=MB$. Una qualsiasi retta ortogonale a r e s è parallela a t e quindi a $\vec{u}_t=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\wedge 2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$, pertanto $A(2+t,-1+t,-1-2t)\in r$ e $B(2-2v,2-v,1+v)\in s$ sono i punti di incidenza di p con r e $s \iff A-B \parallel \vec{u}_t \iff \frac{t+2v}{1}=\frac{-3+t+v}{-3}=\frac{-2-2t-v}{-1}$ $\Longrightarrow\begin{cases}4t+7v=3\\t-v=-2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}t=-1\\v=1\end{cases}$, quindi $A(1,-2,1)$, $B(0,1,2)$, $M(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ e $R=\frac{\sqrt{11}}{2}$. Una rappresentazione cartesiana di S è $(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z-\frac{3}{2})^2=\frac{11}{4}$.

2) $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(0,0,1)$ sono le coordinate rispettivamente di $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ rispetto alla base $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}\iff\begin{cases}\vec{i}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\\\vec{j}=\vec{v}+\vec{w}\\\vec{k}=\vec{w}\end{cases}$, risolvendo con il metodo di sostituzione a ritroso si ottiene $\begin{cases}\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}\\\vec{v}=\vec{j}-\vec{k}\\\vec{w}=\vec{k}\end{cases}$; pertanto $B=\{\vec{i}-\vec{j},\vec{j}-\vec{k},\vec{k}\}$. Poiché

B è base, ogni vettore di V_3 si esprime in modo unico come combinazione lineare degli elementi di B. In particolare esiste ed è unica $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$a(\vec{i}-\vec{j})+b(\vec{j}-\vec{k})+c\vec{k} = \vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k} \Longleftrightarrow a\vec{i}+(b-a)\vec{j}+(c-b)\vec{k} = \vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k} \Longrightarrow a=1, b=-1, c=2.$$

Pertanto $(1,-1,2)$ sono le coordinate di $\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ rispetto a B.
b) $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \in V_3$ appartiene al sottospazio W dei vettori ortogonali a $\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ se e solo se $(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot(\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}) = 0 \Longleftrightarrow x-2y+3z=0 \Longrightarrow x=2y-3z$. Pertanto

$$W = \{(2y-3z)\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}/y,z \in \mathbb{R}\} = \{y(2\vec{i}+\vec{j})+z(-3\vec{i}+\vec{k})/y,z \in \mathbb{R}\} = L(2\vec{i}+\vec{j},-3\vec{i}+\vec{k}) = L(S).$$

Il sistema di generatori S è anche base di W perchè i suoi due vettori non sono proporzionali e nessuno dei due è il vettore nullo; pertanto $B_W = \{2\vec{i}+\vec{j},-3\vec{i}+\vec{k}\}$ è una base di W. $S' = \{2\vec{i}+\vec{j},-3\vec{i}+\vec{k},\vec{0}\}$ è un sistema di generatori di W non base perchè contiene una base di W, ma è costituito da vettori linearmente dipendenti.

3) $(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & k & -1 & 1 \\ 1 & k+1 & k & -k & k+1 \\ 1 & 3 & 2 & -k & 3 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - R_1}{\overset{R_2 \to R_2 - R_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & k & -1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & -k+1 & k \\ 0 & 1 & 2-k & -k+1 & 2 \end{array}\right)$

$$\underset{R_3 \leftrightarrow R_2-(k-1)R_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & k & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2-k & 1-k & 2 \\ 0 & 0 & (k-2)(k-1) & (k-2)(k-1) & 2-k \end{array}\right) \underset{R_3 \to \frac{1}{(k-2)(k-1)}R_3}{\overset{k \neq 1,2}{\longrightarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & k & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2-k & 1-k & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{1-k} \end{array}\right) \underset{R_1 \to R_1 - kR_3}{\overset{R_2 \to R_2 + (k-2)R_3}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1-k & \frac{1-2k}{1-k} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{k}{k-1} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{1-k} \end{array}\right)$$

$$\underset{R_1 \to R_1 - 2R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-k & \frac{1}{1-k} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{k}{k-1} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{1-k} \end{array}\right).$$

Per $k \in \mathbb{R} - \{1,2\}$ il sistema è compatibile e ha le ∞^1 soluzioni

$$\{(\frac{1}{1-k}+(k-1)T, \frac{k}{k-1}+T, \frac{1}{1-k}-T, T)/T \in \mathbb{R}\};$$

per $k=1$ $(A|b) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, pertanto il sistema è incompatibile;
per $k=2$ $(A|b) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{R_1 \to R_1 - 2R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, il sistema è compatibile e ha le ∞^2 soluzioni $\{(-3-2Z-T, 2+T, Z, T)/Z,T \in \mathbb{R}\}$.

4) La matrice $A\,B$ è invertibile perchè prodotto di matrici invertibili infatti si ha $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ e $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, pertanto $X \in M_2(\mathbb{R})$ tale

che $A\,B\,X = A\,B - A$ esiste e si ottiene moltiplicando a sinistra ambo i membri dell'uguaglianza per $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$. Si ha perciò $X = I - B^{-1}$. Poiché $B^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ si ha $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.