Geometria **Ingegneria Meccanica** **Esame del** $7-2-2012$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Fissato nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$, siano $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - z - 1 = 0$ e $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 2y - 3z + 1 = 0$.
a) Provare che $\mathcal{C} = S_1 \cap S_2$ è una circonferenza;
b) trovare raggio e centro di $\mathcal{C}$ e scrivere una rappresentazione cartesiana della retta tangente a $\mathcal{C}$ in $P(1, 1, 1)$;
c) Scrivere una rappresentazione cartesiana della sfera contenente $\mathcal{C}$ e passante per $Q(2, 1, 0)$ e della circonferenza di raggio massimo di S_1 giacente su un piano parallelo ad $\alpha : 2x + 3y - z + 3 = 0$.
(10 punti)

2) In $M_{23}(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi

$$V = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{e} \quad W = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & -b & c \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R}\right\}.$$

a) con il metodo degli scarti successivi trovare una base sia per V che per W e specificare la loro dimensione;
b) Dire se $U = \{A \in V / A \in W\}$ è un sottospazio di $M_{23}(\mathbb{R})$ e, in caso affermativo, trovarne la dimensione, una base e un sistema di generatori non base;
c) trovare due sottospazi propri W_1 e W_2 di $M_{23}(\mathbb{R})$ tali che W_1 sia contenuto propriamente in W e W_2 contenga propriamente W.
(10 punti)

3) Scrivere un polinomio $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado minimo avente fra le radici i e 1 rispettivamente con molteplicità 2 e 4 e tale che $P(1 + i) = 2$.
(7 punti)

4) Sia $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Trovare tutte le matrici $A \in M_2(\mathbb{R})$ tali che $A\,B = B\,A$.
(3 punti)