Ingegneria Navale e Meccanica

Geometria **Esame del** $5-9-2011$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Discutere e quando è posibile risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} X+(\lambda+1)Y+(\lambda+2)Z=3 \\ -X+(\lambda+2)Y+(\lambda+1)Z=1 \\ 2X+\lambda Y+(\lambda+2)Z=2 \\ X-Y=\lambda \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
(7 punti)

2) Si fissi nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$.
a) Scrivere l'equazione cartesiana di ciascuna sfera avente il centro sulla retta $r: \begin{cases} x=t+2 \\ y=1-2t \\ z=t \end{cases}$ e tangente ai piani $\alpha: x+2y-z=0$ e $\beta: x+y+z=1$;
b) scrivere una rappresentazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su α.
(10 punti)

3) Siano $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Dire se la matrice reale A è diagonalizzabile e scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ contenente il massimo numero di autovettori di A.
b) Trovare, se esiste, $X \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $(A-B)X=C$.
(10 punti)

4) Assegnata $B \in M_2(\mathbb{R})$, dire se

$$W=\{A \in M_2(\mathbb{R}) / AB=BA\}$$

è sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.
(3 punti)

1) Si ha:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda+1 & \lambda+2 & 3 \\ -1 & \lambda+2 & \lambda+1 & 1 \\ 2 & \lambda & \lambda+2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & \lambda \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 - R_4 \leftrightarrow R_4 \\ \longrightarrow \\ R_2 \to R_2 + R_4 \\ R_3 \to R_3 - 2R_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda+2 & \lambda+2 & 2-2\lambda \\ 0 & \lambda+2 & \lambda+2 & 3-\lambda \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ R_4 \to R_4 - R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda+2 & \lambda+2 & 2-2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{array}\right).$$

Per $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$ il sistema è incompatibile.

Per $\lambda = -1$

$$(A|b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 \leftrightarrow R_3 \\ \longrightarrow \\ R_1 \to R_1 + R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

il sistema è compatibile e ha le ∞^1 soluzioni $\{(3-z, 4-z, z)/z \in \mathbb{R}\}$.

2) a) Le sfere cercate devono avere il il centro su $r : \begin{cases} x = t+2 \\ y = 1-2t \\ z = t \end{cases}$ ed essere tangenti ai piani $\alpha : x+2y-z = 0$ e $\beta : x+y+z = 1$, pertanto i loro centri sono i punti $C(t+2, 1-2t, t)$ equidistanti da α e β. La condizione

$$\frac{(t+2+2-4t-t)^2}{6} = \frac{(t+2+1-2t+t-1)^2}{3} \Longrightarrow t = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Le due sfere cercate sono quelle di centro $C(3 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 \mp \frac{2}{\sqrt{2}}, 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ e raggio $2/\sqrt{3}$, di equazioni

$$S : (x - 3 \mp \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (y + 1 \pm \frac{2}{\sqrt{2}})^2 + (z - 1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 4/3.$$

b) Una rappresentazione cartesiana di r è $r : \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$; $\pi : y+2z-1 = 0$ è il piano per r e ortogonale ad $\alpha : x+2y-z = 0$, pertanto una rappresentazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su α è $\begin{cases} y + 2z - 1 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$.

3) a) Il polinomio caratteristico di $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è $|A - \lambda I| = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$

che ha come unica radice reale semplice $\lambda = 0$, quindi A non è diagonalizzabile. Poiché

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - R_1}{\overset{R_2 \to \frac{1}{3}(R_2 - 2R_1)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - R_2}{\overset{R_1 \to R_1 + R_2}{\longrightarrow}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, l'autospazio V_0 associato all'autovalore $\lambda = 0$ di A ed una sua base sono rispettivamente

$$V_0 = \{(-z, z, z)/z \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad B_{V_0} = \{(1, -1, -1)\}.$$

Poiché $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ una base di $\mathbb{R}^3$ contenente il massimo numero di autovettori di A è

$$B_{\mathbb{R}^3} = \{(1, -1, -1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

b) Poiché $|A - B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ la matrice $(A - B)$ è invertibile; pertanto esiste $X \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $(A - B)X = C$ e si ha

$$X = (A - B)^{-1}C.$$

Calcoliamo $(A-B)^{-1}$. $(A-B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 \to -(R_3 + R_1)}{\overset{R_2 \to -R_2}{\longrightarrow}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{R_2 \to R_2 - R_3}{\overset{\longrightarrow}{}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) =$$

$= (I|(A - B)^{-1})$. Pertanto si ha

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4) Siano $A_1, A_2 \in W = \{A \in M_2(\mathbb{R})/AB = BA\}$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Tenendo conto che il prodotto di matrici gode della proprietà distributiva e associativa e che $A_1B = BA_1$ e $A_2B = BA_2$, si ha

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)B = \lambda_1(A_1B) + \lambda_2(A_2B) = \lambda_1(BA_1) + \lambda_2(BA_2) = B(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2);$$

quindi $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in W$ e W è sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.