Geometria **Ingegneria Meccanica** **Esame del** $7-2-2012$

1) a) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+y-z-1=0 \\ x^2+y^2+z^2-3x+2y-3z+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+y-z-1=0 \\ x-y+2z-2=0 \end{cases}$,
$\mathcal{C}$ è quindi intersezione della sfera $S_1 : (x-1)^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{2}$, di centro $C_1(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ e raggio $R_1=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, e del piano $\pi : x-y+2z-2=0$; poiché $d(C_1,\pi)=\frac{1}{2\sqrt{6}}<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=R_1$ $\mathcal{C}$ è una circonferenza.
b) $r=\sqrt{R_1^2-d^2(C_1,\pi)}=\sqrt{\frac{59}{24}}$ è il raggio di $\mathcal{C}$. Il centro di di $\mathcal{C}$ si ottiene imponendo alle coordinate del punto generico $(1+t,-\frac{1}{2}-t,\frac{1}{2}+2t)$ della retta r per C_1 e ortogonale a π di soddisfare l'equazione di π, si ottiene $t=-\frac{1}{12}$ e quindi $C_{\mathcal{C}}(\frac{11}{12},-\frac{5}{12},\frac{1}{3})$ è il centro di $\mathcal{C}$.
La retta tangente a $\mathcal{C}$ in $P(1,1,1)$ è intersezione di π con il piano tangente a S_1 in P, pertanto una sua rappresentazione cartesiana è $\begin{cases} x-y+2z-2=0 \\ 3y+z-4=0 \end{cases}$.
c) La sfera S contenente $\mathcal{C}$ e passante per $Q(2,1,0)$ ha come centro il punto $C(1+t,-\frac{1}{2}-t,\frac{1}{2}+2t)$ di r equidistante da P e da Q, imponendo tale condizione si ottiene $t=-\frac{1}{2}$,quindi S ha centro $C(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2})$ e raggio $R=d(C,P)=\sqrt{\frac{7}{2}}$. Si ha $S : (x-\frac{1}{2})^2+y^2+(z+\frac{1}{2})^2=\frac{7}{2}$.
La circonferenza di S_1 di raggio massimo giacente su un piano parallelo ad α : $2x+3y-z+3=0$ è $\gamma : \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+y-z-1=0 \\ 2(x-1)+3(y+\frac{1}{2})-(z-\frac{1}{2})=0 \end{cases}$, intersezione di S_1 con il piano parallelo ad α passante per il centro di S_1.

2) a) $S_V=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ è un sistema di generatori di V. I primi due vettori di S_V sono linearmente indipendenti perchè non nulli e non proporzionali; tutti e tre sono linearmente dipendenti perchè
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Quindi $B_V=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ è una base di V e $\dim V=2$.
$W=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & -b & c \end{pmatrix}/a,b,c\in\mathbb{R}\right\}=L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)=L(S_W)$.
S_W è un sistema di generatori di W.
Poiché $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & -b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\iff a=b=c=0$ i tre vettori di S_W sono linearmente indipendenti e quindi S_W è base di W e $\dim W=3$.

b) I vettori di V $\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha & \alpha+\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \in W \Longleftrightarrow \alpha = -\beta\,(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, pertanto

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} / \beta \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

U è quindi il sottospazio di $M_{23}(\mathbb{R})$ generato da $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ che è linearmente indipendente perchè non nullo.

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim U = 1, \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

sono rispettivamente una base, la dimensione e un sistema di generatori non base di U.

c) $W_1 = U$ è un sottospazio proprio di $M_{23}(\mathbb{R})$ contenuto propriamente in W.

$W_2 = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ è un sottospazio proprio, di dimensione 4, di $M_{23}(\mathbb{R})$ contenente propriamente W; infatti $\begin{pmatrix} a+d & b & c \\ a & -b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a = b = c = d = 0.$

3) Perchè $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ sia di grado minimo, abbia fra le radici i e 1 rispettivamente con molteplicità 2 e 4 e soddisfi la condizione$P(1+i) = 2$ deve essere:

$$P(X) = [(X-i)(X+i)]^2(X-1)^4 Q(X)$$

con $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$, $Q(i) \neq 0$ e $Q(1) \neq 0$, di grado minimo e tale che $P(1+i) = 2$.

$$P(1+i) = 2 \Longrightarrow (-3+4i)Q(1+i) = 2 \Longrightarrow Q(1+i) = \frac{2(-3-4i)}{25} = -\frac{6}{25} - \frac{8}{25}i$$

.

Il grado di $Q(X)$ non puó quindi essere 0.

Sia $Q(X) = a_0 + a_1 X$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ e $a_1 \neq 0$,

$$a_0 + a_1(1+i) = -\frac{6}{25} - \frac{8}{25}i \Longrightarrow (a_0+a_1) + a_1 i = -\frac{6}{25} - \frac{8}{25}i \Longrightarrow a_1 = -\frac{8}{25}i, a_0 = \frac{2}{25}.$$

Pertanto $P(X) = (X^2+1)^2(X-1)^4(\frac{2}{25} - \frac{8}{25}X)$ perchè $Q(1) = -\frac{6}{25} \neq 0$ e $Q(i) = \frac{2}{25} - \frac{8}{25}i \neq 0$.

4) Tutte le matrici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ tali che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ devono soddisfare la condizione

$$\begin{pmatrix} a+3b & a \\ c+3d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 3a & 3b \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a+3b = a+c \\ a = b+d \\ c+3d = 3a \\ c = 3b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3b - c = 0 \\ a - b - d = 0 \\ 3a - c - 3d = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - 3R_1}{\overset{R_2 \to \frac{1}{3}R_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - 3R_2}{\overset{R_1 \to R_1 + R_2}{\longrightarrow}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le soluzioni del sistema sono $\{(\frac{1}{3}c + d, \frac{1}{3}c, c, d)/c, d \in \mathbb{R}\}$ e quindi si ha $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}c + d & \frac{1}{3}c \\ c & d \end{pmatrix}$, $c, d \in \mathbb{R}$.