Geometria **Ingegneria Meccanica** **Esame del 2 – 7 – 2012**

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Si fissi nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$.

a) Provare che $\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z + 5 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ è una circonferenza;

b) trovare centro e raggio di γ.

c) Dire se su $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z + 5 = 0$ esistono circonferenze di raggio $\sqrt{\frac{5}{6}}$ appartenenti a piani paralleli a $\pi : x + y + 2z + 2 = 0$; in caso affermativo scrivere una rappresentazione cartesiana per ciascuna di essa.

(10 punti)

2) Sia

$$z = \frac{(1-i)^{31}}{(i\sqrt{2})^{27}|1 - i\sqrt{3}|},$$

rappresentare z, $\overline{z}$, z^{-2}, $|z|$ nel piano di Argand-Gauss.

(6 punti)

3) Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Dire se esiste e, in caso affermativo, trovare $X \in M_3(\mathbb{R})$ tale che

$$ABX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Trovare la dimensione ed una base del sottospazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo che ha A come matice incompleta.

(10 punti)

4) Dire se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile. Trovare, se è possibile, Δ diagonale e Q ortogonale tali che $\Delta = Q^T A Q$.

(4 punti)

Geometria **Ingegneria Meccanica** **Esame del 2 – 7 – 2012**

1) a) La sfera $S : (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 9$ ha centro $C(2,-1,-3)$ e raggio $R = 3$. La distanza di C dal piano $\alpha : x + 2y - z - 1 = 0$ è $\frac{2}{\sqrt{6}}$. Poiché si ha $d(C,\alpha) = \frac{2}{\sqrt{6}} < 3 = R$ la curva γ è una circonferenza.
b) Il raggio di γ é:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(C,\alpha)} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$ è una rappresentazione parametrica della retta per C e ortogonale ad α. Le coordinate del punto di r che appartiene ad α soddisfa la condizione $6t + 2 = 0 \Longrightarrow t = -\frac{1}{3}$, pertanto $C'(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{8}{3})$ è il centro di γ.
d) L'equazione del fascio di piani paralleli a $\pi : x + y + 2z + 2 = 0$ è

$$\Sigma : x + y + 2z + d = 0.$$

Imponendo che il quadrato della distanza di C dal generico piano di Σ sia $R^2 - \frac{5}{6}$ si ottiene:

$$\frac{(d-5)^2}{6} = \frac{49}{6} \Longrightarrow d = 12 \cup d = -2;$$

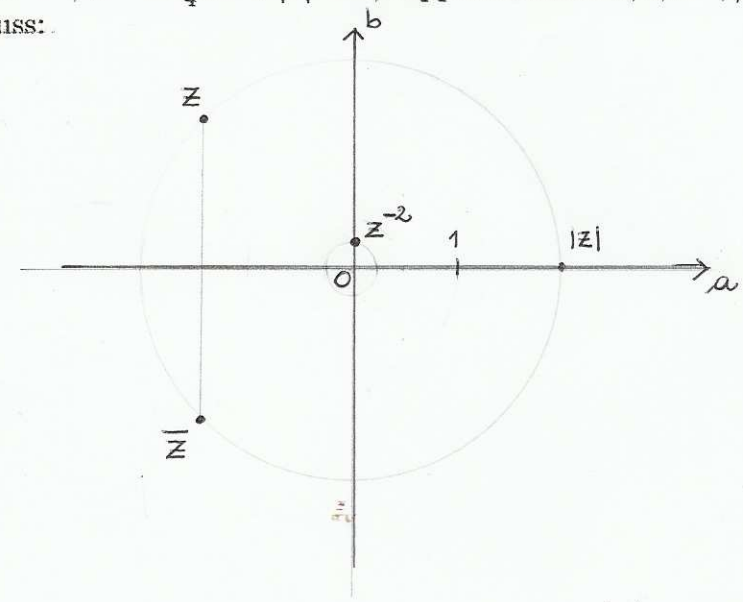
su S esistono allora due circonferenze appartenenti a piani paralleli a π e aventi raggio uguale a $\sqrt{\frac{5}{6}}$:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z + 5 = 0 \\ x + y + 2z + 12 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z + 5 = 0 \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

2) Si ha:

$$z = \frac{(\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi})^{31}}{i^{27}(\sqrt{2})^{27}2} = \frac{2^{15}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2^{14}\sqrt{2}(-i)} = 2\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{3}{2}\pi}} = 2e^{-i\frac{5}{4}\pi} = 2e^{i\frac{3}{4}\pi}.$$

Tenendo conto che $\overline{z} = 2^{-i\frac{3}{4}\pi}$, $z^{-2} = \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}$ e $|z| = 2$, rappresentiamo $z, \overline{z}, z^{-2}, |z|$ nel piano di Argand-Gauss:



3) Si ha $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Poiché $|AB| = -3 \neq 0$ la matrice AB è invertibile e $X \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $ABX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è

$$X = (AB)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(AB|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to \frac{1}{3}(R_2 + 2R_1) \\ R_3 \to R_3 - 2R_1}]{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 - \frac{2}{3}R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 + 2R_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) = (I|(AB)^{-1}).$$

Allora si ha

$$X = \begin{pmatrix} 3 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 2 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{3} & \frac{17}{3} & \frac{17}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{10}{3} & \frac{10}{3} \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to -(R_3 - 2R_1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_3]{}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il sottospazio V delle soluzioni del sistema lineare che ha A come matrice incompleta ha $\dim V = 4 - 3 = 1$, $V = \{(0, -z, z, 0)/z \in \mathbb{R}\}$ ed una base di V è $B_V = \{(0, 1, -1, 0)\}$.

4) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile perchè simmetrica. Il suo polinomio caratteristico è $P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda(\lambda - 5)$. Gli autovalori di A entrambi

di moltelpicità 1 sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 5$. Una matrice diagonale simile ad A è $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

L'autospazio associato a $\lambda = 0$ ed una sua base sono rispettivamente

$$V_0 = \{(-2y, y)/y \in \mathbb{R}\}, \quad B_{V_0} = \{(2, -1)\}.$$

$(A - 5I) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + \frac{1}{2}R_1]{R_1 \to -\frac{1}{4}R_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pertanto l'autospazio associato a $\lambda = 5$ ed una sua base sono rispettivamente

$$V_5 = \{(\frac{1}{2}y, y)/y \in \mathbb{R}\}, \quad B_{V_5} = \{(1, 2)\}.$$

$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ è una matrice ortogonale tale che $\Delta = Q^T A Q$.