Geometria **Ingegneria Navale** **Esame del** $11-6-2012$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Si fissi nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$.

a) Scrivere l'equazione cartesiana di ciascun piano passante per $r : \begin{cases} x - 3y + z + 2 = 0 \\ x - y - z - 4 = 0 \end{cases}$ e formante un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con il piano $\pi : x - y - z + 1 = 0$.

b) Scrivere una rappresentazione cartesiana per la proiezione ortogonale di r su π.

(10 punti)

2) Trovare e rappresentare nel piano di Argand-Gauss le radici quarte di

$$\alpha = e^{i\frac{221}{3}\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{-5}.$$

(7 punti)

3) Trovare, se è possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(10 punti)

4) Fissata la base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ nello spazio V_3 dei vettori geometrici, determinare, se esiste, $a \in \mathbb{R}$ in modo che $\{\vec{i} + 2\vec{j} + a\vec{k}, 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\}$ sia base di V_3.

(3 punti)

Geometria **Ingegneria Navale** **Esame del** $11-6-2012$

1) a) Il fascio di piani per $r: x-3y+z+2=x-y-z-4=0$ ha equazione $\Sigma: (\lambda+\mu)x-(3\lambda+\mu)y+(\lambda-\mu)z+2\lambda-4\mu=0$. Imponendo al generico piano di Σ di formare un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con il piano $\pi: x-y-z+1=0$ si ottiene:

$$\frac{3|\lambda+\mu|}{\sqrt{3}\sqrt{11\lambda^2+6\lambda\mu+3\mu^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow 5\lambda^2-6\lambda\mu-3\mu^2=0\Longrightarrow \lambda=\frac{3\mp 2\sqrt{6}}{5}\mu.$$

I piani passanti per r e formanti un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con π hanno dunque equazione

$$(4\mp\sqrt{6})x-(7\mp 3\sqrt{6})y+(-1\mp\sqrt{6})z-7\mp 2\sqrt{6}=0.$$

b) Imponendo al generico piano di Σ la condizione di ortogonalità con π si ottiene $\lambda=-\mu$, pertanto $y-z-3=0$ è l'equazione del piano per r e ortogonale a π. Una rappresentazione cartesiana della retta proiezione ortogonale di r su π è $\begin{cases} y-z-3=0 \\ x-y-z+1=0 \end{cases}$.

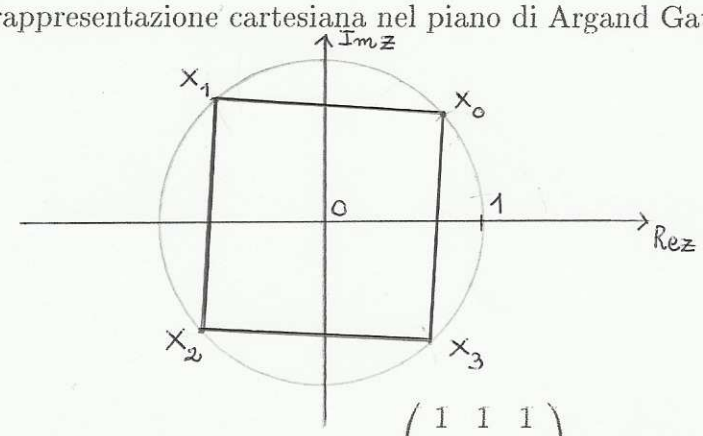
2) Scriviamo la forma esponenziale di $\alpha=e^{i\frac{221}{3}\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{-5}$.

$$\alpha=e^{i\frac{5}{3}\pi}(e^{i\frac{\pi}{6}})^{-5}=e^{i\frac{5}{3}\pi}e^{-i\frac{5}{6}\pi}=e^{i\frac{5}{6}\pi}.$$

Le radici quarte di α, cioè le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $X^4=e^{i\frac{5}{6}\pi}$, sono:

$$X_k=e^{i\frac{\frac{5}{6}\pi+2k\pi}{4}} \qquad \text{con} \qquad k=0,1,2,3,$$

la loro rappresentazione cartesiana nel piano di Argand Gauss è:



3) Il polinomio caratteristico di $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$ è

$$P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=-\lambda^2(\lambda-4).$$

Gli autovalori λ_i di A e le rispettive molteplicità r_i sono:

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{con} \quad r_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = 4 \quad \text{con} \quad r_2 = 1.$$

$$(A - 0I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ \longrightarrow \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'autospazio V_0 associato a $\lambda_1 = 0$ ed una sua base sono rispettivamente:

$$V_0 = \{(-y - z, y, z)/y, z \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad B_{V_0} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}.$$

$$(A - 4I) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \leftrightarrow R_1 + 3R_3 \\ \longrightarrow \\ R_2 \to R_2 - 2R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \to R_1 + \frac{1}{4}R_2 \\ \longrightarrow \\ R_2 \to -\frac{1}{4}R_2 \\ R_3 \to R_3 + R_2 \end{matrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'autospazio V_4 ed una sua base sono rispettivamente:

$$V_4 = \{(z, 2z, z)/z \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad B_{V_4} = \{(1, 2, 1)\}.$$

Poichè autovettori associati ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti

$$B_{\mathbb{R}^3} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 2, 1)\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da auovettori di A.

4) Poichè $\dim V_3 = 3$ l'insieme $B = \{\vec{i} + 2\vec{j} + a\vec{k}, 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ è base di V_3 se e solo se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono linearmente indipendenti cioè se e solo se $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -a - 3 \neq 0$. Pertanto $\forall a \in \mathbb{R} - \{-3\}$ l'insieme B è base di V_3.