Geometria **Ingegneria Navale** **Esame del** $10-1-2012$

1) a) Delle equazioni parametriche per la retta r passante per $P(1,1,2)$ e ortogonale a $\pi : 2x+y-3z-1=0$ sono $r : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 2-3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$; imponendo alle coordinate dei punti di r di soddisfare l'equazione di π si ottiene $t = \frac{2}{7}$, quindi la proiezione ortogonale di P su π è il punto $P'(\frac{11}{7}, \frac{9}{7}, \frac{8}{7})$.
b) La retta s' per P parallela a π e ortogonale a $s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$ si può esprimere come intersezione del piano $2(x-1)+1(y-1)-3(z-2)=0$ per P e parallelo a π e del piano $2(x-1)-(y-1)+(z-2)=0$ per P e ortogonale ad s, pertanto $s' : \begin{cases} 2x+y-3z+3=0 \\ 2x-y+z-3=0 \end{cases}$.
c) Una rappresentazione cartesiana di s è $s : \begin{cases} x+2y-1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$. Imponendo al fascio di piani $\Sigma : \lambda x + (2\lambda+\mu)y + \mu z - \lambda - 2\mu = 0$ di asse s la condizione di ortogonalità con π si ottiene $\mu = 2\lambda$. Il piano per s e ortogonale a π ha quindi equazione $x+4y+2z-5=0$.

2) W è costituito dai vettori $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ che hanno prodotto scalare nullo con $(1,2,-1,1)$ e $(1,1,1,1,)$; pertanto W è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x+2y-z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{cases}$ e quindi è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.
Poiché

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_2 \to -(R_2-R_1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_1 \to R_1 - 2R_2}{\longrightarrow}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ si ha: $\dim W = 4-2 = 2$, $W = \{(-3z-t, 2z, z, t)/z, t \in \mathbb{R}\}$ e una base di W è $B = \{(3,-2,-1,0),(1,0,0,-1)\}$.
b) Un sistema di generatori S di W non base si può ottenere unendo ai vettori della base di W un vettore linearmente dipendente con essi:
$S = \{(3,-2,-1,0),(1,0,0,-1),(2,0,0,-2)\}$.
Poichè $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ una base di $\mathbb{R}^4$ contenente B è
$B_{\mathbb{R}^4} = \{(3,-2,-1,0),(1,0,0,-1),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

c) Imponendo ai vettori $(3\lambda+\mu, -2\lambda, -\lambda, -\mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, l'ortogonalità con $(1,0,0,-1)$ si ottiene $3\lambda = -2\mu$; ponendo $\lambda = 2$ e $\mu = -3$ si ottiene il vettore $(3,-4,-2,3)$ di W ortogonale a $(1,0,0,-1)$. Una base ortonormale di W è allora $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{3}{\sqrt{38}}, -\frac{4}{\sqrt{38}}, -\frac{2}{\sqrt{38}}, \frac{3}{\sqrt{38}})\}$.

3)

$$\alpha = e^{i\pi}\frac{(\sqrt{2}\,e^{i\frac{7}{4}\pi})^{79}}{(2\,e^{i\frac{\pi}{3}})^{36}} = e^{i\pi}\frac{2^{39}\sqrt{2}\,e^{i\frac{553}{4}\pi}}{2^{36}\,e^{i12\pi}} = \frac{e^{i\pi}\,2^3\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i0}} = 2^3\sqrt{2}\,e^{i\frac{5}{4}\pi}.$$

Le radici terze di α, cioè le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $X^3 = 2^3\sqrt{2}\,e^{i\frac{5}{4}\pi}$ sono

$$X_k = 2\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{\frac{5}{4}\pi+2k\pi}{3}}, \qquad k = 0,1,2.$$

4) Il polinomio caratteristico di $A = \begin{pmatrix} 1 & k^2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ è

$$|A - X\,I| = \begin{vmatrix} 1-X & k^2 \\ 1 & 2-X \end{vmatrix} = X^2 - 3X + (2-k^2);$$

poichè il discriminante $\Delta = 1 + 4k^2$ del trinomio di secondo grado è maggiore di zero per ogni $k \in \mathbb{R}$, A ha sempre due autovalori distinti e quindi (essendo di ordine due) è sempre diagonalizzabile qualunque sia $k \in \mathbb{R}$.