Geometria **Ingegneria Meccanica** **Esame del** $10-1-2012$

1) a) Un vettore parallelo a $r:\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases}$ è $\vec{u}_r=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\wedge 2\vec{i}-\vec{i}-\vec{k}=$ $=-2\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$; un vettore normale a $\pi: x+2y-z+1=0$ è $\vec{n}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$. Imponendo ai piani per $P(3,1,1)$ di equazioni $a(x-3)+b(y-1)+c(z-1)=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ la condizione di parallelismo con r e di ortogonalità con π si ottiene il sistema $\begin{cases} 2a+b+3c=0 \\ a+2b-c=0 \end{cases}$, che ha le soluzioni $\{(-\frac{7}{3}c,\frac{5}{3}c,c)/c\in\mathbb{R}\}$. Pertanto il piano per P parallelo ad r e ortogonale a π ha equazione $7x-5y-3z-13=0$.
b) Imponendo al fascio di piani $\Sigma:(\lambda+2\mu)x+(\lambda-\mu)y-(\lambda+\mu)z-3\mu=0$ di asse r il passaggio per P si ottiene la condizione $\mu=-3\lambda$. Pertanto il piano per r e P ha equazione $5x-4y-2z-9=0$.
c) Delle equazioni parametriche per r sono $r:\begin{cases} x=2t+3 \\ y=t \\ z=3t+3 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Imponendo al generico punto di r di distare 3 da P si ottiene la condizione:

$$(2t+3-3)^2+(t-1)^2+(3t+3-1)^2=9\Longrightarrow 14t^2+10t-4=0\Longrightarrow t=-1\cup t=\frac{2}{7};$$

i punti di r che hanno distanza 3 da P sono quindi $P'(1,-1,0)$ e $P''(\frac{25}{7},\frac{2}{7},\frac{27}{7})$.

2) a) $X\in M_3(\mathbb{R})$ tale che $(A^2-B\,C)\,X=A$ esiste se e solo se $A^2-B\,C$ è invertibile. Si ha:

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B\,C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\quad A^2-B\,C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Poiché $|A^2-B\,C|=24\neq 0$, X esiste ed è $X=(A^2-B\,C)^{-1}\,A$.

$$\Big((A^2-B\,C)|I\Big)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\ \begin{array}{c} R_1\to\frac{1}{2}R_1 \\ \longrightarrow \\ R_2\to-\frac{1}{4}(R_2-R_1) \\ R_3\to-\frac{1}{3}R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)\ \begin{array}{c} R_2\to R_2-\frac{1}{2}R_3 \\ \longrightarrow \\ R_1\to R_1-\frac{1}{2}R_3 \end{array}\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\underset{R_1 \to R_1 - \frac{3}{2}R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) = \Big(I|(A^2 - B\,C)^{-1}\Big).$$

Pertanto $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

b) Il polinomio caratteristico di $D = (A - {}^tA) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ è $|D - X\,I| = -X(X^2+6)$. L'unico autovalore di D è $\lambda = 0$ di molteplicità 1, pertanto D non è diagonalizzabile. Poichè

$$D \underset{R_3 \to R_3 + R_2}{\overset{-R_1 \leftrightarrow R_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - 2R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'autospazio V_0 ed una sua base sono rispettivamente $V_0 = \{(2z, z, z)/z \in \mathbb{R}\}$ e $B_{V_0} = \{(2,1,1)\}$. Poiché $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, $B_{\mathbb{R}^3} = \{(2,1,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ contenente il massimo numero di autovettori di D.

3) $S = \{\vec{i} + \vec{j}, \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}\}$ è un sistema di generatori di V; $\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{j} + 2\vec{k}$ sono linearmente indipendenti perchè non proporzionali, $\vec{i} + \vec{j}, \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$ sono dipendenti perchè il loro prodotto misto $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ è nullo.
Quindi la dimensione di V ed una sua base sono rispettivamente $\dim V = 2$ e $B_V = \{\vec{i} + \vec{j}, \vec{j} + 2\vec{k}\}$.
b) Imponendo che sia nullo il prodotto scalare dei vettori $\lambda\vec{i} + (\lambda + \mu)\vec{j} + 2\mu\vec{k}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ di V con $\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ si ottiene $\lambda = -2\mu$; imponendo che i vettori $-2\mu\vec{i} - \mu\vec{j} + 2\mu\vec{k}$ abbiano modulo 9 si ottiene $\mu = \mp 3$. I vettori di V di modulo 9 e ortogonali a $\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ sono dunque $\pm 6\vec{i} \pm 3\vec{j} \mp 6\vec{k}$.

4) Moltiplicando ambo i membri di $e^{iz} + 4e^{-iz} + 4 = 0$ per e^{iz} si ottiene

$$(e^{iz})^2 + 4e^{iz} + 4 = 0 \Longrightarrow (e^{iz} + 2)^2 = 0 \Longrightarrow e^{iz} = 2e^{i\pi} \Longrightarrow$$

$$iz = \log 2 + i(1 + 2k)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow z = -i \log 2 + (1 + 2k)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$