**Geometria** **Ingegneria Meccanica** **Esame del** $11-6-2012$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Si fissi nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$.
a) Scrivere una rappresentazione cartesiana della retta del piano $\alpha : x+2y-z=0$ la cui proiezione ortogonale sul piano $z=0$ sia la retta $r : \begin{cases} x = t-2 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$.
b) Scrivere l'equazione cartesiana di ciascun piano passante per la retta $r$ e tangente alla sfera $S : x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$.
(10 punti)

2) Determinare $a, b \in \mathbb{C}$ in modo che il polinomio $P(X) = X^3 + aX^2 + b \in \mathbb{C}[X]$ abbia la radice doppia $i$.
(4 punti)

3) Dire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

è diagonalizzabile. Scrivere due diverse basi di $\mathbb{R}^3$ contenente il massimo numero di autovettori di $A$.
(10 punti)

4) In $M_{32}(\mathbb{R})$ sia $V$ il sottoinsieme delle matrici con due colonne uguali.
Dire se $V$ è sottospazio di $M_{32}(\mathbb{R})$ e, in caso affermativo, trovarne la dimensione, due diverse basi e un sistema di generatori non base.
(6 punti)

**Geometria** **Ingegneria Meccanica** **Esame del** $11-6-2012$

1) a) La retta $s$ del piano $\alpha : x+2y-z=0$, la cui proiezione ortogonale su $z=0$ sia $r : \begin{cases} x=t-2 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$, è intersezione di $\alpha$ e del piano $x-y+2=0$ che passa per $r$ ed è ortogonale a $z=0$.

Una rappresentazione cartesiana di $s$ è pertanto $s : \begin{cases} x+2y-z=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}$.

b) La sfera $S : (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$ ha raggio $R=\sqrt{5}$ e centro $C(1,-2,0)$. Il fascio di piani per $r : \begin{cases} x-y+2=0 \\ z=0 \end{cases}$ ha equazione $\Sigma : \lambda x-\lambda y+\mu z+2\lambda=0$. Imponendo che la distanza di $C$ dal generico piano di $\Sigma$ sia uguale ad $R$, cioè che $\frac{|5\lambda|}{\sqrt{2\lambda^2+\mu^2}}=\sqrt{5}$, si ottiene $3\lambda^2-\mu^2=0$ da cui $\mu=\pm\sqrt{3}\lambda$. pertanto i piani passanti per $r$ e tangenti a $S$ hanno equazione $x-y\pm\sqrt{3}z+2=0$.

2) Il polinomio $P(X)=X^3+aX^2+b$ può essere scritto come:

$$P(X)=(X-i)^2[X+(a+2i)]+\{(-3+2ai)X+(a+2i+b)\}=(X-i)^2Q(X)+R(X).$$

Imponendo che $R(X)$ sia il polinomio nullo, cioè che $-3+2ai=a+2i+b=0$, si ottiene $a=-\frac{3}{2}i$ e $b=-\frac{1}{2}i$.

3) Il polinomio caratteristico di $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ è

$$P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=-\lambda^2(1+\lambda).$$

Gli autovalori $\lambda_i$ di $A$ e le rispettive molteplicità $r_i$ sono:

$$\lambda_1=0 \quad \text{con} \quad r_1=2 \qquad \text{e} \qquad \lambda_2=-1 \quad \text{con} \quad r_2=1.$$

$$(A-OI) \quad \begin{matrix} R_2 \to -\frac{1}{3}(R_2+R_1) \\ \longrightarrow \\ R_3 \to R_3+R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \to R_1+2R_2 \\ \longrightarrow \\ R_3 \to R_3+2R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

pertanto $A$ non è diagonalizzabile perchè

$$\rho(A-\lambda_1 I)=\rho(A-0I)=2\neq 1=3-2=3-r_1.$$

L'autospazio $V_0$ associato a $\lambda_1=0$ ed una sua base sono rispettivamente:

$$V_0=\{(-z,z,z)/z\in\mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad B_{V_0}=\{(1,-1,-1)\}.$$

$$(A+I)=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -\frac{1}{2}(R_1+R_2)\leftrightarrow -R_2 \\ \longrightarrow \\ R_3\to R_3-R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'autospazio $V_{-1}$ associato a $\lambda_2=-1$ ed una sua base sono rispettivamente:

$$V_{-1}=\{(0,\frac{3}{2}z,z)/z\in\mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad B_{V_{-1}}=\{(0,3,2)\}.$$

$$B_{\mathbb{R}^3}=\{(1,-1,-1),(0,3,2),(0,0,1)\} \quad \text{e} \quad B_{\mathbb{R}^3}=\{(2,-2,-2),(0,3,2),(0,0,1)\}.$$

sono due diverse basi di $\mathbb{R}^3$ contenenti il massimo numero di autovettori di $A$ perchè $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0$ e $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=6\neq 0$.

4) $$V=\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \\ c & c \end{pmatrix}/a,b,c\in\mathbb{R}\right\}=\left\{a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}/a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=L\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)=L(A_1,A_2,A_3)$$

pertanto $V$ è un sottospazio di $M_{32}(\mathbb{R})$ e $S=\{A_1,A_2,A_3\}$ è un suo sistema di generatori. L'insieme $S$ è anche base perchè $A_1,A_2,A_3$ sono linearmente indipendenti, infatti $aA_1+bA_2+cA_3=\underline{0}\Longrightarrow a=b=c=0$, quindi $\dim V=3$.
Come altra base di $V$ e come sistema di generatori non base scegliamo:

$$B=\{2A_1,A_2,A_3\} \quad \text{e} \quad \{A_1,A_2,A_3,A_1+A_2\}.$$