Geometria **Ingegneria Navale** **Esame del** $2-7-2012$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) a) Discutere e, quando è possibile , risolvere al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\Sigma : \begin{pmatrix} 2\lambda & -1 & 3 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\lambda+1 \\ 2\lambda \end{pmatrix}.$$

b) Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ trovare la dimensione ed una base del sottospazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo avente come matrice incompleta la matrice incompleta di Σ.

(10 punti)

2) Trovare tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = -1.$$

(3 punti)

3) Si fissi nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$.
a) Dire se $A(2,1,3)$, $B(1,2,-1)$, $C(3,0,7)$ sono allineati e scrivere l'equazione del piano passante per A, B, C e parallelo a $r : \begin{cases} x+2y-3z+1=0 \\ 2x-y+z-2=0 \end{cases}$.
b) Scrivere una rappresentzione cartesiana della retta s parallela ad r e passante per B. Calcolare la distanza di r da s.

(10 punti)

4) Dire se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile. In caso affermativo trovare Δ diagonale e, se è possibile, Q ortogonale tali che $\Delta = Q^T A Q$.

(7 punti)

Geometria **Ingegneria Navale** **Esame del** $2-7-2012$

1) $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2\lambda & -1 & 3 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 & 2\lambda+1 \\ 1 & \lambda & 0 & 2\lambda \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 - 2\lambda R_3 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 0 & 2\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 1-2\lambda \\ 0 & -1-2\lambda^2 & 3 & 1-4\lambda^2 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[R_2 \to -\frac{1}{\lambda}R_2]{\lambda \neq 0} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 0 & 2\lambda \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\lambda} & \frac{2\lambda-1}{\lambda} \\ 0 & -1-2\lambda^2 & 3 & 1-4\lambda^2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + (1+2\lambda^2)R_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 0 & 2\lambda \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\lambda} & \frac{2\lambda-1}{\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{-2\lambda^2+3\lambda-1}{\lambda} & \frac{-2\lambda^2+3\lambda-1}{\lambda} \end{array}\right) = (A'|b').$$

Per $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ il sistema è compatibile e ha una sola soluzione che troviamo riducendo totalmente $(A'|b')$.

$$(A'|b') \xrightarrow[R_3 \to \frac{\lambda}{-2\lambda^2+3\lambda-1}R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 0 & 2\lambda \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\lambda} & \frac{2\lambda-1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 + \frac{1}{\lambda}R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 0 & 2\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1 - \lambda R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$ Per $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ la soluzione è $\{(0,2,1)\}$.

Per $\lambda = 0$ $(A|b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow -R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 + 3R_3]{}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, il sistema è risolubile e $\{(0,2,1)\}$ è l'unica soluzione.

Per $\lambda = \frac{1}{2}$ $(A|b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 - \frac{1}{2}R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, il sistema è risolubile e ha le ∞^1 soluzioni $\{(1-z, 2z, z)/z \in \mathbb{R}\}$.

Per $\lambda = 1$ $(A|b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ il sistema è risolubile e ha le ∞^1 soluzioni $\{(1-z, 1+z, z)/z \in \mathbb{R}\}$.

b) Per $\lambda \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}, 1\}$ il sottospazio V_λ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo avente come matrice A è $V_\lambda = \{(0,0,0)\}$ quindi si ha $\dim V_\lambda = 0$ e $B_{V_\lambda} = \Phi$.
Per $\lambda = \frac{1}{2}$ si ha $\dim V_{\lambda=\frac{1}{2}} = 1$, $V_{\lambda=\frac{1}{2}} = \{(-z, 2z, z)/z \in \mathbb{R}\}$ e $B_{V_{\lambda=\frac{1}{2}}} = \{(1,-2,-1)\}$.
Per $\lambda = 1$ si ha $\dim V_{\lambda=1} = 1$, $V_{\lambda=1} = \{(-z, z, z)/z \in \mathbb{R}\}$ e $B_{V_{\lambda=1}} = \{(1,-1,-1)\}$.

2) Moltiplicando ambo i membri dell'equazione $e^z - e^{-z} = -2$ si ottiene

$$e^{2z} + 2e^z - 1 = 0 \Longrightarrow e^z = -1 \mp \sqrt{2}.$$

$$e^z = -1 - \sqrt{2} \Longrightarrow e^z = (1+\sqrt{2})e^{i\pi} \Longrightarrow z = \log(1+\sqrt{2}) + i(1+2k)\pi, \qquad k \in \mathbb{Z};$$
$$e^z = -1 + \sqrt{2} \Longrightarrow e^z = (-1+\sqrt{2})e^{i0} \Longrightarrow z = \log(-1+\sqrt{2}) + 2k\pi i, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

3) a) I vettori $B - A = -\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ e $C - A = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ sono paralleli perché sono proporzionali, quindi i punti A, B, C sono allineati.
Una rappresentazione parametrica ed una rappresentazione cartesiana della retta v contenente A, B, C sono rispattivamente $v : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = -1+4t \end{cases}$, $v : \begin{cases} x+y-3=0 \\ 4x-z-5=0 \end{cases}$.
Il fascio Σ di asse v ha equazione $\Sigma : (\lambda+4\mu)x + \lambda y - \mu z - 3\lambda - 5\mu = 0$.
Un vettore parallelo ad $r : \begin{cases} x+2y-3z+1=0 \\ 2x-y+z-2=0 \end{cases}$ è $\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$.
Imponendo al generico piano di Σ la condizione di parallelismo con r si ottiene $\mu = 8\lambda$, $33x+y-8z-43 = 0$ è quindi l'equazione del piano per A, B, C e parallelo ad r.
b) Una rappresentazione parametrica ed una rappresentazione cartesiana della retta s per B e parallela ad r sono rispettivamente

$$s : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+7t \\ z = -1+5t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} 7x-y-5=0 \\ 5x-z-6=0 \end{cases}.$$

L'equazione del piano passante α per B e ortogonale ad $r : \begin{cases} x = \frac{u+3}{5} \\ y = \frac{7u-4}{5} \\ z = u \end{cases}$ ha equazione $\alpha : x + 7y + 5z - 10 = 0$.
Il punto H di r appartenente ad α si ottiene per $u = 1$ quindi $H(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 1)$.
La distanza di r da s è allora la distanza di B da H che è $\sqrt{6}$.

3) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ è simmetrica quindi diagonalizzabile.
Il polinomio caratteristico di A e i suoi autovalori λ_i con le rispettive molteplicità r_i sono:

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = -\lambda^2(\lambda - 6), \qquad \lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 6, \qquad r_1 = 2 \quad \text{e} \quad r_2 = 1.$$

Una matrice diagonale simile ad A è $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
L'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = 0$ ed una sua base sono

$$V_0 = \{(-2y - z, y, z)/y, z \in \mathbb{R}\}, \qquad B_{V_0} = \{(-2, 1, 0)(-1, 0, 1)\}.$$

$$(A - 6I) = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_3 \leftrightarrow R_1 + 5R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & 12 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_2]{R_2 \to -\frac{1}{6}R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - 2R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = 6$ ed una sua base sono

$$V_6 = \{(z, 2z, z)/z \in \mathbb{R}\}, \qquad B_{V_6} = \{(1, 2, 1)\}.$$

I vettori $(-2y - z, y, z)$di V_0 ortogonali a $(-1, 0, 1)$ devono soddisfare la condizione $y = -z$, fra essi scegliamo $(1, -1, 1)$.
$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ è una matrice ortogonale tale che $\Delta = Q^T A Q$.