Geometria **Ingegneria Navale** **Esame del** $8 - 1 - 2013$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Fissato nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$ siano:

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \pi : x + y + z - 3 = 0.$$

a) Provare che $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \pi$ è una circonferenza e trovarne il raggio e le coordinate del centro.
b) Dire se esistono piani per $P(3, 1, 1)$ ortogonali a π e tangenti a S.
(10 punti)

2) a) Trovare modulo e argomento del numero complesso

$$\alpha = -\frac{i^{113}(1 + i\sqrt{3})^{17}}{(1 - i)^{30}}.$$

b) Rappresentare nel piano di Argand-Gauss l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z^3 = i^3\}.$$

(10 punti)

3) a) Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ trovare la dimensione ed una base del sottospazio

$$V_\lambda = L\Big((1, 0, 1, 1), (1 + \lambda, -1, \lambda, 1), (1 - \lambda, \lambda, 1, 1), (0, -1, -1, -\lambda)\Big) \subset \mathbb{R}^4.$$

b) Posto $\lambda = 0$ trovare un sistema di generatori non base di V_0 e due sottospazi propri di $\mathbb{R}^4$, W_1 e W_2, tali che $W_1 \subsetneq V_0$ e $W_2 \supsetneq V_0$.
(10 punti)

Geometria **Ingegneria Navale** **Esame del** $8 - 1 - 2013$

1) a) $S : (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4$ è la sfera di centro $C(2, -1, -1)$ e raggio $R = 2$. La distanza di C da $\pi : x + y + z - 3 = 0$ è

$$d(C, \pi) = \frac{3}{\sqrt{3}} < 2 = R,$$

quindi $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \pi$ è una circonferenza. Il raggio r di $\mathcal{C}$ è

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(C, \pi)} = \sqrt{4-3} = 1.$$

Una rappresentazione parametrica della retta per C e ortogonale a π è $s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$;

$2 + t - 1 + t - 1 + t - 3 = 0 \Longrightarrow t = 1$, quindi il centro di $\mathcal{C}$ è

$$C'(3, 0, 0) = s \cap \pi.$$

b) Imponendo la condizione di ortogonalità con π alla totalità dei piani per $P(3, 1, 1)$ di equazioni $a(x-3) + b(y-1) + c(z-1) = 0$ si ottiene $a = -b - c$. Pertanto i piani per P e ortogonali a π hanno equazione

$$\Sigma : (-b - c)x + by + cz + 2b + 2c = 0 \quad \text{con} \quad b, c \in \mathbb{R} \quad \text{non entrambe nulli.}$$

I piani di Σ tangenti a S devono aver distanza distanza da C uguale a 2.

$$d(C, \Sigma) = \frac{|-b-c|}{\sqrt{(-b-c)^2 + b^2 + c^2}} = 2 \Longrightarrow (b+c)^2 = 4[(b+c)^2 + b^2 + c^2] \Longrightarrow$$

$$3(b+c)^2 + 4b^2 + 4c^2 = 0$$

le cui soluzioni reali sono $b = c = 0$. Pertanto non esistono piani per P, ortogonali a π e tangenti a S.

2) a) Si ha:

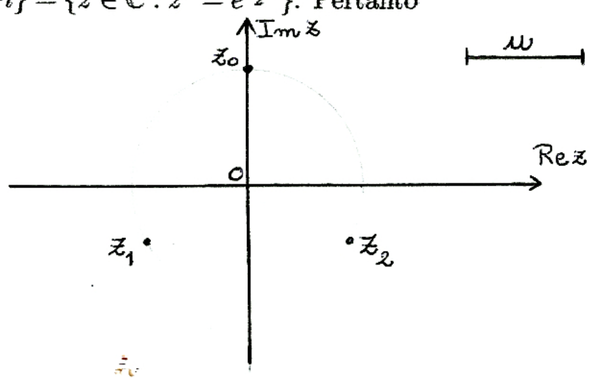
$$i^{113} = (i^4)^{28} i = i = e^{i\frac{\pi}{2}}; \quad (1 + i\sqrt{3})^{17} = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^{17} = 2^{17} e^{i\frac{17}{3}\pi} = 2^{17} e^{i\frac{5}{3}\pi};$$

$$(1 - i)^{30} = (\sqrt{2} e^{\frac{7}{4}\pi})^{30} = 2^{15} e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Pertanto:

$$\alpha = -\frac{i^{113}(1 + i\sqrt{3})^{17}}{(1-i)^{30}} = e^{i\pi} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} 2^{17} e^{i\frac{5}{3}\pi}}{2^{15} e^{i\frac{\pi}{2}}} = 4e^{i\frac{2}{3}\pi}.$$

Il modulo e l'argomento di α sono $|\alpha| = 4$ e $\arg \alpha = \frac{2}{3}\pi$.
b) $A = \{z \in \mathbb{C} : z^3 = i^3\} = \{z \in \mathbb{C} : z^3 = -i\} = \{z \in \mathbb{C} : z^3 = e^{i\frac{3}{2}\pi}\}$. Pertanto
$A = \{z_k = e^{i\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}} \quad k = 0, 1, 2\}$.



3) a) Sia M la matrice che ha come colonne gli elementi del sistema di generatori

$$S = \{(1,0,1,1),(1+\lambda,-1,\lambda,1),(1-\lambda,\lambda,1,1),(0,-1,-1,-\lambda)\}$$

di $V_\lambda = L\Big((1,0,1,1),(1+\lambda,-1,\lambda,1),(1-\lambda,\lambda,1,1),(0,-1,-1,-\lambda)\Big) \subset \mathbb{R}^4$.
Si ha $\dim V_\lambda = \rho(M)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1+\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 1 & \lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} R_3 \to R_3 - R_1 \\ \longrightarrow \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1+\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -\lambda & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} R_2 \to -R_2 \\ \longrightarrow \\ R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 - \lambda R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1+\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\lambda^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ R_3 \leftrightarrow R_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1+\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per $\lambda \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ la dimensione e una base di V_λ sono rispettivamente:

$$\dim V_\lambda = 3 \quad \text{e} \quad B_{V_\lambda} = \{(1,0,1,1),(1+\lambda,-1,\lambda,1),(1-\lambda,\lambda,1,1)\}.$$

Per $\lambda = 0$

$$M \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pertanto si ha:

$$\dim V_0 = 2 \quad \text{e} \quad B_{V_0} = \{(1,0,1,1),(1,-1,0,1)\}.$$

Per $\lambda = 1$

$$M \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pertanto si ha:

$$\dim V_1 = 2 \quad \text{e} \quad B_{V_1} = \{(1,0,1,1),(2,-1,1,1)\}.$$

b) Per trovare un sistema di generatori S_{V_0} non base di V_0 è sufficiente unire agli elementi di B_{V_0} un vettore linearmente dipendente ad esempio

$$(1,0,1,1) + (1,-1,0,1) = (2,-1,1,2).$$

Pertanto $S_{V_0} = \{(1,0,1,1),(1,-1,0,1),(2,-1,1,2)\}$.
Come sottospazio proprio di $\mathbb{R}^4$ contenuto propriamente in V_0 scegliamo:

$$W_1 = L\Big((1,0,1,1)\Big).$$

Dopo avere osservato che $\rho \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$ perchè $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$,
Come sottospazio proprio di $\mathbb{R}^4$ contenente propriamente V_0 scegliamo:

$$W_2 = L\Big((1,0,1,1),(1,-1,0,1),(0,0,1,0)\Big).$$