Geometria **Ingegneria Navale** **Esame del** $5-2-2013$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O;x,y,z\}$ si considerino le rette:

$$r:\begin{cases} x+z+1=0 \\ y-z-2=0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s:\begin{cases} x+z+2=0 \\ 2x+y+z+1=0 \end{cases}.$$

a) Provare che r e s sono due rette complanari e scrivere l'equazione cartesiana del piano che le contiene.
b) Scrivere una rappresentazione cartesiana della retta passante per $O(0,0,0)$ e complanare sia con r che con s.
c) Scrivere l'equazione cartesiana della sfera tangente a r in $P(0,1,-1)$ e avente il centro su s.
(10 punti)

2) Dire se $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile; in caso affermativo scrivere $\Delta \in M_3(\mathbb{R})$ diagonale e $P \in M_3(\mathbb{R})$ invertibile tali che $\Delta = P^{-1}AP$ e due diverse basi di $\mathbb{R}^3$ costituite da autovettori di A.
(10 punti)

3) Determinare $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado minimo avente fra le radici 1 e $1+i$ con molteplicità almeno 1 e 2 rispettivamente e tale che $P(2-i)=6i-8$.
(10 punti)

Geometria Ingegneria Navale Esame del $5-2-2013$

1) a) Il vettore $\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ è parallelo sia alla retta $r:\begin{cases}x+z+1=0\\ y-z-2=0\end{cases}$ che alla retta $s:\begin{cases}x+z+2=0\\ 2x+y+z+1=0\end{cases}$ quindi $r\equiv s$ o $r\|s$ e pertanto r e s sono complanari.

Una rappresentazione parametrica di r è $r:\begin{cases}x=-t-1\\ y=t+2\\ z=t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Poiché il sistema $\begin{cases}-t-1+t+2+2=0\\ -2t-2+t+2+t+1=0\end{cases}$ non ha soluzioni, si ha $r\cap s=\Phi$, pertanto r e s sono due rette distinte e parallele.

Imponendo al fascio $\Sigma:(\lambda+2\mu)x+\mu y+(\lambda+\mu)z+2\lambda+\mu=0$ di piani di asse s il passaggio per il punto $A(-1,2,0)$ di r, si ottiene $\lambda=-\mu$; l'equazione cartesiana del piano contenente r e s è pertanto $\pi:x+y-1=0$.

b) La retta r' passante per $O(0,0,0)$ e complanare sia con r che con s è intersezione dei due piani α e β per l'origine, passanti rispettivamente per s e r.

Imponendo al fascio $\Sigma:(\lambda+2\mu)x+\mu y+(\lambda+\mu)z+2\lambda+\mu=0$ di piani di asse s il passaggio per il punto $O(0,0,0)$ si ottiene $\mu=-2\lambda\Longrightarrow\alpha:3x+2y+z=0$.

Imponendo al fascio $\Sigma':\lambda x+\mu y+(\lambda-\mu)z+\lambda-2\mu=0$ di piani di asse r il passaggio per $(0,0,0)$ si ottiene $\lambda=2\mu\Longrightarrow\beta:2x+y+z=0$. Pertanto $r':\begin{cases}3x+2y+z=0\\ 2x+y+z=0\end{cases}$.

c) Il centro C della sfera S tangente a r in $P(0,1,-1)$ con il centro su s è il punto intersezione di s con il piano ν per P e ortogonale a r, il raggio R di S è la distanza di C da P. Si ha $\nu:x-y-z=0$, mentre $s:\begin{cases}x=1-t\\ y=t\\ z=t-3\end{cases}$ è una rappresentazione parametrica di s. Poiché $1-t-t-t+3=0\Longrightarrow t=\frac{4}{3}$ si ha

$$C(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},-\frac{5}{3}),\qquad R=\sqrt{\frac{2}{3}},\qquad S:\Big(x+\frac{1}{3}\Big)^2+\Big(y-\frac{4}{3}\Big)^2+\Big(z+\frac{5}{3}\Big)^2=\frac{2}{3}.$$

2) Il polinomio caratteristico di $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\-6&2&0\end{pmatrix}$ i suoi autovalori λ_i, con le relative molteplicità r_i sono:

$$P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=-\lambda(2-\lambda)^2,\qquad \lambda_1=0,\quad\lambda_2=2\qquad\text{con}\qquad r_1=1,\quad r_2=2.$$

La somma delle molteplicità degli autovalori di A è uguale all'ordine $n=3$ di A, quindi A verifica la prima condizione del criterio necessario sufficiente per la diaginalizzabilità.

La seconda condizione del criterio è soddisfatta sia da $\lambda_1 = 0$, perchè radice semplice di $P_A(\lambda)$, che da $\lambda_2 = 2$ perchè $\rho(A-2I) = 1 = n - r_2 = 3 - 2$; infatti

$$(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{R_1 \leftrightarrow -\frac{1}{6}R_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A è allora diagonalizzabile e una matrice diagonale simile ad A è

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'autospazio associato a $\lambda_2 = 2$ ed una sua base sono rispettivamente:

$$V_2 = \{(\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z, y, z)/y, z \in \mathbb{R}\}, \qquad B_{V_2} = \{(1,3,0), (-1,0,3)\}.$$

Poiché

$$(A-0I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \longrightarrow \frac{1}{2}R_2 \\ R_3 \to R_3 + 3R_2}}{\overset{R_1 \longrightarrow \frac{1}{2}R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - 2R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

l'autospazio associato a $\lambda_1 = 0$ ed una sua base sono rispettivamente:

$$V_0 = \{(0,0,z)/z \in \mathbb{R}\}, \qquad B_{V_0} = \{(0,0,1)\}.$$

Una matrice P invertibile tale che $\Delta = P^{-1}AP$ è

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Due diverse basi di $\mathbb{R}^3$ costituite da autovettori di A sono:

$$B_1 = \{(0,0,1), (1,3,0), (-1,0,3)\}, \qquad B_2 = \{(0,0,2), (2,6,0), (-2,0,6)\}.$$

3) $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado minimo avente fra le radici 1 e $1+i$ con molteplicità almeno 1 e 2 rispettivamente e tale che $P(2-i) = 6i - 8$ è

$$P(X) = (X-1)[(X-1-i)(X-1+i)]^2 Q(X)$$

con $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado minimo tale che

$$P(2-i) = (-7-i)Q(2-i) = -8+6i \Longrightarrow Q(2-i) = \frac{-8+6i}{-7-i} = 1-i.$$

Non può essere $Q(X) = a_0$ di grado zero perchè sarebbe $a_0 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.
Sia $Q(X) = a_0 + a_1X$. Deve essere:

$$a_0 + a_1(2-i) = 1 - i \Longrightarrow (a_0 + 2a_1) - a_1 i = 1 - i \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a_0 + 2a_1 = 1 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 = -1 \\ a_1 = 1 \end{cases}.$$

Pertanto $Q(X) = (X-1)$ e $P(X) = (X-1)^2(X^2 - 2X + 2)^2$.