Geometria **Ingegneria Meccanica** **Esame del** $5-2-2013$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Si fissi nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$.
a) Scrivere una rappresentazione cartesiana della retta s giacente su $\pi : x + y - z - 4 = 0$, passante per $P(0, 2, -2) \in \pi$ e incidente $r : \begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ 2x - 3y - z - 3 = 0 \end{cases}$.
b) Scrivere l'equazione cartesiana della sfera S, se esiste, tangente al piano $\alpha : x - z = 0$ in $O(0, 0, 0)$ e con il centro su r.
c) Trovare le coordinate degli eventuali punti di r distanti $\sqrt{6}$ dal punto P.
(10 punti)

2) Fissata la base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ nello spazio V_3 dei vettori geometrici, sia

$$W = L(\vec{i} - \vec{j}, 2\vec{j} - \vec{k}, \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}).$$

a) Trovare una base ortonormale B di W.
b) Scrivere una base ortonormale destrorsa di V_3 contenente B.
c) Trovare una base e la dimensione del sottospazio U dei vettori di V_3 ortogonali a $\vec{i} - \vec{j}$
(10 punti)

3) Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$\cos z = i$$

e rappresentare nel piano di Argand-Gauss le rette su cui si dispongono le soluzioni.
(10 punti)

Geometria **Ingegneria Meccanica** **Esame del** $5-2-2013$

1) a) La retta s giacente su $\pi : x+y-z-4=0$, passante per $P(0,2,-2) \in \pi$ e incidente $r : \begin{cases} x-y-z-2=0 \\ 2x-3y-z-3=0 \end{cases}$ è intersezione del piano π e del piano α contenente r e P.
Imponendo al fascio $\Sigma : (\lambda+2\mu)x-(\lambda+3\mu)y-(\lambda+\mu)z-2\lambda-3\mu=0$ il passaggio per P si ottiene $2\lambda=-7\mu$ e quindi $\alpha : 3x-y-5z-8=0$ e $s : \begin{cases} x+y-z-4=0 \\ 3x-y-5z-8=0 \end{cases}$.
b) Una sfera S, tangente al piano $\alpha : x-z=0$ in $O(0,0,0)$ e con il centro su r, esiste se r e la retta $r' : \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$, per O e ortogonale ad α, sono incidenti.

Poichè $\begin{cases} t+t-2=0 \\ 2t+t-3=0 \end{cases} \Longrightarrow t=1$, S esiste e il suo centro, il suo raggio e la sua equazione cartesiana sono rispettivamente:

$$C(1,0,-1), \qquad R=|C-O|=\sqrt{2}, \qquad S : (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=2.$$

c) $r : \begin{cases} x=2t+1 \\ y=t \\ z=t-1 \end{cases}$ è una rappresentazione parametrica di r. Imponendo che la distanza di $P_r(2t+1,t,t-1) \in r$ da P sia $\sqrt{6}$ si ha:

$$(2t+1)^2+(t-2)^2+(t+1)^2=6 \Longrightarrow 2t(3t+1)=0 \Longrightarrow t=0 \cup t=-\frac{1}{3}.$$

I punti di r distanti $\sqrt{6}$ da P sono pertanto

$$P_1(1,0,-1) \qquad \text{e} \qquad P_2(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{4}{3}).$$

2) a) Sia $W=L(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ con $\vec{v}_1=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{v}_2=2\vec{j}-\vec{k}$ e $\vec{v}_3=\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$. I vettori non nulli $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono linearmnte indipendenti perchè non paralleli. Il vettore $\vec{v}_3$ è combinazione lineare di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ perchè $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Quindi una base non ortogonale di W è $\overline{B}=\{\vec{i}-\vec{j}, 2\vec{j}-\vec{k}\}$ e $\dim W=2$.
Imponendo che i vettori $\lambda\vec{i}+(2\mu-\lambda)\vec{j}-\mu\vec{k}$ $(\lambda,\mu \in \mathbb{R})$di W abbiano prodotto scalare nullo con $\vec{i}-\vec{j}$ si ottiene $\lambda=\mu$. Pertanto $\vec{i}-\vec{j}$ e $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ sono due vettori ortogonali di W e una sua base ortonormale è

$$B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}, \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}\right\}.$$

b) Tenendo conto della definizione del prodotto vettoriale di due vettori, possiamo scrivere che una base ortonormale destrorsa di V_3 contenente B è

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j},\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k},(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j})\wedge(\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k})\right\}=$$

$$=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j},\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k},\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{k}\right\}.$$

c) Imponendo che $(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot(\vec{i}-\vec{j})=0$ si ottiene $x=y$. Pertanto

$$U=\{(x\vec{i}+x\vec{j}+z\vec{k}/x,z\in\mathbb{R}\}=\{x(\vec{i}+\vec{j})+z\vec{k}/x,z\in\mathbb{R}\}=L(\vec{i}+\vec{j},\vec{k})$$

è il sottospazio dei vettori ortogonali a $\vec{i}-\vec{j}$. L'insieme $B'=\{\vec{i}+\vec{j},\vec{k}\}$ è un sistema di generatori di U costituito da vettori linearmente indipendenti (non paralleli) quindi B' è base di U e $\dim U=2$.

3) Per definizione $\forall z\in\mathbb{C}\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. Pertanto dobbiamo trovare in $\mathbb{C}$ le soluzioni dell'equazione

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=i\Longrightarrow e^{iz}-2i+e^{-iz}=0.$$

Moltiplicando ambo i membri dell'ultima equazione per e^{iz} si ottiene:

$$(e^{iz})^2-2ie^{iz}+1=0\Longrightarrow(e^{iz})^2-2ie^{iz}-1=-2\Longrightarrow(e^{iz}-i)^2=2e^{i\pi}.$$

Posto $e^{iz}-i=X$ si ha $X_k=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{2}}$ per $k=0,1$. Pertanto si devono risolvere in $\mathbb{C}$ le due equazioni

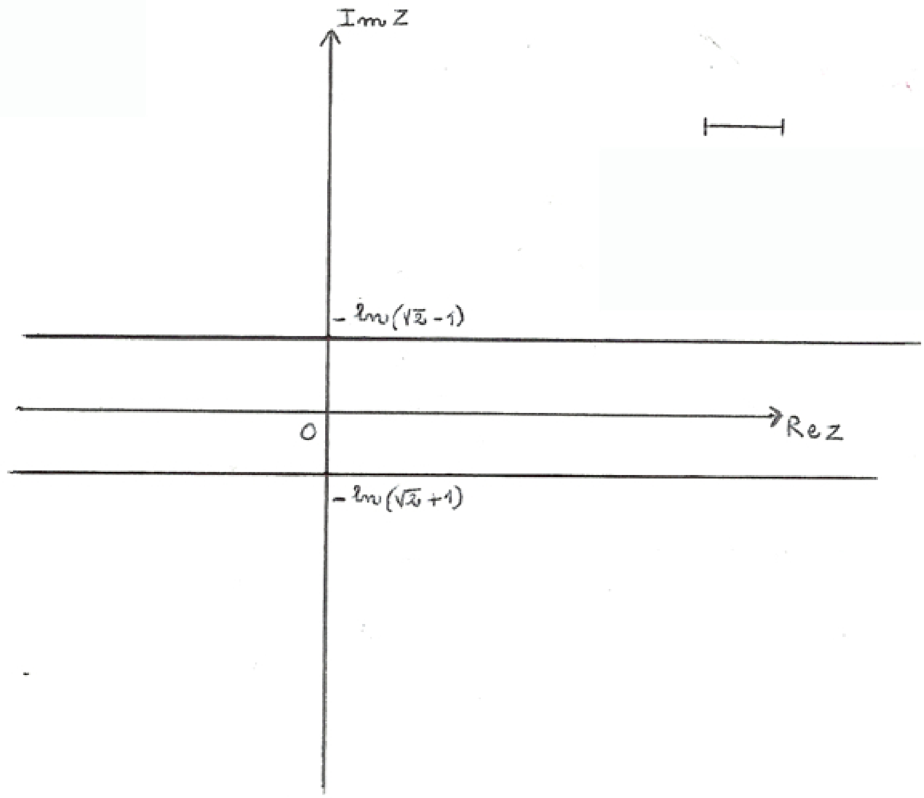
$$e^{iz}=i+i\sqrt{2}\qquad\text{e}\qquad e^{iz}=i-i\sqrt{2}.$$

$$e^{iz}=i(1+\sqrt{2})\Longrightarrow e^{iz}=(1+\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{2}}\Longrightarrow iz=\ln(1+\sqrt{2})+i\frac{\pi}{2}+2k\pi i\Longrightarrow$$

$$z=-i\ln(1+\sqrt{2})+(\frac{1}{2}+2k)\pi\qquad\text{con}\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

$$e^{iz}=i(1-\sqrt{2})\Longrightarrow e^{iz}=(\sqrt{2}-1)e^{i\frac{3}{2}\pi}\Longrightarrow iz=\ln(\sqrt{2}-1)+i\frac{3}{2}\pi+2k\pi i$$

$$z=-i\ln(\sqrt{2}-1)+(\frac{3}{2}+2k)\pi\qquad\text{con}\qquad k\in\mathbb{Z}.$$


Im z
$-\ln(\sqrt{2}-1)$
0
Re z
$-\ln(\sqrt{2}+1)$