Geometria **Ingegneria Meccanica** **Esame del** $8-1-2013$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$ si considerino le rette:

$$r : \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t \\ z = t+3 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = -2t+3 \\ y = t+1 \\ z = -t+1 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x-1=0 \\ 3y+2z-6=0 \end{cases} .$$

a) Provare che r e s sono parallele e trovare la loro distanza.
b) Provare che r, s e t sono complanari e scrivere l'equazione cartesiana del piano che le contiene.
(10 punti)

2) Si considerino le matrici ad elementi reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Trovare, se esiste, $X \in M_4(\mathbb{R})$ tale che $AX - BC = D$.
b) Dire se D è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere Δ diagonale simile a D.
(10 punti)

3) a) Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ trovare la dimensione del sottospazio

$$V_\lambda = \{(x,y,z,t) / x+\lambda y+z+(\lambda+1)t = \lambda x+y+2\lambda z+t = \lambda^2 x+\lambda y+\lambda^2 z = 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

b) Per ogni eventuale $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $\dim V_\lambda = 2$ trovare una base di V_λ.
(10 punti)

Geometria **Ingegneria Meccanica** **Esame del** $8-1-2013$

1) a) I due vettori $\vec{v}_r = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v}_s = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, paralleli rispettivamente a $r : \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t \\ z = t+3 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = -2t+3 \\ y = t+1 \\ z = -t+1 \end{cases}$, sono paralleli quindi $r \| s$ 0 $r \equiv s$.

Il sistema $\begin{cases} 2t+1 = -2v+3 \\ -t = v+1 \\ t+3 = -v+1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t+v = 1 \\ t+v = -1 \\ t+v = -2 \end{cases}$ non ha soluzioni quindi $r \| s$.

Il piano per $P(1,0,3) \in r$ e ortogonale a s ha equazione $\pi : 2x - y + z - 5 = 0$. La condizione $2(-2t+3) - (t+1) + (-t+1) - 5 = 0 \Longrightarrow t = \frac{1}{6}$ quindi $H(\frac{8}{3}, \frac{7}{6}, \frac{5}{6}) = \pi \cap s$ è la proiezione di P su s e la distanza tra r e s è la distanza di P da H:

$$d(r,s) = d(P,\pi) = \sqrt{(1-8/3)^2 + (7/6)^2 + (3-5/6)^2} = \sqrt{\frac{53}{6}}.$$

Una rappresentazione cartesiana di s e una rappresentazione parametrica di t sono:

$$s : \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad t : \begin{cases} x = 1 \\ y = u \\ z = 3 - \frac{3}{2}u \end{cases}.$$

Imponendo al fascio di piani $\Sigma : \lambda x + (2\lambda + \mu)y + \mu z - 5\lambda - 2\mu = 0$ di asse s il passaggio per $P(1,0,3) \in r$ si ottiene $\mu = 4\lambda$. Il piano contenente le rette r e s è quindi $\alpha : x + 6y + 4z - 13 = 0$.
Poichè $1 + 6u + 4(3 - \frac{3}{2}u) - 13 = 0$ è una identità in u il piano α contiene anche la retta t. Le rette r, s e t sono dunque complanari e α è il piano che le contiene.

2)Poichè $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ la matrice A è invertibile. Moltiplicando a sinistra ambo i membri di $AX = BC + D$ per A^{-1} si ottiene

$$X = A^{-1}(BC + D).$$

$$BC + D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_3 \to R_3 - R_1 \\ \longrightarrow \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_3 \to -(R_3 - 3R_2) \\ \longrightarrow \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \longrightarrow \\ R_2 \to R_2 - R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \longrightarrow \\ R_1 \to R_1 + R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= (I|A^{-1}).$$

Pertanto si ha:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 1 & -3 \\ -5 & 5 & 0 & -2 \\ 9 & -7 & 0 & 4 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Il polinomio caratteristico, gli autovalori λ_i con le relative molteplicità r_i di D sono:

$$P_D(X) = |D - \lambda I| = \lambda^2(\lambda+1)(\lambda-3)$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{con} \quad r_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1 \quad \text{con} \quad r_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3 \quad \text{con} \quad r_3 = 1.$$

La prima condizione del criterio per la diagonalizzabilità di una matrice è soddisfatta da D perchè $\sum r_i = 4$ che è l'ordine n di D; $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$ verificano la seconda condizione perchè radici semplici di $P_D(X)$, mentre $\lambda_1 = 0$ la verifica in quanto si ha $\rho(D) = 2 = n - r_1$. Pertanto D è diagonalizzabile e una matrice diagonale simile a D è

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) a) $V_\lambda = \{(x,y,z,t)/x+\lambda y+z+(\lambda+1)t = \lambda x+y+2\lambda z+t = \lambda^2 x+\lambda y+\lambda^2 z = 0\} \subset \mathbb{R}^4$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & 2\lambda & 1 \\ \lambda^2 & \lambda & \lambda^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} R_2 \to R_2 - \lambda R_1 \\ \longrightarrow \\ R_3 \to R_3 - \lambda R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda & 1-\lambda^2-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Si ha $\dim V_\lambda = 4 - \rho(A)$.
Per $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 0\}$ è $\dim V_\lambda = 4 - 3 = 1$.

Per $\lambda = -1$

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} R_1 \to R_1 + R_2 \\ \longrightarrow \\ R_2 \to -R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

quindi è $\dim V_{-1} = 4 - 2 = 2$.
Per $\lambda = 1$

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to -\frac{1}{2}(R_3 + R_2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

quindi è $\dim V_1 = 4 - 3 = 1$.
Per $\lambda = 0$

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

quindi è $\dim V_0 = 4 - 2 = 2$.
b) Si ha $\dim V_\lambda = 2$ Per $\lambda = -1$ e per $\lambda = 0$.
Si ha: $V_{-1} = \{(y - t, y, t, t) : y, t \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è

$$B_{V_{-1}} = \{(1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 1)\};$$

si ha $V_0 = \{(-z - t, -t, z, t) : y, t \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è

$$B_{V_0} = \{(-1, 0, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\}.$$