Ingegneria Meccanica **Geometria** **Esame del** $10-6-2014$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) a) Trovare modulo e argomento del numero complesso

$$z = \frac{(1+i)^6}{4i} + 2e^{i\frac{3}{2}\pi}.$$

b) Trovare, se è possibile, $X \in M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Fissato nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$ si considerino:

$$\alpha : x + y - 2z - 1 = 0, \qquad \beta : 2x - y - z = 0, \qquad \nu : x + y + z - 1 = 0.$$

a) Trovare l'angolo acuto formato dai piani α e β e le coordinate del punto proiezione ortogonale di $P(0,1,0) \in \alpha$ su β.

Sia $s = \beta \cap \nu$, scrivere una rappresentazione cartesiana rispettivamente
b) della proiezione ortogonale di s su α;
c) della retta giacente su α, incidente e perpendicolare a s.

3) a) Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ determinare la dimensione ed una base di

$$W_\lambda = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \lambda x - y + t = -\lambda x - y - 2\lambda z + t = \lambda x + \lambda z = 0.$$

b) Dire se $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile come matrice ad entrate reali; in caso affermativo scrivere $\Delta \in M_3(\mathbb{R})$ diagonale simile ad A.

1) a) Si ha:

$$z = \frac{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^6}{4e^{i\frac{\pi}{2}}} + 2e^{i\frac{3}{2}\pi} = \frac{2^3 e^{i\frac{3}{2}\pi}}{2^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} + 2e^{i\frac{3}{2}\pi} = 2e^{i\pi} + 2e^{i\frac{3}{2}\pi} =$$

$$= 2(\cos\pi + i\sin\pi) + 2(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi) = 2(-1-i) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi};$$

pertanto modulo e argomento di z sono rispettivamente:

$$\rho = 2\sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad \theta = \frac{5}{4}\pi.$$

b) Poiché $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) a) I coseni degli angoli formati dai piani $\alpha : x+y-2z-1=0$ e $\beta : 2x-y-z=0$ sono $\cos\hat{\alpha\beta} = \mp\frac{1}{2}$, quindi l'angolo acuto formato da α e β è $\frac{\pi}{3}$.
Imponendo al punto $(2t, 1-t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$, della retta per $P(0,1,0)$ e ortogonale a β di appartenere a β si ottiene $t = \frac{1}{6}$; $H(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{6})$ è quindi il punto proiezione ortogonale di P su β.
b) Il piano $\nu : x+y+z-1=0$ passante per $s = \beta \cap \nu$ è ortogonale al piano α, pertanto una rappresentazione cartesiana della proiezione ortogonale di s su α è $x+y+z-1 = x+y-2z-1 = 0$.
c) Una rappresentazione parametrica della retta $s = \beta \cap \nu$ è $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} - t \\ z = t \end{cases}$. La retta giacente su α, incidente e perpendicolare a s si può esprimere come intersezione di α e del piano per $Q = s \cap \alpha$ e ortogonale a s. Imponendo al punto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} - t, t)$ di s di appartenere ad α si ottiene $t = 0$, quindi $Q(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ e una rappresentazione cartesiana della retta cercata è $x+y-2z-1 = y-z-\frac{2}{3} = 0$.

3) a) $W_\lambda = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \lambda x - y + t = -\lambda x - y - 2\lambda z + t = \lambda x + \lambda z = 0\}$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo che ha come matrice incompleta

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 1 \\ -\lambda & -1 & -2\lambda & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - R_1}{\overset{R_2 \to -\frac{1}{2}(R_2+R_1)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda & -1 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - R_1}{\overset{R_1 \to R_1 + R_2}{\longrightarrow}}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_1 \to \frac{1}{\lambda} R_1}{\overset{\lambda \neq 0}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ si ha:

$$\dim W_\lambda = 4 - \rho(A_\lambda) = 4 - 2 = 2, \qquad W_\lambda = \{(-z, t - \lambda z, z, t)/z, t \in \mathbb{R}\}$$

e una base di W_λ è $B_{W_\lambda} = \{(1, \lambda, -1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$.

Per $\lambda = 0$ $A \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, pertanto:

$$\dim_{W_0} = 4 - \rho(A_0) = 4 - 1 = 3 \qquad W_0 = \{(x, t, z, t)/x, z, t \in \mathbb{R}\}$$

e una base di W_0 è $B_{W_0} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$.

b) La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile come matrice reale perché simmetrica. Il polinomio caratteristico e gli autovalori di A con le rispettive molteplicitè sono:

$$|A - \lambda I| = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 5), \qquad \lambda_1 = -1 \quad (r_1 = 2), \qquad \lambda_2 = 5 \quad (r_2 = 1).$$

Infine, una matrice diagonale simile ad A è $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.