Ingegneria Meccanica **Geometria** **Esame del** $11-2-2014$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & k \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

è diagonalizzabile come matrice ad entrate reali e, per tali valori, scrivere $\Delta \in M_4(\mathbb{R})$ diagonale e $P \in M_4(\mathbb{R})$ invertibile tale che $\Delta = P^{-1}AP$.

2) Si fissi nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$.
a) Provare che le rette

$$r : \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 3t-1 \\ z = -t \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = t+1 \\ y = -t \\ z = t+3 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

sono sghembe e scrivere l'equazione del piano passante per r e parallelo a s.
b) Scrivere, se è possibile, una rappresentazione cartesiana della retta u incidente sia r che s e parallela sia ad $\alpha : x+z+5=0$ che a $\beta : x-y+3=0$; trovare le coordinate dei punti di incidenza con r e s.

3) a) Fissata la base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ nello spazio V_3 dei vettori geometrici, trovare tutti i vettori $\vec{v}$ paralleli a $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ e il cui vettore proiezione su $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ abbia modulo $2\sqrt{2}$.
b) Scrivere $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado minimo avente fra le radici $z_1 = 2+i$ e $z_2 = 1-i$ e tale che $P(i) = 2$.

1) Il polinomio caratteristico di $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & k \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ è

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = -\lambda(2-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

Gli autovalori λ_i di A con le rispettive molteplicità λ_i sono:

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{con} \quad r_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2 \quad \text{con} \quad r_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 1 \quad \text{con} \quad r_3 = 2.$$

$\forall k \in \mathbb{R}$ la prima condizione del criterio necessario sufficiente per la diagonalizzabilità di A è verificata perchè la somma delle molteplicità dei suoi autovalori è 4 come il suo ordine n.

$\forall k \in \mathbb{R}$ gli autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$ verificano la seconda condizione del criterio perché radici semplici di $P_A(\lambda)$.

Consideriamo l'autovalore $\lambda_3 = 1$ radice doppia di $P_A(\lambda)$.

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k & k \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \leftrightarrow R_4 \\ \longrightarrow \\ R_2 \to R_2 - R_4 \\ R_3 \to R_3 + R_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & k \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ R_2 \to -R_2 \\ R_3 \leftrightarrow R_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

- Per $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ l'autovalore $\lambda_3 = 1$ non verifica la seconda condizione del criterio perché si ha $\rho(A - \lambda I) = 3 \neq n - r_3 = 4 - 2 = 2$ e quindi A non è diagonalizzabile.

- Per $k = 0$ l'autovalore $\lambda_3 = 1$ verifica la seconda condizione del criterio perché si ha $\rho(A - \lambda I) = 2 \neq n - r_3 = 4 - 2 = 2$ e quindi A è diagonalizzabile.

Pertanto $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & k \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile $\iff k = 0$ e una matrice diagonale simile ad $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per scrivere P tale che $\Delta = P^{-1}AP$ troviamo gli autospazi di A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ \longrightarrow \\ R_3 \to R_3 + R_1 \\ R_3 \to R_4 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_4 \to R_4 - 2R_2 \end{matrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pertanto l'autospazio V_0 ed una sua base sono rispettivamente:

$$V_0 = \{(0, X_2, 0, 0)/X_2 \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad B_{V_0} = \{(0, 1, 0, 0)\}.$$

$(A-2I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \to -\frac{1}{2}(R_2+R_1) \\ R_3 \to R_1 - R_3 \\ R_4 \to R_4 + R_1}}{\overset{R_1 \to -R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pertanto l'autospazio V_2 ed una sua base sono rispettivamente:

$$V_2 = \{(0, \frac{1}{2}X_4, -X_4, X_4)/X_4 \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad B_{V_2} = \{(0, 1, -2, 2)\}.$$

Infine $(A - I) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pertanto l'autospazio V_1 ed una sua base sono rispettivamente:

$$V_1 = \{(-X_4, 0, X_3, X_4)/X_3, X_4 \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad B_{V_1} = \{(1, 0, 0, -1), (0, 0, 1, 0)\}.$$

Scegliamo $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) a) I vettori $\vec{v}_r = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v}_s = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ sono paralleli rispettivamente a $r : \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 3t-1 \\ z = -t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = t+1 \\ y = -t \\ z = t+3 \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$. Poiché $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ non sono paralleli (perché non proporzionali) r e s sono sghembe o incidenti. Il sistema $\begin{cases} 2t+1 = u+1 \\ 3t-1 = -u \\ -t = u+3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u - 2t = 0 \\ u + 3t = 1 \\ u + t = -3 \end{cases}$ non ha soluzioni, infatti

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - R_1}{\overset{R_2 \to R_2 - R_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - \frac{3}{5}R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{18}{5} \end{array}\right),$$

quindi $r \cap s = \phi$ e r e s sono sghembe. Una rappresentazione cartesiana di r è $\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$. Imponendo al fascio di piani $\Sigma : \lambda x + \mu y + (2\lambda + 3\mu)z - \lambda + \mu = 0$ di asse r la condizione di parallelismo con s si ottiene $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$. L'equazione del piano per r e parallelo a s è quindi $2x - 3y - 5z - 5 = 0$.
b) Imponendo alla retta

$$\begin{cases} x = 2t + 1 + (v - 2t)u \\ y = 3t - 1 + (-v - 3t + 1)u \\ z = -t + (v + t + 3)u \end{cases} \qquad u, t, v \in \mathbb{R}$$

passante per $P_r(2t + 1, 3t - 1, -t) \in r$ e $P_s(v + 1, -v, v + 3) \in s$ la condizione di parallelismo con $\alpha : x + z + 5 = 0$ e $\beta : x - y + 3 = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} 2v - t + 3 = 0 \\ 2v + t - 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ v = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Pertanto $u : \begin{cases} x = 5 - \frac{9}{2}u \\ y = 5 - \frac{9}{2}u \\ z = -2 + \frac{9}{2}u \end{cases}$ e $u : \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$ sono rispettivamente una rappresentazione parametrica e una rappresentazione cartesiana della retta parallela ad α e β eincidente r e s rispettivamente in $P_r(5, 5, -2)$ e $P_s(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2})$.

3) a) La proiezione di un qualsiasi vettore $\vec{v}_\lambda = \lambda\vec{i} + 3\lambda\vec{j} - \lambda\vec{k}$ parallelo a $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ su $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ è

$$\text{proj}_{\vec{w}}\vec{v}_\lambda = \frac{\vec{v}_\lambda \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2}\vec{w} = \frac{2}{3}\lambda(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}).$$

Imponendo che $\text{proj}_{\vec{w}}\vec{v}_\lambda$ abbia modulo uguale a 2 cioè che $\sqrt{\frac{8}{3}\lambda^2} = 2\sqrt{2}$ si ottiene $\lambda = \mp\sqrt{3}$ e $\vec{v} = \mp\sqrt{3}\vec{i} \mp 3\sqrt{3}\vec{j} \pm \sqrt{3}\vec{k}$. sono i vettori cercati.
b) Per il teorema di Ruffini ed essendo a coefficienti reali, $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado minimo avente fra le radici $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 1 - i$ e tale che $P(i) = 2$ può essere scritto come

$$P(X) = (X - 2 - i)(X - 2 + i)(X - 1 + i)(X - 1 - i)Q(X)$$

con $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado minimo tale che

$$P(i) = 2(-2 - 6i)Q(i) = 2.$$

Posto $Q(X) = a_0 + a_1 X$ deve essere:

$$(-2a_0+6a_1-1)-(6a_0+2a_1)i = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -2a_0 + 6a_1 - 1 = 0 \\ 6a_0 + 2a_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 = -\frac{1}{20} \\ a_1 = \frac{3}{20} \end{cases} .$$

Pertanto si ha $P(X) = (X^2 - 4X + 5)(X^2 - 2X + 2)(-\frac{1}{20} + \frac{3}{20}X)$.