Ingegneria Meccanica **Geometria** **Esame del** $8-1-2014$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Si fissi nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$.
a) Provare che i tre punti $A(1,-1,2)$, $B(0,1,1)$, $C(2,0,-1)$ non sono allineati e scrivere l'equazione cartesiana del piano che li contiene.
b) Scrivere una rappresentazione cartesiana rispettivamente per la retta r per i punti B e C, per la retta s per A e parallela a r, per la retta u per A e ortogonale al piano contenente r e s.
c) Trovare la distanza di r da s.

2) a) Dire perché $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + 2z + t = z + t = x - y + z = y + t = 0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Trovare la dimensione di V, una base B di V e una base di $\mathbb{R}^4$ contenente B.
b) Dire se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile e, se è possibile, trovare Δ diagonale, P invertibile **non** ortogonale e Q ortogonale tali che $\Delta = P^{-1}AP = Q^TAQ$.

3) a) Scrivere in forma esponenziale, trigonometrica e nella forma $a + ib$ il numero complesso

$$\alpha = \frac{e^{1+\frac{2}{3}\pi i}(1 - i\sqrt{3})^{13}}{(2i)^{19}}$$

b) Trovare e rappresentare nel piano di Argand-Gauss le radici cubiche di α.

1) a) I punti $A(1,-1,2)$, $B(0,1,1)$, $C(2,0,-1)$ non sono allineati perché i vettori $A-B=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ e $C-B=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ non sono paralleli (non proporzionali). Un vettore ortogonale al piano π contenente i tre punti è $(A-B)\wedge(C-B)=5\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ quindi si ha $\pi: 5x+4(y-1)+3(z-1)=0 \Rightarrow \pi: 5x+4y+3z-7=0$.
b) Una rappresentazione parametrica e una rappresentazione cartesiana della retta r per B e C, della retta s per A e parallela a r e della retta u per A e ortogonale al piano contenente r e s sono rispettivamente:

- $r: \begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=1-2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad r: \begin{cases} x+2y-2=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$,
- $s: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t \\ z=2-2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x+z-3=0 \\ x+2y+1=0 \end{cases}$,
- $u: \begin{cases} x=1+5t \\ y=-1+4t \\ z=2+3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad u: \begin{cases} 4x-5y-9=0 \\ 3y-4z+11=0 \end{cases}$.

c) Il piano per A e ortogonale a r ha equazione $\alpha: 2x-y-2z+1=0$. Imponendo al punto $P_r(2t,1-t,1-2t)$ di appartenere ad α si ottiene $t=\frac{2}{9}$ quindi la proiezione ortogonale di A su r è $H(\frac{4}{9},\frac{7}{9},\frac{5}{9})$. La distanza di A da H uguale a $\frac{5}{3}\sqrt{2}$ è la distanza di r da s.

2) a) $V=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / x-y+2z+t=z+t=x-y+z=y+t=0\}$ è sottospazio di $\mathbb{R}^4$ perché sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_3\to R_3-R_1}{\overset{R_2\longleftrightarrow R_4}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_4\to R_4+R_3}{\overset{R_3\to -R_3}{\longrightarrow}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\dim V = 4-\rho(A)=4-3=1$, $V=\{(0,-t,-t,t)/t\in\mathbb{R}\}$ e una sua base è $B=\{(0,1,1,-1)\}$.

Una base di $\mathbb{R}^4$ contenente B è $B_{\mathbb{R}^4} = \{(0,1,1,-1),(1,0,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$

perché $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

b) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile perché simmetrica. Il polinomio caratteristico di A è $P_A(X) = |A - XI| = X(X-5)$, i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$ entrambi radici semplici di $P_A(X)$.
L'autospazio associato a $\lambda_1 = 0$ ed una sua base sono rispettivamente

$$V_0 = \{(-2y, y)/y \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad B_{V_0} = \{(2,-1)\}.$$

Poiché $(A - 5I) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + 1/2R_1]{R_1 \to -1/4R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ l'autospazio associato a $\lambda_2 = 5$ ed una sua base sono rispettivamente

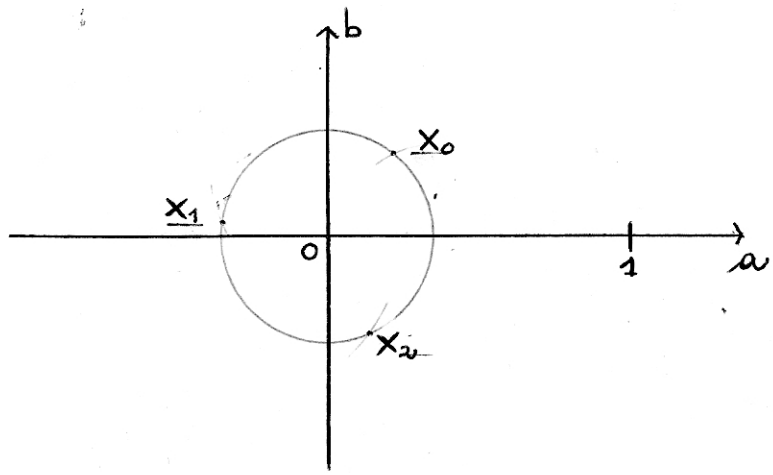
$$V_5 = \{(\frac{1}{2}y, y)/y \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad B_{V_5} = \{(1,2)\}.$$

La matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ invertibile e **non** ortogonale e $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ ortogonale verificano la condizione $\Delta = P^{-1}AP = Q^TAQ$.

3) a) $\alpha = \frac{e\, e^{i\frac{2}{3}\pi}(2e^{i\frac{5}{3}\pi})^{13}}{2^{19}(i^4)^4 i^3} = \frac{e\, e^{i\frac{2}{3}\pi} 2^{13} e^{i\frac{65}{3}\pi}}{2^{19}(-i)} = \frac{e}{2^6}\, \frac{e^{i\frac{2}{3}\pi} e^{i\frac{5}{3}\pi}}{e^{i\frac{3}{2}\pi}} = \frac{e}{2^6}\, \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{3}{2}\pi}} =$

$$= \frac{e}{2^6}\, e^{i\frac{5}{6}\pi} = \frac{e}{2^6}(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi) = \frac{e}{2^6}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i).$$

b)Le radici cubiche di α sono:

$$X_k = \frac{\sqrt[3]{e}}{4}\, e^{i\frac{\frac{5}{6}\pi + 2k\pi}{3}}, \qquad k = 0,1,2.$$

La loro rappresentazione cartesiana nel piano di Argand-Gauss è: