Ingegneria Meccanica **Geometria** **Esame del** $8-7-2014$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Fissato nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$, scrivere una rappresentazione cartesiana

a) della retta per $P(1,-2,3)$, complanare con $s : \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t+2 \\ z = t-3 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ e parallela a $\pi : 3x + y + z + 4 = 0$;

b) della circonferenza di centro P e tangente a s.

c) Trovare le coordinate degli eventuali punti di s equidistanti da P e da $Q(-1,2,-3)$.

2) a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, trovare la dimensione e una base di

$$W_k = L\big((1,1,1,k),(1,-k,1,-1),(-1,k,1,k)\big)$$

b) Fissata la base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ nello spazio V_3 dei vettori geometrici, trovare tutti i vettori di modulo $\sqrt{37}$ complanari con $\vec{u}_1 = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{u}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ e ortogonali a $\vec{u}_3 = -\vec{i} + 3\vec{j}$.

3) a) Scrivere tutti i polinomi $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado 5 il cui termine noto sia 30, aventi fra le radici $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 3$.

b) Trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & k+1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ha l'autovalore $\lambda = 3$ e per tali valori dire se A è diagonalizzabile.

1) a) La retta r per $P(1,-2,3)$ complanare con $s: x-2y+3=z-y+5=0$ e parallela a $\pi: 3x+y+z+4=0$ si può esprimere come intersezione del piano α contenente s e P e del piano β parallelo a π passante per P.
Il fascio Σ di piani di asse s ha equazione $\Sigma: \lambda x-(2\lambda+\mu)y+\mu z+3\lambda+5\mu=0$; imponendo a Σ il passaggio per P si ottiene $\lambda=-\frac{5}{4}\mu$, quindi $\alpha: 5x-6y-4z-5=0$. Imponendo al fascio improprio $\Sigma': 3x+y+z+d=0$ dei piani paralleli a π il passaggio per P si ottiene $d=-4$, quindi $\beta: 3x+y+z-4=0$. Una rappresentazione cartesiana di r è quindi

$$r: 5x-6y-4z-5=3x+y+z-4=0.$$

b) Esprimiamo la circonferenza γ di centro P e tangente a s come intersezione del piano α, contenente s e P, e della sfera S di centro P e raggio uguale alla distanza di P da s.
Il piano ν per P e ortogonale a s ha equazione $\nu: 2(x-1)+(y+2)+(z-3)=0$. Imponendo che le coordinate $(2t+1,t+2,t-3)$ del generico punto di s soddisfino l'equazione di ν si ottiene $t=\frac{1}{3}$; quindi il punto proiezione ortogonale di P su s è $H(\frac{5}{3},\frac{7}{3},-\frac{8}{3})$ e la distanza di P da s, uguale alla distanza di P da H, è $\sqrt{\frac{154}{3}}$. Una rappresentazione cartesiana di γ è

$$\gamma: (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2-\frac{154}{3}=5x-6y-4z-5=0.$$

c) Imponendo che le distanze del generico punto $P_t(2t+1,t+2,t-3)$ di s da $P(1,-2,3)$ e da $Q(-1,2,-3)$ siano uguali si ottiene $t=4$ pertanto $P_{t=4}(9,6,1)$ è il punto di s equidistante da P e da Q.

2) a) L'insieme $\{(1,1,1,k),(1,-k,1,-1),(-1,k,1,k)\}$ è un sistema di generatori di W_k. Pertanto la la dimensione di W_k è la caratteristica dlla matrice

$$M=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-k&k\\1&1&1\\k&-1&k\end{pmatrix}\begin{matrix}R_2\to R_2-R_1\\ \longrightarrow\\ R_3\to\frac{1}{2}(R_3-R_1)\\ R_4\to R_4-kR_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-k-1&k+1\\0&0&1\\0&-1-k&2k\end{pmatrix}\begin{matrix}\longrightarrow\\ R_4\to R_4-R_2\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-k-1&k+1\\0&0&1\\0&0&k-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\longrightarrow\\ R_4\to R_4-(k-1)R_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-k-1&k+1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Per $k \in \mathbb{R} - \{-1\}$ si ha $\dim W_k = 3$ e $B_{W_k}\{(1,1,1,k),(1,-k,1,-1),(-1,k,1,k)\}$ è una base di W_k. Per $k=-1$, $M \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $\dim W_{-1} = 2$ e $B_{W_{-1}} = \{(1,1,1,-1),(-1-1,1,-1)\}$.

b) Imponendo che il prodotto scalare fra i vettori $(\lambda+2\mu)\vec{i}+(\lambda+\mu)\vec{j}+(3\mu-2\lambda)\vec{k}$ $(\lambda,\mu \in \mathbb{R})$, complanari con $\vec{u}_1 = \vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ e $\vec{u}_2 = 2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, e il vettore $\vec{u}_3 = -\vec{i}+3\vec{j}$ sia zero si ottiene $\mu = -2\lambda$. I vettori $-3\lambda\vec{i} - \lambda\vec{j} - 8\lambda\vec{k}$ di modulo $\sqrt{37}$ sono quelli per i quali $74\lambda^2 = 37 \Longrightarrow \lambda = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pertanto $\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{i} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \pm 4\sqrt{2}\vec{k}$ sono i vettori di modulo $\sqrt{37}$ complanari con $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ e ortogonali a $\vec{u}_3$.

3) a) Tenendo conto del teorema di Ruffini tutti i polinomi $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado 5 aventi fra le radici $z_1 = 1+2i$ e $z_2 = 3$ sono:

$$P(X) = (X-1-2i)(X-1+2i)(X-3)(a_0+a_1X+a_2X^2), \quad a_i \in \mathbb{R}(i=0,1,2), \quad a_2 \neq 0.$$

Perch é il termine noto sia 30 deve essere $P(0) = 30$ cioè $-15a_0 = 30 \Longrightarrow a_0 = -2$. Pertanto $P(X) = (X^2-2X+5)(X-3)(-2+a_1X+a_2X^2)$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $a_2 \neq 0$.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & k+1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ha l'autovalore $\lambda = 3 \Longleftrightarrow |A-3I| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & k+1 \\ 6 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 12(2+k) = 0 \Longleftrightarrow k = -2$.

Il polinomio caratteristico della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, che si ottiene sostituendo $k=-2$, è $|A-\lambda I| = \lambda^2(3-\lambda)$. Gli autovalori λ_i di A con le relative molteplicità r_i sono: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$ con $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$.

A soddisfa la prima condizione del criterio necessario sufficiente per la diagonalizzabilità di una matrice perché la somma delle molteplicità degli autovalori è uguale all'ordine n della matrice. L'autovalore $\lambda_1 = 3$ soddisfa la seconda condizione perché radice semplice del polinomio caratteristico. L'autovalore $\lambda_2 = 0$ soddisfa la seconda condizione perché $\rho(A) = \rho\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 1 = 3-2 = n - r_2$. Pertanto A è diagonalizzabile.