Ingegneria Meccanica **Geometria** **Esame del** $9-9-2014$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Fissato nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$, scrivere una rappresentazione cartesiana
a) della retta per $A(-1, 2, 3)$, ortogonale a $r : x+2y-z+1 = 2x-y+3z-1 = 0$ e a $s : 3x + 4y - z + 3 = x + y + z + 5 = 0$;
b) del piano per $B(-3, 1, 2)$ e $C(-4, -1, 1)$, ortogonale a $\pi : x+5y+2z-3 = 0$.
c) Dire se esistono punti di π equidistanti da A, B, C.

2) a) Trovare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il vettore $(-\lambda, \lambda-1, \lambda+1) \in \mathbb{R}^3$ **non** appartiene al sottospazio

$$W_\lambda = L\big((1, 1, 0), (\lambda, 1, \lambda - 1), (\lambda, \lambda + 1, \lambda + 1)\big).$$

b) Dire se $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile come matrice ad entrate reali; in ogni caso scrivere una base di $\mathbb{R}^4$ contenente il massimo numero di autovettori di A.

3) a) Trovare modulo e argomento del numero complesso

$$\alpha = \frac{[(1-i)^{11}(1-i\sqrt{3})]^2}{i^{343}}.$$

b) Trovare e scrivere nella forma $a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$e^{iz} = -3i.$$

1) a) I vettori $\vec{v}_r = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v}_s = 5\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$ sono paralleli rispettivamente a $r : x + 2y - z + 1 = 2x - y + 3z - 1 = 0$ e a $s : 3x + 4y - z + 3 = x + y + z + 5 = 0$. La retta passante per $A(-1, 2, 3)$ ortogonale sia a r che a s è intersezione del piano $x - y - z + 6 = 0$ per A e ortogonale a r e del piano $5x - 4y - z + 16 = 0$ per A e ortogonale a s quindi $x-y-z+6 = 5x-4y-z+16 = 0$ è una sua rappresentazione cartesiana.

b) Un vettore ortogonale al piano α passante per $B(-3, 1, 2)$ e $C(-4, -1, 1)$ e ortogonale a $\pi : x + 5y + 2z - 3 = 0$ è

$$(B - C) \wedge (\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}) = (\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \wedge (\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}) = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k};$$

Imponendo al fascio di piani $x + y - 3z + d = 0$ paralleli ad α il passaggio per B si ottiene $d = 8$ e quindi per α l'equazione $x + y - 3z + 8 = 0$.

c) $P(x, y, z)$ è equidistane da A, B, C se e solo se

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = (x+3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = (x+4)^2+(y+1)^2+(z-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$2x - 4y - 6z + 14 = 6x - 2y - 4z + 14 = 8x + 2y - 2z + 18,$$

pertanto se e solo se P appartiene alla retta $p : 2x + y + z = x + 2y + z + 2 = 0$. Imponendo al punto $(t + 2, t, -3t - 4)$ di appartenere al piano π si ottiene $-9 = 0$; quindi non esistono punti di π equidistanti da A, B e C.

medskip

2) a) $(-\lambda, \lambda - 1, \lambda + 1) \in W_\lambda \Longleftrightarrow \rho(A) = \rho(A|b)$, dove

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1 & 1 & \lambda+1 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda+1 & \lambda+1 \end{array}\right) \underset{R_2 \to R_2 - R_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & \lambda & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 2\lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda+1 & \lambda+1 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_3 \to R_3 + R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & \lambda & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 2\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 3\lambda \end{array}\right).$$

Per $\lambda \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$ si ha $3 = \rho(A) = \rho(A|b)$.

Per $\lambda = 1$, $(A|b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - 3R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ e quindi $2 = \rho(A) = \rho(A|b)$.

Per $\lambda = -2$, $(A|b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$ e $2 = \rho(A) \neq \rho(A|b) = 3$.

Concludendo, $(-\lambda, \lambda - 1, \lambda + 1) \notin W_\lambda$ solo per $\lambda = -2$.

b) Il polinomio caratteristico di $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ è $|A - \lambda I| = (-1 - \lambda)^4$. L'unico autovalore di A è $\lambda = -1$ e $r = 4$ è la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico.

Si ha $\rho(A+I) = \rho \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq n-r = 4-4$ (n è l'ordine di A), quindi A non è diagonalizzabile per la seconda condizione del criterio necessario-sufficiente di diagonalizzabilità.

L'autospazio associato all'autovalore $\lambda = -1$ ed una sua base sono rispettivamente

$$V_{-1} = \{(-2X_2, X_2, 0, X_4)/X_2, X_4 \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad B_{V_{-1}} = \{(-2,1,0,0),(0,0,0,1)\}.$$

Poiché $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ una base di $\mathbb{R}^4$ contenente il massimo numero di autovettori di A è

$$B_{\mathbb{R}^4} = \{(-2,1,0,0),(0,0,0,1),(0,0,1,0),(1,0,0,0)\}.$$

3) a) Si ha:

$$(1-i)^{22} = (\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi})^{22} = 2^{11}e^{i\frac{77}{2}\pi} = 2^{11}e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$(1-i\sqrt{3})^2 = (2e^{i\frac{5}{3}\pi})^2 = 2^2e^{i\frac{10}{3}\pi} = 2^2e^{i\frac{4}{3}\pi} \quad \text{e} \quad i^{343} = (i^4)^{85}i^3 = -i = e^{i\frac{3}{2}\pi}.$$

Pertanto

$$\alpha = \frac{[(1-i)^{11}(1-i\sqrt{3})]^2}{i^{343}} = \frac{2^{13}e^{i\frac{11}{6}\pi}}{e^{i\frac{3}{2}\pi}} = 2^{13}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

e quindi modulo e argomento di α sono rispettivamente $\rho = 2^{13}$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$.

b) $e^{iz} = -3i \Longrightarrow e^{iz} = 3e^{i\frac{3}{2}\pi} \Longrightarrow e^{iz} = e^{\lg 3}e^{i\frac{3}{2}\pi} \Longrightarrow e^{iz} = e^{\lg 3 + i\frac{3}{2}\pi} \Longrightarrow$

$$iz = \lg 3 + i\frac{3}{2}\pi + 2k\pi i \Longrightarrow z = (\frac{3}{2} + 2k)\pi - i\lg 3, \quad k \in \mathbb{Z}.$$