Ingegneria Meccanica **Geometria** **Esame del** $8 - 1 - 2015$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Si fissi nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$.
a) Provare che le rette

$$r : \begin{cases} x + 3y + z - 4 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t + 1 \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

sono parallele e scrivere l'equazione del piano che le contiene.
b) Trovare la distanza fra r e s.
c) Scrivere, se è possibile, l'equazione cartesiana di ciascuna sfera di raggio $2\sqrt{6}$ avente il centro su s e tangente al piano $\alpha : 2x + y + z - 1 = 0$.

2) a) Trovare la dimensione ed una base del sottospazio

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x+y-z+t = x-y+z+t = -x+y+z+t = 3x-y+z+3t = 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

b) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ k & 8 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile come matrice ad entrate reali.
c) Dire se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$; in caso affermativo scriverla.

3) a) Scrivere nella forma $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ il numero complesso

$$z = -(3 + 3i)^8 \left(\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^7,$$

trovarne le radici terze e rappresentarle nel piano di Argand-Gauss.
b) Scrivere un polinomio $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado minimo avente $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 2$ fra le radici e tale che $P(1 + i) = 1$.

1) a) Il vettore $\vec{v}_r = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, parallelo a $r : \begin{cases} x + 3y + z - 4 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$, e il vettore $\vec{v}_s = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, parallelo a $s : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t + 1 \\ z = 2 - t \end{cases}$, sono paralleli quindi le rette r e s sono coincidenti o parallele. Il sistema $\begin{cases} (3 - 2t) + 3(t + 1) + (2 - t) - 4 = 0 \\ (3 - 2t) + (t + 1) - (2 - t) + 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ $\begin{cases} 4 = 0 \\ 4 = 0 \end{cases}$ non ha soluzioni cioè $r \cap s = \emptyset$, pertanto r e s sono parallele. Imponendo al fascio di piani $\Sigma : (\lambda + \mu)x + (3\lambda + \mu)y + (\lambda - \mu)z - 4\lambda + 2\mu = 0$ di asse r il passaggio per $P(-1, 3, 0) \in s$ si ottiene $\lambda = -\mu$; l'equazione del piano π contenente r e s è $\pi : y + z - 3 = 0$.
b) Il piano β per $P(-1, 3, 0) \in s$ e ortogonale a r ha equazione $\beta : 2x - y + z + 5 = 0$, una rappresentazione parametrica di r è $r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$. Poiché $2(1 - 2t) - t + (3 - t) + 5 = 0 \Longrightarrow t = \frac{5}{3}$ la proiezione ortogonale di P su r è il punto $\beta \cap r = H(-\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3})$. La distanza fra r e s, cioè la distanza fra P e H è $d(r, s) = d(P, H) = \sqrt{(-\frac{7}{3} + 1)^2 + (\frac{5}{3} - 3)^2 + (\frac{4}{3})^2} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.
c) Per trovare le coordinate del centro di ciascuna sfera di raggio $2\sqrt{6}$ avente il centro su s e tangente al piano $\alpha : 2x+y+z-1 = 0$, imponiamo che la distanza di $C_s(3-2t, t+1, 2-t)$ da α sia $2\sqrt{6}$. Si ottiene: $\frac{|-4t+8|}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6} \Longrightarrow t = -1 \cup t = 5$; i centri delle sfere e le loro equazioni cartesiane sono allora $C_1(5, 0, 3)$, $C_2(-7, 6, -3)$, $S_1 : (x - 5)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 24$ e $S_2 : (x + 7)^2 + (y - 6)^2 + (z + 3)^2 = 24$.

2) a) W è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo la cui matrice incompleta è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} R_2 \to -1/2(R_2 - R_1) \\ \longrightarrow \\ R_3 \to R_3 + R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} R_3 \to 1/2(R_3 - 2R_2) \\ \longrightarrow \\ R_4 \to R_4 + 4R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\dim W = 4-\rho(A) = 4-3 = 1$ e $W = \{(-t,-t,-t,t)/t \in \mathbb{R}\} = L((1,1,1,-1))$ e una base di W è $B = \{(1,1,1,-1)/t \in \mathbb{R}\}$.

b) Il polinomio caratteristico di $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ k & 8 \end{pmatrix}$ è $P_A(\Lambda) = \begin{vmatrix} 2-\Lambda & 4 \\ k & 8-\Lambda \end{vmatrix} =$ $(2-\Lambda)(8-\Lambda) - 4k = \Lambda^2 - 10\Lambda + (16-4k)$ che ha $\frac{\Delta}{4} = 9 + 4k \geq 0 \iff k \geq -\frac{9}{4}$. Pertanto

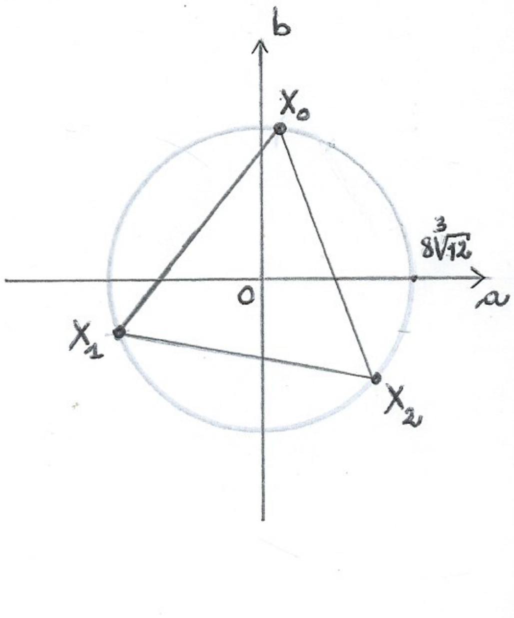
- per $k > -\frac{9}{4}$, A ha due autovalori distinti e quindi, essendo di ordine 2, è diagonalizzabile.
- per $k < -\frac{9}{4}$, A non ha autovalori ($P_A(\Lambda)$ non ha radici reali) e quindi non è diagonalizzabile.
- per $k = -\frac{9}{4}$, A ha un autovalore $\bar{\lambda}$ di molteplicità $r = 2$ e quindi A non è diagonalizzabile. Infatti per esserlo dovrebbe essere $\rho(A - \bar{\lambda}I) = 0$ e ciò non è possibile perché qualunque sia $\bar{\lambda}$ la matrice $(A - \bar{\lambda}I)$ non è la matrice nulla.

In conclusione A, come matrice ad entrate reali, è diagonalizzabile per $k > -\frac{9}{4}$.

c) La matrice reale $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ è simmetrica, quindi digonalizzabile mediante una matice ortogonale $Q \in M_2(\mathbb{R})$ le cui colonne sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ di autovettori di A. Il polinomio caratteristico e gli autovalori di A sono:
$P_A(\Lambda) = \begin{vmatrix} 2-\Lambda & 4 \\ 4 & 8-\Lambda \end{vmatrix} = \Lambda(\Lambda - 10)$, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 10$ entrambi radici semplici di $P_A(\Lambda)$. $(A - 0I) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_1]{R_1 \to 1/2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
$(A - 10I) = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + 1/2R_1]{R_1 \to -1/8R_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Gli autospazi associati ai due autovalori e una base per ciascuno di essi sono: $V_0 = \{(-2X_2, X_2)/X_2 \in \mathbb{R}\}$, $V_{10} = \{(\frac{1}{2}X_2, X_2)/X_2 \in \mathbb{R}\}$ e $B_{V_0} = \{(2,-1)\}$, $B_{V_{10}} = \{(1,2)\}$. Pertanto una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A è $B = \{(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}), (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})\}$.

3) a) $z = -(3+3i)^8\left(\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^7 = e^{i\pi}3^8(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^8\frac{1}{3^7}(2e^{i\frac{\pi}{3}})^7 = e^{i\pi}3(2^4)e^{i0}2^7e^{i\frac{\pi}{3}} =$ $3(2^{11})e^{i\frac{4}{3}\pi} = 3(2^{11})(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi) = 3(2^{11})(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -3(2^{10}) - 3\sqrt{3}(2^{10})i$.
Le radici cubiche di z sono le soluzioni dell'equazione $X^3 = 3(2^{11})e^{i\frac{4}{3}\pi}$ e quindi

$$X_k = 8\sqrt[3]{12}e^{i\frac{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi}{3}}, \; k = 0,1,2.$$



b) Tenendo presente il teorema di Ruffini e che ogni polinomio a coefficienti reali avente una radice complessa ha anche la complessa coniugata, $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado minimo avente $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 2$ fra le radici tale che $P(1 + i) = 1$ è

$$P(X) = (X - 2 - i)(X - 2 + i)(X - 2)Q(X)$$

con $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado minimo tale che $P(1 + i) = (1 + 3i)Q(1 + i) = 1$.
E' $Q(X) \neq a_0$ perché sarebbe $a_0 = \frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{10} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Sia $Q(X) = a_0 + a_1X$.
Deve allora essere $P(1+i) = (a_0-2a_1)+i(3a_0+4a_1) = 1$, cioè $\begin{cases} a_0 - 2a_1 = 1 \\ 3a_0 + 4a_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ $a_0 = \frac{2}{5}$ e $a_1 = -\frac{3}{10}$. Pertanto $P(X) = (X^2 - 4X + 5)(X - 2)(\frac{2}{5} - \frac{3}{10}X)$.