Ingegneria Meccanica **Geometria** **Esame del** $3-2-2015$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Si fissi nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$.
a) Provare che l'intersezione γ fra $S : x^2+y^2+z^2-x+2y-4z+\frac{9}{4}=0$ e $\pi : 2x-y-3z+8=0$ è una circonferenza, trovarne il raggio e le coordinate del centro. Scrivere l'equazione cartesiana della sfera che ha γ come circonferenza massima.

b) Provare che le rette $r : \begin{cases} x=2t+1 \\ y=t-3 \\ z=3t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x=-t-2 \\ y=2t+1 \\ z=t-1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ sono sghembe; scrivere una rappresentazione cartesiana per ciascun piano tangente a S e parallelo sia a r che a s.

2) Siano: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
a) Trovare, se è possibile, $X \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $AX-B+I=\underline{0}$.
b) Dire se B è diagonalizzabile come matrice ad entrate reali. Scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ contenente il massimo numero di autovettori di B. Dire se B è diagonalizzabile come matrice ad entrate complesse.

3) a) Trovare modulo e argomento del numero complesso

$$\alpha = i^{779} e^{i\frac{226}{3}\pi} (\sqrt{3}+i)^5.$$

Scrivere nella forma $a+bi$ tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$e^{iz} = \alpha.$$

b) Trovare la dimensione ed una base, rispettivamente come sottospazio di $\mathbb{C}^2_{\mathbb{C}}$ e di $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$, di

$$W = L\big((1+i, 3i), (2+2i, 6i), (-1+3i, -6+3i)\big).$$

1) a) Il centro e il raggio della sfera $S : (x - \frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 3$ sono rispettivamente: $C(\frac{1}{2}, -1, 2)$ e $R = \sqrt{3}$. La distanza di C da $\pi : 2x - y - 3z + 8 = 0$ è $d(C, \pi) = \frac{4}{\sqrt{14}}$. Poiché

$$d^2(C, \pi) = \frac{8}{7} < 3 = R^2$$

$\gamma = S \cap \pi$ è una circonferenza di raggio $r = \sqrt{R^2 - d^2(C, \pi)} = \sqrt{\frac{13}{7}}$.
Una rappresentazione parametrica della retta h per C e ortogonale a π è
$h : \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ $(\forall t \in \mathbb{R})$. Il centro di γ è $C' = h \cap \pi$.
$P\big(\frac{1}{2} + 2t, -1 - t, 2 - 3t\big) \in \pi \iff 2(\frac{1}{2} + 2t) - (-1 - t) - 3(2 - 3t) + 8 = 0 \iff t = -\frac{2}{7}$.
Pertanto $C'\big(-\frac{1}{14}, -\frac{5}{7}, \frac{20}{7}\big)$. L'equazione cartesiana della sfera che ha γ come circonferenza massima è $(x + \frac{1}{14})^2 + (y + \frac{5}{7})^2 + (z - \frac{20}{7})^2 = \frac{13}{7}$.

b) I vettori $\vec{v}_r = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{v}_s = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, paralleli a $r : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 3 \\ z = 3t \end{cases}$ e

$s : \begin{cases} x = -t - 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = t - 1 \end{cases}$ rispettivamente, non sono paralleli, r e s sono dunque incidenti

o sghembe. Il sistema $\begin{cases} 2t + 1 = -v - 2 \\ t - 3 = 2v + 1 \\ 3t = v - 1 \end{cases} \implies \begin{cases} v + 2t = -3 \\ 2v - t = -4 \\ v - 3t = 1 \end{cases}$ non ha soluzioni.
Infatti:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - R_1}{\overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -5 & 4 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

pertanto $r \cap s = \emptyset$ e r e s sono sghembe.
Poiché $\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = -5\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k}$, il fascio di piani paralleli sia a r che a s ha equazione $\Sigma : x + y - z + d = 0$. Imponendo che la distanza del centro C di S dal generico piano di Σ sia uguale al suo raggio R, si ottiene: $\frac{|d - \frac{5}{2}|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \implies d = \frac{11}{2} \cup d = -\frac{1}{2}$.
I piani tangenti a S e paralleli sia a r che a s sono: $\pi_1 : x + y - z + \frac{11}{2} = 0$ e $\pi_2 : x + y - z - \frac{1}{2} = 0$.

2) a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ è invertibile perché $\det A = 3 \neq 0$. Moltiplicando per

A^{-1} a sinistra ambo i membri di $AX = B - I$ si ha:

$$X = A^{-1}(B - I).$$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - \frac{2}{3}R_2}{\overset{\frac{1}{3}R_2 \leftrightarrow -R_1 + \frac{1}{3}R_2}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_3 \to R_3 - R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 \to R_2 + 2R_3}{\longrightarrow}$$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = (I|A^{-1})$. Pertanto

$$X = A^{-1}(B - I) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{5}{3} & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $|B - \Lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\Lambda & -2 & -5 \\ 0 & -\Lambda & -4 \\ 0 & 1 & 3-\Lambda \end{vmatrix} = (1-\Lambda)(\Lambda^2 - 3\Lambda + 4)$ è il polinomio caratteristico di B. L'unico autovalore di B, come matrice ad entrate reali è $\lambda = 1$ con molteplicità $r = 1$ e quindi B non è diagonalizzabile perché la somma delle molteplicità degli autovalori è diversa dal suo ordine.

$$(B - I) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{R_2 \to R_2 + R_3}{\overset{R_1 + 2R_3 \leftrightarrow R_3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{R_1 \to R_1 + R_3}{\overset{R_3 \to R_3 - 2R_2}{\longrightarrow}}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -0 \end{pmatrix}$. L'autospazio associato a $\lambda = 1$ ed una sua base sono rispettivamente $V_1 = \{(X_1, 0, 0)/X_1 \in \mathbb{R}^3\}$ e $B_{V_1} = \{(1, 0, 0)\}$. Come base di $\mathbb{R}^3$ contenente il massimo numero di autovettori di B scegliamo la base canonica $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
La matrice B, di ordine 3 è diagonalizzabile come matrice ad entrate in $\mathbb{C}$: infatti $|B - \Lambda I|$ ha tre radici complesse distinte e quindi B tre autovalori distinti.

2) a) $i^{779} = (i^4)^{194} i^3 = -i = e^{i\frac{3}{2}\pi}$; $e^{i\frac{226}{3}\pi} = e^{i\frac{4}{3}\pi}$; $(\sqrt{3} + i)^5 = (2e^{i\frac{\pi}{6}})^5 = 2^5 e^{i\frac{5}{6}\pi}$.
Pertanto $\alpha = i^{779} e^{i\frac{226}{3}\pi} (\sqrt{3} + i)^5 = 2^5 e^{i\frac{3}{2}\pi} e^{i\frac{4}{3}\pi} e^{i\frac{5}{6}\pi} = 2^5 e^{i\frac{5}{3}\pi}$. Modulo e argomento di α sono quindi:

$$|\alpha| = 2^5 \quad \text{e} \quad \arg \alpha = \frac{5}{3}\pi.$$

$$e^{iz} = \alpha \Longrightarrow e^{iz} = 2^5 e^{i\frac{5}{3}\pi} \Longrightarrow iz = \lg_e 2^5 + i(\frac{5}{3}\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow$$

$$z = (\frac{5}{3}\pi + 2k\pi) - i \lg_e 2^5, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) Si ha:

- $(2 + 2i, 6i) = 2(1 + i, 3i)$;
- $(-1 + 3i, -6 + 3i) = (1 + 2i)(1 + i, 3i)$. Infatti

$$z(1 + i, 3i) = (-1 + 3i, -6 + 3i) \Longrightarrow \begin{cases} z(1 + i) = -1 + 3i \\ z(3i) = -6 + 3i \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} z = \frac{-1+3i}{1+i} = \frac{(-1+3i)(1-i)}{2} = 1 + 2i \\ z = \frac{-6+3i}{3i} = 1 + 2i \end{cases};$$

- $(1 + i, 3i)$ e $(-1 + 3i, -6 + 3i)$ non sono proporzionali secondo una costante reale.

Come basi di $W = L\big((1 + i, 3i), (2 + 2i, 6i), (-1 + 3i, -6 + 3i)\big)$ rispettivamente come sottospazio di $\mathbb{C}^2_{\mathbb{C}}$ e di $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ possiamo allora scegliere:

$$B_{W_{\mathbb{C}}} = \{(1 + i, 3i)\} \quad \text{e} \quad B_{W_{\mathbb{R}}} = \{(1 + i, 3i), (-1 + 3i, -6 + 3i)\}.$$

Pertanto si ha $\dim W_{\mathbb{C}} = 1$ e $\dim W_{\mathbb{R}} = 2$.