Ingegneria Meccanica **Geometria** **Esame del** $9-6-2015$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Si fissi nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$.
a) Provare che i punti $A(2,-1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(2,0,-1)$ non sono allineati e scrivere l'equazione cartesiana del piano che li contiene;
b) trovare le coordinate del punto P equidistante da A, B, C e appartenente al piano $\pi : x - z - 1 = 0$;
c) trovare l'altezza del triangolo ABC relativa al lato AB.

2) a) Scrivere in forma esponenziale, trigonometrica e nella forma $a+ib (a, b \in \mathbb{R})$

$$z = \frac{(1 - i\sqrt{3})^3}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}.$$

b) Scrivere un polinomio $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado minimo avente fra le radici $z_1 = 1 + i$ con molteplicità due e $z_2 = 2$ tale che $P(i) = 5$.

3) a) Trovare la dimensione e una base del sottospazio

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x+2y-z+3t = 2x+2y+z+6t = x+4y-4z+3t = 2y-3z-t = 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

b) Dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile; in caso affermativo scrivere Δ diagonale e P invertibile tali che $\Delta = P^{-1}AP$.

1) a) I punti $A(2,-1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(2,0,-1)$ non sono allineati perché i vettori $B-A=-2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ e $C-A=\vec{j}-\vec{k}$ non sono paralleli.
$(B-A)\wedge(C-A)=-3\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$ è un vettore ortogonale al piano α contenente A,B,C; pertanto $3(x-2)+2(y+1)+2z=0 \Rightarrow 3x+2y+2z-4=0$ è l'equazione cartesiana di α.
b) Un punto $P(x,y,z)$ appartiene al piano $\pi: x-z-1=0$ ed è equidistante da A,B,C se e solo se

$$\begin{cases} x-z-1=0 \\ (x-2)^2+(y+1)^2+z^2=x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=(x-2)^2+y^2+(z+1)^2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x-z-1=0 \\ (x-2)^2+(y+1)^2+z^2=x^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \\ (x-2)^2+(y+1)^2+z^2=(x-2)^2+y^2+(z+1)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x-z-1=0 \\ 4x-4y-2z-3=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$$. Pertanto $P(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ appartiene a π ed è equidistante da A,B,C.

c) Imponendo al generico punto $H_t(2-2t,-1+2t,t)$ della retta r per A e B di appartenere al piano di equazione $2x-2y-z-5=0$ passante per C e ortogonale a r si ottiene $2(2-2t)-2(-1+2t)-t-5=0 \Longrightarrow t=\frac{1}{9}$; la proiezione ortogonale di C su r è allora $H(\frac{16}{9},-\frac{7}{9},\frac{1}{9})$ e l'altezza del triangolo ABC relativa al lato AB, pari alla distanza di C da H, è $\frac{1}{3}\sqrt{17}$.

2) a) Si ha:

$$z=\frac{(1-i\sqrt{3})^3}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}=\frac{(2e^{i\frac{5}{3}\pi})^3}{2e^{i\frac{7}{4}\pi}}=\frac{2^3e^{i5\pi}}{2e^{i\frac{7}{4}\pi}}=\frac{4e^{i\pi}}{2e^{i\frac{7}{4}\pi}}=4e^{i(-\frac{3}{4}\pi)}=4e^{i\frac{5}{4}\pi}=$$

$$=4(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi)=-2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}.$$

b) Tutti i polinomi $P(X)\in\mathbb{R}[X]$ di grado minimo avente fra le radici $z_1=1+i$ con molteplicità due e $z_2=2$ sono:

$$P(X)=[(X-1-i)(X-1+i)]^2(X-2)Q(X)$$

con $Q(X)\in\mathbb{R}[X]$ di grado minimo tale che $Q(1+i)\neq 0$.
Imponendo che $P(i)=5(2+i)Q(i)=5(2+i)(a_0+ia_1)$ $(a_0,a_1\in\mathbb{R})$ sia 5 si ottiene:

$$(2a_0-a_1)+i(2a_1+a_0)=1 \Longrightarrow \begin{cases} 2a_0-a_1=1 \\ a_0+2a_1=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0=\frac{2}{5} \\ a_1=-\frac{1}{5} \end{cases} .$$

Pertanto, essendo $Q(1+i) = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}(1+i) = \frac{1}{5}(1-i) \neq 0$, si ha

$$P(X) = (X^2 - 2X + 2)^2(X-2)\Big(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}X\Big).$$

3) a) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2y - z + 3t = 2x + 2y + z + 6t = x + 4y - 4z + 3t = 2y - 3z - t = 0\} \subset \mathbb{R}^4$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema lineare che ha come matrice incompleta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - R_1}{\overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_4 \to R_4 + R_2}}{\overset{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2}{\longrightarrow}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{R_3 \leftrightarrow -R_4}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto si ha $\dim W = 4 - \rho(A) = 4 - 3 = 1$, $W = \{(-2z, \frac{3}{2}z, z, 0)/z \in \mathbb{R}\}$ e una base di W è $B = \{(-4, 3, 2, 0)\}$.

b) Il polinomio caratteristico della matrice ad entrate reali $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è $|A - \lambda I| = -\lambda^2(\lambda + 1)$. Gli autovalori λ_i di A e le relative molteplicità r_i sono $\lambda_1 = -1$ con $r_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ con $r_2 = 2$. A soddisfa alla prima condizione del criterio necessario-sufficiente di diagonalizzabilità perché la somma delle molteplicità degli autovalori è uguale all'ordine della matrice; A soddisfa anche alla seconda condizione perché $\lambda_1 = -1$ è radice semplice di $|A - \lambda I|$ e perché $\rho(A - 0I) = \rho(A) = 1 = n - r_2 = 3 - 2$. Pertanto A è diagonalizzabile e una matrice diagonale simile ad A è $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

L'autospazio associato all'autovalore 0 ed una sua base sono rispettivamente:

$$V_0 = \{(-2y + z, y, z)/y, z \in \mathbb{R}\}, \quad B_{V_0} = \{(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\}.$$

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{-R_2 \leftrightarrow R_1 + 2R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_1 \to R_1 + R_2}{\overset{R_3 \to R_3 - R_2}{\longrightarrow}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto:

$$V_{-1} = \{(-y, y, 0)/y \in \mathbb{R}\}, \quad B_{V_{-1}} = \{(1, -1, 0)\}.$$

$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è una matrice invertibile tale che $\Delta = P^{-1}AP$.