Ingegneria Meccanica **Geometria** **Esame del** $7-7-2015$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Si fissi nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$.
a) Scrivere una rappresentazione cartesiana della proiezione ortogonale della retta
$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t + 2 \\ z = -t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ sul piano $\pi : x + y + z - 1 = 0$;
b) scrivere una rappresentazione cartesiana della retta giacente su π, incidente e ortogonale a r;
c) Dire se su r esiste un punto la cui proiezione ortogonale su π sia $A(3, -2, 0)$, in caso affermativo trovarne le coordinate e la sua distanza da π.

2) a) Dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ è diagonalizzabile come matrice ad entrate complesse; in caso affermativo scrivere $\Delta \in M_2(\mathbb{C})$ diagonale e $P \in M_2(\mathbb{C})$ invertibile tale che $\Delta = P^{-1}AP$.
b) Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ discutere e, quando è possibile, risolvere il sistema lineare

$$\Sigma : \begin{cases} \lambda X - Y + T = \lambda \\ \lambda X + Y + 2\lambda Z - T = 1 \\ \lambda X + \lambda Z = 2 \end{cases} .$$

3) a) Trovare la dimensione e una base del sottospazio

$$W = \{(a+2c+2d, -a+b-c-3d, a+b+3c+d, 2a+b+5c+3d)/a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$$

e dire per quali $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, 2, 4, k)$ appartiene a W.
b) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trovare, se esiste, $X \in M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$XA^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

1) a) Una rappresentazione cartesiana della retta $r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t + 2 \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ è

$\begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$.

Imponendo al fascio di piani $\Sigma : \lambda x + \mu y + (\mu - 2\lambda)z - \lambda - 2\mu = 0$ di asse la retta r la condizione di ortogonalità con il piano $\pi : x + y + z - 1 = 0$ si ottiene $\lambda = 2\mu$. L'equazione del piano per r e ortogonale a π e una rappresentazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π sono quindi $2x + y - 3z - 4 = 0$ e $\begin{cases} 2x + y - 3z - 4 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

b) Il generico punto $(1-2t, t+2, -t)$ di r appartiene a π se e solo se $t = 1$, pertanto $P(-1, 3, -1)$ è il punto di intersezione di r e π.
Una rappresentazione cartesiana della retta s giacente su π, incidente e ortogonale a r si ottiene come intersezione di π e del piano $\alpha : 2(x+1) - (y-3) + (z+1) = 0$ per P e ortogonale a r. Pertanto $s : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 6 = 0 \end{cases}$.

c) Su r esiste un punto Q la cui proiezione su π sia $A(3, -2, 0)$ perché le coordinate di A soddisfano le equazioni della rappesentazione di s. Imponendo alle coordinate $(3 + t, -2 + t, t)$ della retta per A e ortogonale a π di soddisfare le equazioni della rappresentazione cartesiana di r si ottiene $t = 2$ e $Q(5, 0, 2)$. La distanza di Q da π è $2\sqrt{3}$.

2) a) Gli autovalori della la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ sono le radici complesse del polinomio caratteristico $P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^2 + 1$ di A cioè

$$\lambda_1 = i \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -i.$$

La matrice di ordine due A è diagonalizzabile come matrice ad entrate complesse perchè ha due autovalori distinti e una matrice diagonale simile ad A è

$$\Delta = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

$$(A - iI) = \begin{pmatrix} 1 - i & -1 \\ 2 & -1 - i \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{2}R_2 \leftrightarrow R_1 - \frac{1}{2}(1-i)R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1-i}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A+iI)=\begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 2 & -1+i \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{2}R_2 \leftrightarrow R_1-\frac{1}{2}(1+i)R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto gli autospazi di A ed una base per ciascuno di essi sono rispettivamente:

$$V_i=\{(\frac{1}{2}(1+i)X_2,X_2)/X_2\in\mathbb{C}\} \quad B_{V_i}=\{(1+i,2)\},$$

$$V_{-i}=\{(\frac{1}{2}(1-i)X_2,X_2)/X_2\in\mathbb{C}\} \quad B_{V_{-i}}=\{(1-i,2)\}.$$

$P=\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ è una matrice invertibile tale che $\Delta=P^{-1}AP$.

b) La matrice comopleta associata a $\Sigma:\begin{cases}\lambda X-Y+T=\lambda \\ \lambda X+Y+2\lambda Z-T=1 \\ \lambda X+\lambda Z=2\end{cases}$ è

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & -1 & 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 2\lambda & -1 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 & 2 \end{array}\right) \underset{R_2\to R_2-R_3}{\overset{R_3\leftrightarrow R_1-R_3}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 & \lambda-2 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_3\to R_3+R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{array}\right)$$

Per $\lambda\in\mathbb{R}-\{3\}$ il sistema è incompatibile. Per $\lambda=3$

$$(A|b)\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e il sistema è compatibile e ha le ∞^2 soluzioni $\{(\frac{2}{3}-z,-1-3z+t,z,t)/z,t\in\mathbb{R}\}$.

3) a) Poiché $W=\{a(1,-1,1,2)+b(0,1,1,1)+c(2,-1,3,5)+d(2,-3,1,3)\}$ l'insieme

$$S=\{(1,-1,1,2),(0,1,1,1),(2,-1,3,5),(2,-3,1,3)\}$$

è un sistema di generatori di W. Quindi la dimensione di W è la caratteristica della matrice

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_3\to R_3-R_1 \\ R_4\to R_4-2R_1}}{\overset{R_2\to R_2+R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_3\to R_3-R_2 \\ R_4\to R_4-R_2}}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi si ha $\dim W = \rho(A) = 2$ e una base di W è $B = \{(1, -1, 1, 2), (0, 1, 1, 1)\}$.

Il vettore $(1, 2, 4, k) \in W \iff \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} = 2$. Poichè

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 + R_1 \\ \longrightarrow \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - 2R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & k-2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \longrightarrow \\ R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-5 \end{pmatrix}$$

$(1, 2, 4, k) \in W \iff k = 5$.

b) La matrice $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo $(= 9)$ è quindi invertibile e $(A^2)^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Inoltre

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Pertanto

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{20}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$