**Ingegneria Meccanica** **Geometria** **Esame del** $11-1-2016$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Fissato nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$ si considerino i punti $A(1,-1,3)$, $B(3,2,0)$, $C(0,3,-1)$, $D(-2,0,2)$.
a) Scrivere una rappresentazione cartesiana della retta $r$ per $A$ e $B$. Provare che $r$ e la retta $s$ per $D$ e $C$ sono fra loro parallele; scrivere l'equazione cartesiana del piano $\pi$ che le contiene.
b) Provare che il quadrilatero $ABCD$ è un rettangolo e trovarne l'area.
c) Scrivere una rappresentazione cartesiana della circonferenza circoscritta al triangolo $ABC$.

2) a) Trovare la dimensione e una base $B$ del sottospazio

$$V = \{(a-c, 2a+b+c+3d, a+2b+5c+d, 3a+b+3d), \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$$

e dire per quali $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1,-3,-4,k) \in V$.
b) Dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile; in caso affermativo scrivere $\Delta \in M_3(\mathbb{R})$ diagonale e $P \in M_3(\mathbb{R})$ invertibile tali che $\Delta = P^{-1}AP$. Se è possibile scrivere una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di $A$.

3) a) Trovare modulo $\rho$ e argomento $\vartheta$ del numero complesso

$$z = -\frac{1}{36}(3+3i)^{16}\left(\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{14}$$

e scriverlo nella forma $a+bi$. Trovare le radici quinte di $z$.
b) Scrivere <u>tutti</u> i polinomi $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado 4 aventi 3 e $1-2i$ fra le radici e tali che $P(2) = -10$.

1) a) Una rappresentazione parametrica della retta $r$ per $A(1,-1,3)$ e $B(3,2,0)$ è $r : \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 2+3t \\ z = -3t \end{cases}$, $\forall t \in \mathbb{R}$; da essa si ricava $t = \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-3}$, pertanto $r : \begin{cases} 3x-2y-5=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$ è una rappresentazione cartesiana di $r$.

I vettori $\vec{v}_r = 2\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}$, parallelo a $r$, e $\vec{v}_s = D-C = -2\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$, parallelo alla retta $s$ per $D(-2,0,2)$ e $C(0,3,-1)$, sono proporzionali, quindi $r$ e $s$ possono essere parallele o coincidenti; poiché $C \in s$ non appartiene ad $r$ (le coordinate di $C$ non soddisfano la rappresentazine cartesiana di $r$) le rette $r$ e $s$ sono parallele. Il piano $\pi : y+z-2=0$ contenente $r$ contiene anche $s$ perché $C \in s$ appartiene a $\pi$ $(3-1-2=0)$.

b) Si considerino i vettori :

$$B-A = 2\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}, \quad D-C = -2\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}, \quad B-C = 3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}, \quad A-D = 3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}.$$

- $B-A$ e $B-C$ sono paralleli rispettivamente a $D-C$ e $A-D$,
- $B-A$ e $B-C$ sono ortogonali $(B-A \cdot B-C = 6-3-3=0)$,
- $|B-A| = |D-C| = \sqrt{22} \neq \sqrt{11} = |B-C| = |A-D|$

quindi il quadrilatero $ABCD$ è un rettangolo; la sua area è

$$A = |B-A \wedge B-C| = |-11\vec{j}-11\vec{k}| = 11\sqrt{2}.$$

c) Il centro $C'$ e il raggio $R$ della circonferenza $\gamma$ circoscritta al triangolo $ABC$, rettangolo in $B$, sono rispettivamente il punto medio $M(\frac{1}{2},1,1)$ del segmento $AC$ e la distanza $R = \frac{\sqrt{33}}{2}$ di $M$ da $C$; $\gamma$ è intersezione della sfera di centro $C'$ e raggio $R$ e del piano $\pi$ che la contiene. Pertanto una sua rappresentazione cartesiana è

$$\gamma : \begin{cases} (x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = \frac{33}{4} \\ y+z-2=0 \end{cases}.$$

2) a) $V = \{a(1,2,1,3)+b(0,1,2,1)+c(-1,1,5,0)+d(0,3,1,3) \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$, pertanto

$$S = \{(1,2,1,3),(0,1,2,1),(-1,1,5,0),(0,3,1,3)\}$$

è un sistema di generatori di $V$. Sia

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ \longrightarrow \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ R_3 \to -\frac{1}{5}(R_3-2R_2) \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\dim V = \rho(M) = 3$ e una sua base è $B = \{(1,2,1,3),(0,1,2,1),(0,3,1,3)\}$.

Il vettore $(1,-3,-4,k) \in V \iff \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & k \end{vmatrix} = 0 \iff -5(2+k) = 0 \iff$ $k = -2$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ è simmetrica e reale quindi diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico, gli autovalori di $A$ ed una sua matrice simile $\Delta$ sono:

$$|A-\Lambda I| = \Lambda(1-\Lambda)(\Lambda-\frac{5}{2}) \qquad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \frac{5}{2}; \qquad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

$$(A-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \underset{R_2 \to \frac{2}{3}(R_2 - R_3)}{\overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_2}{\overset{R_2 \to \frac{1}{2}R_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(A - \tfrac{5}{2}I) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \to -2R_2 \\ R_3 \to R_3 + 2R_2}}{\overset{R_1 \to -\frac{2}{3}R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$V_1 = \{(x_1,0,0)/x_1 \in \mathbb{R})\}$ $\quad V_0 = \{(0,-\dfrac{1}{2}x_3,x_3)/x_3 \in \mathbb{R})\}$ $\quad V_{\frac{5}{2}} = \{(0,2x_3,x_3)/x_3 \in \mathbb{R})\}$

sono gli autospazi associati agli autovalori 1,0, $\frac{5}{2}$ rispettivamente e

$$B_{V_1} = \{(1,0,0)\} \quad B_{V_0} = \{(0,1,-2)\} \quad B_{V_{\frac{5}{2}}} = \{(0,2,1)\}$$

una base per ciascuno di essi. Pertanto $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ è una matrice invertibile tale che $\Delta = P^{-1}AP$. Una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di $A$ è $\{(1,0,0),(0,\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}),(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})\}$.

3) a) $z = -\frac{1}{36}(3+3i)^{16}\left(\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{14}\frac{1}{36}e^{i\pi}(3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{16}(\frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{3}})^{14} = \frac{1}{36}e^{i\pi}3^{16}2^{8}e^{i4\pi}\frac{2^{14}}{3^{14}}e^{i\frac{14}{3}\pi} =$

$$= 2^{20}e^{i\pi}e^{i\frac{2}{3}\pi} = 2^{20}e^{i\frac{5}{3}\pi} = 2^{20}(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi) = 2^{19} - i2^{19}\sqrt{3}.$$

Il modulo e l'argomento di $z$ sono pertanto $\rho = 2^{20}$ e $\vartheta = \frac{5}{3}\pi$; la sua forma algebrica è $z = 2^{19} - i2^{19}\sqrt{3}$. Le radici quinte di $z$ sono:

$$z_k = \sqrt[5]{2^{20}}e^{i\frac{\frac{5}{3}\pi+2k\pi}{5}} = 2^4 e^{i(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}k)\pi} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

b) Tenendo presente il teorema di Ruffini e che ogni polinomio a coefficienti reali avente una radice in $\mathbb{C}$ ha anche la complessa coniugata, tutti i $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado 4 aventi 3 e $1-2i$ fra le radici e tali che $P(2) = -10$ sono:

$$P(X) = (X-1+2i)(X-1-2i)(X-3)(a_0+a_1X), \quad a_0 \in \mathbb{R}, a_1 \in \mathbb{R}-\{0\}, \quad P(2) = -10.$$

Si ha $P(2) = -5(a_0+2a_1)$; pertanto $P(2) = -10 \Longrightarrow a_0+2a_1 = 2 \Longrightarrow a_0 = 2-2a_1$ e quindi $P(X) = (X^2 - 2X + 5)(X - 3)[(2 - 2a_1) + a_1X]$ con $a_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$.