**Ingegneria Navale** **Geometria** **Esame del** $11-1-2016$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Fissato nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$ si considerino le rette $r: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -3t \\ z = t+3 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = t+2 \\ y = -t+1 \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

a) Provare che $r$ e $s$ sono sghembe e scrivere l'equazione del piano contenente $r$ e parallelo a $s$.
b) Trovare la distanza di $P(1,0,3) \in r$ da $s$.
c) Scrivere una rappresentazione cartesiana della circonferenza di centro $P$ e tangente a $s$.

2) a) Trovare la dimensione ed una base $B$ del sottospazio

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x-z = 2x+y+z+3t = x+2y+5z+t = 3x+y+3t = 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Scrivere un sistema di generatori di $V$ che non sia base e, se è possibile, un sottospazio $W$ di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 <u>non</u> contenente $V$.

b) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dire se $A$ è diagonalizzabile come matrice ad entrate reali e scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ contenente il massimo numero di autovettori di $A$.
Dire se $A$ è diagonalizzabile come matrice ad entrate complesse, in caso affermativo scrivere una matrice $\Delta$ diagonale simile ad $A$.

3) a) Nello spazio $V_3$ dei vettori geometrici si fissi la base ortonormale $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
Dire se $B = \{\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}, \vec{j}+\vec{k}, 2\vec{i}+\vec{k}\}$ è base di $V_3$; in caso affermativo trovare le coordinate di $\vec{v} = -4\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k}$ rispetto a $B$.
b) Scrivere in forma esponenziale il numero complesso $\alpha = i^{97}(\sqrt{3}+i)^8$ e risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $e^z = \alpha$.

1) a) I vettori $\vec{v}_r = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, parallelo a $r : \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -3t \\ z = t+3 \end{cases}$, e $\vec{v}_s = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, parallelo a $s : \begin{cases} x = t+2 \\ y = -t+1 \\ z = t \end{cases}$, non sono paralleli pertanto $r$ e $s$ sono incidenti oppure sghembe. Il sistema $\begin{cases} 2t+1 = u+2 \\ -3t = -u+1 \\ t+3 = u \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u-2t = -1 \\ u-3t = 1 \\ u-t = 3 \end{cases}$ non ha soluzioni:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - R_1}{\overset{R_2 \to R_1 - R_2}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right);$$

pertanto $r \cap s = \Phi$ e quindi $r$ e $s$ sono sghembe.

Una rappresentazione cartesiana di $r$ è $\begin{cases} x - 2z + 5 = 0 \\ y + 3z - 9 = 0 \end{cases}$; imponendo al fascio di piani $\Sigma : \lambda x + \mu y + (3\mu - 2\lambda)z + 5\lambda - 9\mu = 0$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non entrambe nulli) la condizione di parallelismo con $s$ si ottiene $\lambda = 2\mu$. L'equazione del piano contenente $r$ e parallelo a $s$ è quindi $2x + y - z + 1 = 0$.

b) L'equazione del piano per $P(1,0,3)$ e ortogonale a $s$ è $\alpha : x - y + z - 4 = 0$. Imponendo alle coordinate del generico punto $P_s(t+2, -t+1, t)$ di $s$ di soddisfare l'equazione di $\alpha$ si ottiene $t = 1$; pertanto l'intersezione $\alpha \cap s$ è il punto $H(3,0,1)$ e la distanza di $P$ da $s$ è $d(P,s) = |P - H| = 2\sqrt{2}$.

c) La circonferenza $\gamma$ di centro $P$ e tangente a $s$ si può esprimere come intersezione del piano $\beta$ per $s$ e $P$ e della sfera di centro $P$ e raggio $R = d(P,s)$.

Un vettore normle a $\beta$ è $\vec{n} = P - H \wedge \vec{v}_s = -2\vec{i} + 2\vec{k} \wedge \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$, pertanto $\beta : 2(x-1) + 4y + 2(z-3) = 0 \Longrightarrow \beta : x + 2y + z - 4 = 0$ e

$$\gamma : \begin{cases} x + 2y + z - 4 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8 \end{cases}.$$

2) a) $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x - z = 2x + y + z + 3t = x + 2y + 5z + t = 3x + y + 3t = 0\}$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo la cui matrice incompleta è $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1}}{\overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\underset{\substack{R_3 \to -\frac{1}{5}(R_3 - 2R_2) \\ R_4 \to R_4 - R_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $\dim V = 4 - \rho(A) = 4 - 3 = 1$.
Poiché $V = \{(z, -3z, z, 0)\, \forall z \in \mathbb{R}\} = \{z(1, -3, 1, 0)\, \forall z \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(1, -3, 1, 0)\}$ è un sistema di generatori di $V$ che è anche base perché $(1, -3, 1, 0) \neq (0, 0, 0, 0)$.
Per ottenere un sistema di generatori $S$ di $V$, non base, è sufficiente unire al vettore di B un vettore ad esso proporzionale, scegliamo $S = \{(1, -3, 1, 0), (-1, 3, -1, 0)\}$.
Come sottospazio $W$ di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 <u>non</u> contenente $V$ possiamo scegliere $W = L((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$; $(1, -3, 1, 0) \notin W$ perché $(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, -3, 1, 0)$ sono linearmente indipendenti.

b) Il polinomio caratteristico di $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ è

$$P_A(\Lambda) = |A - \Lambda I| = (1 - \Lambda)[(1 - \lambda)^2 + 1].$$

L'equazione $(1 - \Lambda)^2 = -1$ non ha soluzioni reali, l'unico autovalore di $A$, come matrice ad entrate reali, è $\lambda = 1$ che ha molteplicità 1 come radice di $P_A(\Lambda)$ pertanto $A$ non è diagonalizzabile come matrice reale (la somma delle molteplicità degli autovalori di $A$ è diversa dall'ordine di $A$).

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_1 \leftrightarrow \frac{1}{3}R_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_2 \to \frac{3}{2}(R_2 - 2R_1)}{\longrightarrow}$$

$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: l'autospazio associato all'autovalore 1 ed una sua base sono:

$$V_1 = \{(-\frac{1}{2}X_3, -\frac{3}{2}X_3, X_3)/X_3 \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad B_{V_1} = \{(1, 3, -2)\}.$$

Poiché $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ come base di $\mathbb{R}^3$ contenente il massimo numero di autovettori di $A$ scegliamo $B_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 3, -2), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
$(1 - \lambda)^2 = -1 \Longrightarrow 1 - \Lambda = \mp i \Longrightarrow \Lambda = 1 + i \cup \Lambda = 1 - i$; la matrice A, come matrice ad entrate complesse ha quindi 3 autovalori distinti ed è diagonalizzabile.
Una matrice diagonale simile ad $A$ è $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + i & 0 \\ 0 & 0 & 1 - i \end{pmatrix}$.

3) a) Siano $\vec{u}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{u}_2 = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{u}_3 = 2\vec{i} + \vec{k}$. Si ha

$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$ quindi $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sono <u>non</u> complanari e $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ è base di $V_3$. Le coordinate di $\vec{v} = -4\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$ rispetto a $B$ sono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $a(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) + b(\vec{j} + \vec{k}) + c(2\vec{i} + \vec{k}) = -4\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k} \Longrightarrow$

$$(a + 2c)\vec{i} + (2a + b)\vec{j} + (-a + b + c)\vec{k} = -4\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k} \Longrightarrow \begin{cases} a + 2c = -4 \\ 2a + b = 5 \\ -a + b + c = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases} .$$

b) $\alpha = i^{97}(\sqrt{3} + i)^8 = (i^4)^{24}\, i(2e^{i\frac{\pi}{6}})^8 = 2^8 e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{4}{3}\pi} = 2^8 e^{i\frac{11}{6}\pi}$.

$$e^z = 2^8 e^{i\frac{11}{6}\pi} \Longrightarrow e^z = e^{\log_e 2^8}\, e^{i\frac{11}{6}\pi} \Longrightarrow e^z = e^{\log_e 2^8 + i\frac{11}{6}\pi}$$

$$\Longrightarrow z = \log_e 2^8 + i\frac{11}{6}\pi + 2k\pi\, i = 8\log_e 2 + i\frac{11}{6}\pi + 2k\pi\, i, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$