Ingegneria Meccanica **Geometria** **Esame del** $9-2-2016$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Fissato nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$ si considerino:

$$P(-1,2,3), \qquad r: \begin{cases} y+z-3=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}, \qquad s: \begin{cases} x=t-3 \\ y=-2t \\ z=t+1 \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

a) Scrivere una rappresentazione cartesiana della retta, se esiste, passante per P, ortogonale ad r e incidente s.
b) Scrivere una rappresentazione cartesiana della retta passante per P incidente s e ad essa ortogonale.
c) Provare che r e s sono sghembe e scrivere una rappresentazione cartesiana della retta passante per P incidente r e s.

2) a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ determinare la dimensione del sottospazio

$$W_k = L\big((1,2,k),(k-1,k,2),(1,k,2k-2)\big) \subset \mathbb{R}^3.$$

b) Fissata la base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ nello spazio V_3 dei vettori geometrici, scrivere tutti i vettori $\vec{w} \in V_3$ ortogonali sia a $\vec{u} = 2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ che a $\vec{v} = \vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ tali che il volume del parallelepipedo individuato da $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sia 7.

3) a) Scomporre in fattori di grado minimo a coefficienti complessi e in fattori di grado minimo a coefficienti reali il polinomio

$$P(X) = X^8 + 4X^7 + 5X^6 + X^2 + 4X + 5$$

sapendo che $P(-2+i) = 0$.
b) Si consideri il sottospazio $W = \{P(X) \in \mathbb{R}[X] / \deg P(X) \leq 2\}$ di $\mathbb{R}[X]$. Dire se $\{1+X, 1+2X+X^2, X-X^2\}$ è un sistema di generatori di W. E' una base?

1) a) Una rappresentazione parametrica per ciascuna retta passante $P(-1,2,3)$ e incidente $s: \begin{cases} x = t-3 \\ y = -2t \\ z = t+1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ è $PP_s: \begin{cases} x = -1+(t-2)u \\ y = 2+(-2t-2)u \\ z = 3+(t-2)u \end{cases}$ $(u \in \mathbb{R})$;

un vettore parallelo a $r: \begin{cases} y+z-3=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$ è $\vec{j}+\vec{k} \wedge \vec{i}+2\vec{j}-\vec{k} = -3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

Imponendo alla retta PP_s la condizione di ortogonalità con r si ottiene pertanto:

$$-3(t-2)+(-2t-2)-(t-2)=0 \Longrightarrow t=1;$$

una rappresentazione parametrica della retta l passante per P, ortogonale ad r e incidente s è pertanto $l: \begin{cases} x = -1-u \\ y = 2-4u \\ z = 3-u \end{cases}$ da cui si ricava $u = -1-x = \frac{2-y}{4} = 3-z$.

Una rappresentazione cartesiana per l è pertanto $\begin{cases} x-z+4=0 \\ 4x-y+6=0 \end{cases}$.

b) Imponendo alla retta PP_s l'ortogonalià con s si ottiene

$$(t-2)-2(-2t-2)+t-2=0 \Longrightarrow t=0;$$

una rappresentazione parametrica della retta m per P incidente s e ad essa ortogonale è pertanto $m: \begin{cases} x = -1-2u \\ y = 2-2u \\ z = 3-2u \end{cases}$ da cui $u = x+1 = y-2 = z-3$.

Una rappresentazione cartesiana per m è pertanto $\begin{cases} x-y+3=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$.

c) I vettori $\vec{v_r} = -3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ e $\vec{v_s} = \vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, paralleli ad r e s rispettivamente, non sono paralleli quindi le due rette sono sghembe o incidenti. Il sistema

$$\begin{cases} -2t+t+1-3=0 \\ t-3-4t-t-1+2=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

non ha soluzioni pertanto $r \cap s = \phi$ e quindi r e s sono sghembe.

La retta passante n per P incidente r e s è intersezione del piano α per P contenente r e del piano β per P contenente s.

Imponendo al fascio di piani $\mu x+(\lambda+2\mu)y+(\lambda-\mu)z-3\lambda+2\mu=0$ di asse r il passaggio per $P(-1,2,3)$ si ottiene $\lambda=-\mu$ e quindi $\alpha: x+y-2z+5=0$.

Dalla rappresentazione parametrica di s si ricava $t = x+3 = \frac{y}{-2} = z-1$; il piano $\beta : x - z + 4 = 0$ contenente s contiene anche P e quindi una rappresentazione cartesiana per n è $\begin{cases} x+y-2z+5=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$.

2) a) La dimensione di $W_k = L\big((1,2,k),(k-1,k,2),(1,k,2k-2)\big) \subset \mathbb{R}^3$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ è la caratteristica della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 1 \\ 2 & k & k \\ k & 2 & 2k-2 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - kR_1}{\overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 1 \\ 0 & 2-k & k-2 \\ 0 & (k+1)(2-k) & k-2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_3 \to R_3 - (k+1)R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 1 \\ 0 & 2-k & k-2 \\ 0 & 0 & k(2-k) \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \to \frac{1}{2-k}R_2 \\ R_3 \to \frac{1}{k(2-k)}R_3}}{\overset{k \neq 0,2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per $k \in \mathbb{R} - \{0,2\}$ si ha $\dim W_k = \rho(M) = 3$, cioè $W = \mathbb{R}^3$;

per $k=0$ la matrice $M \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ quindi $\dim W_0 = \rho(M) = 2$;

per $k=2$ la matrice $M \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ quindi $\dim W_2 = \rho(M) = 1$.

b) Tutti i vettori $\vec{w} \in V_3$ ortogonali sia a $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ che a $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ sono $\vec{w}_\lambda = \lambda \vec{u} \wedge \vec{w} = \lambda(\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k})$; i vettori $\vec{w}_\lambda$ per i quali il volume del parallelepipedo individuato da $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_\lambda$ sia 7 sono quelli per cui

$$|\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}_\lambda| = 7 \Longrightarrow |35\lambda| = 7 \Longrightarrow \lambda = \mp\frac{1}{5}$$

cioè $\vec{w} = \mp\frac{1}{5}\vec{i} \pm \vec{j} \pm \frac{3}{5}\vec{k}$.

3) a) Il polinomio $P(X) = X^8 + 4X^7 + 5X^6 + X^2 + 4X + 5 \in \mathbb{R}[X]$ quindi $P(-2+i) = 0 \Longrightarrow P(-2-i) = 0$; per il teorema di Ruffini $P(X)$ è allora divisibile per $(X+2-i)(X+2+i) = (X^2+4X+5)$ cioè

$$P(X) = (X^2+4X+5)(X^6+1).$$

Le radici seste di $-1 = e^{i\pi}$ sono $X_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{6}}$ per $k = 0,1,\ldots,5$, cioè:

$$X_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad X_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad X_2 = e^{i\frac{5}{6}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$X_3 = e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \overline{X}_2, \quad X_4 = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i = \overline{X}_1, \quad X_5 = e^{i\frac{11}{6}\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \overline{X}_0.$$

Pertanto la scomposizione di $P(X)$ in fattori di grado minimo a coefficienti complessi e quella di grado minimo a coefficienti reali sono rispettivamente:

$$P(X) = (X+2-i)(X+2+i)(X-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)(X-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)(X-i)(X+i)(X+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)(X+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i),$$

$$P(X) = (X^2+4X+5)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+1)(X^2+\sqrt{3}X+1).$$

b) Una base di $W = \{P(X) \in \mathbb{R}[X] / \deg P(X) \leq 2\} = \{a_0 + a_1X + a_2X^2, \forall a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ è $\{1, X, X^2\}$ quindi $\dim W = 3$. I tre vettori $1+X, 1+2X+X^2, X-X^2$ sono linearmente indipendenti. Infatti, se $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ sono tali che

$$\lambda(1+X)+\mu(1+2X+X^2)+\nu(X-X^2) = 0_{\mathbb{R}[X]} \Longrightarrow (\lambda+\mu)+(\lambda+2\mu+\nu)X+(\mu-\nu)X^2 = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu = 0 \\ \lambda+2\mu+\nu = 0 \\ \mu-\nu = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0.$$

Pertanto, essendo ($\dim W = 3$) $S = \{1+X, 1+2X+X^2, X-X^2\}$ è sia un sistema di generatori che una base di W.