Ingegneria Navale **Geometria** **Esame del** $9-2-2016$

Risolvere i seguenti esercizi, per ogni risposta fornire esaurienti spiegazioni.

1) Fissato nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$ si considerino:

$$P(0,1,-2), \qquad \alpha : 2x + y - z + 1 = 0, \qquad r : \begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ y - 2z + 5 = 0 \end{cases} .$$

a) Scrivere una rappresentazione cartesiana della retta passante per P, parallela ad α e incidente r.
b) Scrivere una rappresentazione cartesiana della retta per P incidente r e ortogonale ad r.
c) Dire se esistono, in caso affermativo trovarne le coordinate, punti di r equidistanti da P e da α.

2) a) Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ determinare la dimensione del sottospazio

$$W_\lambda = \{(\lambda x + y + z, x + \lambda y + z, x + y + \lambda z)/x, y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

b) Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Trovare, se esiste, $X \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $AX = BC$.

3) a) Scrivere un polinomio $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado minimo avente fra le radici $z_1 = 3 - i$ e $z_2 = -2$ tale che $P(1 + i) = 16$.
b) Fissato nello spazio un sistema di assi cartesiani ortogonali $\{O; x, y, z\}$ e la base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ nello spazio V_3 dei vettori geometrici, siano

$$\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \qquad \vec{v} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \qquad A(1,1,1).$$

Calcolare $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u}$; trovare le coordinate del punto B tale che $\vec{w} = B - A$.

1) a) La retta s passante per $P(0,1,-2)$, parallela ad $\alpha : 2x+y-z+1=0$ e incidente $r : \begin{cases} x+z-3=0 \\ y-2z+5=0 \end{cases}$ è intersezione del piano π per P e parallelo ad α e del piano π' per r e P.
L'equazione cartesiana di π è $2x+(y-1)-(z+2)=0 \Longrightarrow 2x+y-z-3=0$.
Imponendo al fascio di piani $\Sigma : \lambda x+\mu y+(\lambda-2\mu)z-3\lambda+5\mu=0$ di asse r il passaggio per P si ottiene $\lambda=2\mu$ e quindi $\pi' : 2x+y-1=0$.
Una rappresentazione cartesiana di s è allora $\begin{cases} 2x+y-z-3=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$.
b) La retta u per P incidente r e ortogonale a r è intersezione di $\pi' : 2x+y-1=0$, per P e r, e del piano π'' per P e ortogonale a r.
Un vettore parallelo a r è $\vec{v}_r = \vec{i}+\vec{k} \wedge \vec{j}-2\vec{k} = -\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ pertanto l'equazione di π'' è $-x+2(y-1)+(z+2)=0 \Longrightarrow x-2y-z=0$.
Una rappresentazione cartesiana di u è allora $\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x-2y-z=0 \end{cases}$.
c) $\begin{cases} x=3-t \\ y=2t-5 \\ z=t \end{cases}$ è una rappresentazione parametrica di r. Imponendo che il punto generico $P_r(3-t,2t-5,t)$ di r sia equidistante da P e da α si ha:

$$\sqrt{(3-t)^2+(2t-6)^2+(t+2)^2} = \frac{|2-t|}{6} \Longrightarrow 6(6t^2-26t+49) = t^2-4t+4 \Longrightarrow$$

$$35t^2-152t+290=0 \tag{1}$$

Il discriminante della (1) è minore di zero quindi non esistono punti su r aventi uguale distanza da P e α.

2) a) $W_\lambda = \{(\lambda x+y+z, x+\lambda y+z, x+y+\lambda z)/x,y,z \in \mathbb{R}\} =$

$= \{x(\lambda,1,1)+y(1,\lambda,1)+z(1,1,\lambda)/x,y,z \in \mathbb{R}\} = L\big((\lambda,1,1),(1,\lambda,1),(1,1,\lambda)\big)$.

Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ la dimensione di W_λ è pertanto la caratteristica ρ della matrice

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \underset{R_2 \to R_2 - R_3}{\overset{R_1-\lambda R_3 \leftrightarrow R_3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 + R_2}{\longrightarrow}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda+2)(1-\lambda) \end{pmatrix}$. Per $\lambda \in \mathbb{R}-\{-2,1\}$ si ha $\dim W_\lambda = \rho(M) = 3$.

Per $\lambda = -2$, $M_{-2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, quindi $\dim W_{-2} = \rho(M_{-2}) = 2$.

Per $\lambda = 1$, $M_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, pertanto $\dim W_1 = \rho(M_1) = 1$.

b) Poiché $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ la matrice A è invertibile e $X \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $AX = BC$ è $X = A^{-1}BC$ con $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 - R_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\frac{1}{2}R_3 \leftrightarrow R_2 - \frac{1}{2}R_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{R_1 \to R_1 - R_3}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{R_1 \to R_1 + 2R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) =$$

$= (I|A^{-1})$. Allora, tenendo conto delle proprietà del prodotto di matrici, si ha:

$$X = A^{-1}BC = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -10 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \\ -6 & 2 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) a) Tenendo presente il teorema di Ruffini e che ogni polinomio a coefficienti reali avente una radice in $\mathbb{C}$ ha anche la complessa coniugata, tutti i $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado minimo aventi fra le radici $z_1 = 3 - i$ e $z_2 = -2$ tali che $P(1+i) = 16$ sono: $P(X) = (X - 3 + i)(X - 3 - i)(X + 2)Q(X) = (X^2 - 6X + 10)(X + 2)Q(X)$ con $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado minimo tali che $P(1+i) = 16$.

Si ha $P(1+i) = (4-4i)(3+i)Q(1+i) = 8(2-i)Q(1+i)$, pertanto

$$P(1+i) = 16 \Longrightarrow 8(2-i)Q(1+i) = 16 \Longrightarrow Q(1+i) = \frac{2}{2-i} = \frac{2(2+i)}{5} \Longrightarrow$$

$$Q(1+i) = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i.$$

$Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado minimo tale che $Q(1+i) = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$ non puo' avere grado 0. Sia $Q(X) = a_0 + a_1 X$ con $a_o, a_1 \in \mathbb{R}$. Si ha allora $Q(1+i) = (a_0 + a_1) + a_1 i$ e

$$Q(1+i) = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i \Longrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 = \frac{4}{5} \\ a_1 = \frac{2}{5} \end{cases} \Longrightarrow a_0 = a_1 = \frac{2}{5}.$$

Pertanto si ha $P(X) = (X^2 - 6X + 10)(X+2)(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}X)$.
b) Si ha

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \wedge \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 7\vec{k}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$

Pertanto

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 7\vec{k} - 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} = -6\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}.$$

$B(x, y, z)$ è tale che $\vec{w} = B - A$ con $A(1,1,1)$ se e solo se

$$\begin{cases} x - 1 = -6 \\ y - 1 = -5 \\ z - 1 = -5 \end{cases} \Longrightarrow B(-5, -4, -4).$$