

Esercizio 1A. Dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{4x}{\sqrt{4x^2 + y^2 - 1}} - \frac{1}{1 + x^2}, \frac{y}{\sqrt{4x^2 + y^2 - 1}} + \frac{2y}{1 + y^2} \right)$$

- 1) Rappresentare l'insieme di definizione I di F e specificare se è semplicemente connesso.
- 2) Verificare se F è conservativo in I e, in caso affermativo, trovare un potenziale di F in I .
- 3) Data la curva γ di rappresentazione parametrica $r(t) = (-4 + \cos t, \sin t)$, con $t \in [0, \pi]$, verificare se la curva è regolare e calcolare, se esiste, $\int_{\gamma} F$.

Esercizio 1B. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y_1'(x) = 2y_1(x) + 2y_2(x) \\ y_2'(x) = 2y_1(x) - y_2(x) \end{cases}$$

Trovarne tutte le soluzioni.

Esercizio 2. Si considerino il seguente dominio piano

$$A = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -\frac{1}{4} + z^2, x^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$$

ed il solido V , ottenuto dalla rotazione completa di A attorno all'asse x .

- a) Calcolare, se esiste, $\iiint_V x \, dx \, dy \, dz$
- b) Calcolare il volume del solido V
- c) Scrivere una parametrizzazione di S , frontiera di V
- d) Calcolare il versore normale ad S nel punto $P_o = \left(\frac{7}{4}, 1, 1\right)$ e stabilire se è diretto verso l'interno o l'esterno di S
- e) Sia ora $T = S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$.

Calcolare il flusso del rotore del campo $\underline{F}(x, y, z) = y^2 \underline{i} + (x + yz^2) \underline{j} - y \underline{k}$ attraverso T .