Analisi matematica II – Ingegneria edile-architettura ed ingegneria civile ambientale

Esame scritto – 5 febbraio 2013

Esercizio 1A. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \big(\frac{kxy}{1+x^2y} - ye^{-\sin x}\cos x,\ \frac{x^2}{1+x^2y} + e^{-\sin x} + 2\big)$$

1) Rappresentare l'insieme di definizione I di F e specificare se è semplicemente connesso.

2) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che F sia conservativo in I e, se esiste, trovare un potenziale di F in I.

3) Data la curva γ di rappresentazione parametrica $r(\theta) = (\theta\sin\theta, \theta\cos\theta)$, con $\theta \in [0, \pi/2]$, verificare se la curva è regolare e calcolare, se esiste, $\int_\gamma F$.

Esercizio 1B. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + 3y_2(x) + 2e^{-x} \\ y_2'(x) = 4y_1(x) + 2y_2(x) + e^{-x} \end{cases}$$

a) $Y(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 2e^x \end{pmatrix}$ può essere una soluzione del sistema omogeneo associato?

b) Determinare una soluzione particolare del sistema dato.

Esercizio 2A. Siano

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \le z \le 2\,x\,y,\ x^2+y^2 \le 1\} \quad \text{ed} \quad S \quad \text{la frontiera di } V.$$

a) Calcolare l'area di S.

b) Determinare, se esiste, l'equazione del piano tangente ad S nei punti $P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$.

c) Calcolare il flusso uscente da S del campo $\underline{F}(x,y,z) = (2x+y^3)\,\underline{i} + (y-x^3)\,\underline{j} + z\,\underline{k}$.

Esercizio 2B. Sia

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2\,x^4 + x^2\,y^2 + 2\,y^4 = 5\}.$$

a) Verificare che esistono punti di A di massima e minima distanza dall'origine delle coordinate.

b) Calcolare i punti di A di minima distanza dall'origine. (*Per semplificare i calcoli, si può considerare il quadrato della distanza, perché ......*)