Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2[y^2(x) - 2y(x)]x \arctan x \\ y(0) = k \end{cases}$$

a) stabilire per quali valori reali di k (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
2) determinare (se esistono) la soluzione o le soluzioni nei casi $k = 1$ e $k = 2$.

Esercizio 2. Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_2^x \frac{1}{\sqrt[5]{\ln(1+t)}\ \sqrt[3]{e^t - e}}\,dt$$

a) Determinarne l'insieme di definizione di f.
b) Determinarne l'insieme di derivabilità di f e studiare la monotonia di f.
c) Studiarne i limiti di f agli estremi del suo insieme di definizione.

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{se } y > 2 \\ \\ \dfrac{e^{-\arctan(xy)} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } y \leq 2 \end{cases}$$

a) Verificare se f risulta prolungabile per continuità in $(0,0)$ e in caso affermativo verificare se la funzione così prolungata risulta differenziabile in $(0,0)$.
b) Verificare se f risulta continua e differenziabile in $(0,2)$.
d) Scrivere l'equazione del piano tangente, se esiste, al grafico di f nel punto $(P_1, f(P_1))$ con $P_1 = (0,1)$.