

Esercizio 1. Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_3^x \frac{\sqrt{|e^t - 1|}}{(\arctan t + |t|) \sqrt[3]{\log |t|}} dt$$

- a) usando la teoria degli integrali impropri, determinarne l'insieme di definizione;
- b) determinarne l'insieme di derivabilità;
- c) studiarne i limiti agli estremi dell'insieme di definizione.

Esercizio 2. Sia

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln(1 + x) & \text{se } x < 0 \\ b & \text{se } x = 0 \\ e^{-\arctan x} - 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- i) Al variare dei parametri reali a e b calcolare i limiti di f agli estremi del suo insieme di definizione.
- ii) Determinare il numero degli zeri di f al variare dei parametri reali a e b .
- iii) Determinare l'insieme di continuità e l'insieme di derivabilità di f al variare dei parametri reali a e b e, dove esiste, calcolare $f'(x)$.

Esercizio 3. Data l'equazione differenziale

$$y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = e^{-x}$$

- i) Trovare due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata.
- ii) Trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata specificando se rappresenta uno spazio vettoriale e di quale dimensione.
- iii) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data che siano limitate in $[0, +\infty)$.