

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2[y^2(x) - 2y(x)]x \arctan x \\ y(0) = k \end{cases}$$

- a) stabilire per quali valori reali di k (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
2) determinare (se esistono) la soluzione o le soluzioni nei casi $k = 1$ e $k = 2$.

Esercizio 2. Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_2^x \frac{1}{\sqrt[5]{\ln(1+t)} \sqrt[3]{e^t - e}} dt$$

- a) Determinarne l'insieme di definizione di f .
b) Determinarne l'insieme di derivabilità di f e studiare la monotonia di f .
c) Studiarne i limiti di f agli estremi del suo insieme di definizione.

Esercizio 3. Sia

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- a) Sia $\alpha < 0$. Calcolare, se esiste, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
b) Sia ora $\alpha \geq 0$. Calcolare, se esiste, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e, nel caso in cui f sia infinita, determinarne l'ordine.