ANALISI MATEMATICA 2
Corso di Studio in Ingegneria Civile e Ambientale
Prova scritta dell'11 aprile 2006 – a.a. 2005/2006

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2x+k}{x^2+x+2} & per\ x < 0, \\ \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} & per\ x \geq 0, \end{cases}$$

a) determinare $k \in \mathbf{R}$, se esiste, in modo che f ammetta primitive nel suo insieme di definizione;

b) per tali valori di k determinare tutte le primitive di f;

c) se $k = 2$ stabilire se la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ è una primitiva di f.

a) Se $k = 1$ f è continua in **R,** infatti $x \neq 0$ f è continua perché composta di funzioni continue e per $x = 0$ si ha

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = k/2$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1/2$, tali limiti risultano uguali per $k = 1$.
Quindi per $k = 1$ f, essendo continua, ammette primitive in **R**. Se $k \neq 1$ f presenta in $x_0 = 0$ una discontinuità di prima specie o salto per cui non ammette primitive in **R**.

b) Sia $k = 1$, si determina facilmente che tutte le primitive di f sono le funzioni $G(x)$ tali che

$$G(x) = \begin{cases} \ln(x^2+x+2) + c_1 & \text{se } x < 0 \\ \ln\dfrac{x+1}{x+2} + c_2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

con c_1 e c_2 tali che le funzioni G siano continue anche in zero, quindi deve essere $c_2 = 2\ln 2 + c_1$.

c) Per $k = 2$ F non è una primitiva di f (v. punto a) infatti:
$\forall x \neq 0$ si ha $F'(x) = f(x)$ mentre non esiste $F'(0)$ perché
$\lim_{x \to 0^-} F'(x) = 1 \neq . \lim_{x \to 0^+} F'(x) = 1/2$.