

Esercizio 1. Sia

$$f(x) := \int_1^x g(t) dt, \quad g(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{(e^t - 1)(t + 1)}}, & \text{se } t < 0, \\ \frac{t - \arctan t}{t(e^t - 1)}, & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

- a) Determinare l'insieme di definizione di f ;
- b) calcolare i limiti di f agli estremi dell'insieme di definizione;
- c) calcolare, dove esiste, $f'(x)$ e studiarne il segno;
- d) disegnare il grafico della funzione f .

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x, y) := |\cos x \sin y| + \frac{\arctan x \log(1 + y^2)}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}$$

- a) stabilire se essa è prolungabile per continuità in $(0, 0)$;
- b) in caso affermativo, studiare la differenziabilità della funzione così prolungata in $(0, 0)$;
- c) calcolare, se esistono, le derivate parziali di f in $(-\pi, \pi/2)$.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\sin x)y(x) + \sin 2x, \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a) studiare, al variare del parametro reale α , esistenza ed unicità delle soluzioni, precisando pure dove esse sono definite.

b) Determinare la soluzione (o le soluzioni) nel caso $\alpha = 0$.