Corso di laurea in ingegneria civile – insegnamento di analisi matematica 2

Anno accademico 2005/06 – prova scritta intermedia dell'11 aprile 2006

Esercizio 3. Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_0^x \frac{\log|t|}{(1/e - e^t)\sqrt[3]{\arctan t - \pi/6}}\,dt$$

a) determinarne l'insieme di definizione;

b) determinarne l'insieme di derivabilità;

c) studiare il comportamento della funzione agli estremi dell'insieme di definizione.

Svolgimento.

a) Detta $g(t)$ l'integranda, essa è definita in

$$I_g := (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3,+\infty)$$

Calcoliamo i limiti:

$\lim_{t\to 0} g(t) = -\infty$ di ordine basso (inferiore a qualunque potenza di $1/t$);

$\lim_{t\to\sqrt{3}/3-} g(t) = +\infty$ di ordine 1/3;

$\lim_{t\to\sqrt{3}/3+} g(t) = -\infty$ di ordine 1/3;

$\lim_{t\to -1} g(t) = \ell_1 \in \mathbb{R}$.

Pertanto esistono gli integrali impropri $\int_0^x g(t)\,dt$ sia per x in un intorno di 0 sia per $x = \sqrt{3}/3$; per $x = -1$ l'integranda è prolungabile per continuità in tale punto (definendola in -1 uguale al suo limite) per cui l'integrale $\int_0^1 g(t)\,dt$ converge. In definitiva si ha che l'insieme di definizione di f è tutto $\mathbb{R}$.

b) È noto che f è derivabile in tutti i punti in cui g è continua. Ora g è certamente continua nel suo insieme di definizione, e come si è visto essa è pure prolungabile per continuità nel punto -1. Invece nei punti 0 e $\sqrt{3}/3$ la g tende a $+\infty$ o a $-\infty$, quindi in tali punti g non è prolungabile per continuità (in tali punti il rapporto incrementale di f non ha limite reale). Si conclude che l'insieme di derivabilità di g è

$$I'_g := (-\infty,0) \cup (0,\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3,+\infty)$$

c) Si ha $\lim_{\to+\infty} g(t) = 0$ di ordine superiore a qualunque potenza di $1/t$ (si osservi l'esponenziale al denominatore). Quindi converge l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$, cioè $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell_2$ reale. Si ha poi $\lim_{t\to-\infty} g(t) = -\infty$, quindi l'integrale improprio $\int_0^{-\infty} g(t)\,dt$ diverge positivamente, cioè $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (il segno cambia perché l'intervallo di integrazione ha orientamento opposto a quello normale).