ANALISI MATEMATICA II

Esercizio 1. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2-k}} + \sqrt{x^2+y^2-4}\,,\; \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-k}} \right)$$

1) Disegnare, al variare del parametro reale k, l'insieme di definizione **I** di **F** e specificare se **I** è semplicemente connesso.
2) Sia k = 4. Verificare se **F** è irrotazionale e se è conservativo.
3) Sia k = 4. Se esistono, determinare tutti i potenziali di **F** in **I**.
4) Discutere la seguente affermazione: *Esistono campi vettoriali F non conservativi tali che* $\int_\gamma F = 0$*, dove* γ *è una curva piana chiusa regolare.*

Risposte:

1) **F** é definito se $x^2 + y^2 - 4 \geq 0$ e se $x^2 + y^2 - k > 0$, quindi se $k < 4$ **F** é definito in I = $\{(x,y) : x^2 + y^2 \geq 4\}$ che non è semplicemente connesso; se $k \geq 4$ **F** è definito in I = $\{(x,y) : x^2 + y^2 > k\}$ che non è semplicemente connesso.

2) Sia $k = 4$ e sia F = (f_1,f_2). $F \in C^1(I)$, inoltre si verifica facilmente che $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ quindi F è irrotazionale in I. Non essendo I semplicemente connesso, per stabilire se F è conservativo occorre verificare se è nullo l'integrale curvilineo di F su una curva γ chiusa, semplice, regolare a tratti, di traccia contenuta in I.
Possiamo scegliere la circonferenza γ con parametrizzazione $r(\theta) = (3\cos\theta, 3 sen\theta)$ con $\theta \in [0,2\pi]$. Si verifica che $\int_\gamma F = 0$, per le proprietà dei campi vettoriali ne segue che F è conservativo in I.

3) Se $k = 4$, tutti i potenziali di F in I sono le funzioni $G(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2-4} + C$ con C costante reale.

4) Esistono campi vettoriali non irrotazionali, e quindi non conservativi, tali che $\int_\gamma F = 0$ dove γ è una curva piana chiusa e regolare, ad esempio $F(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ e γ curva con parametrizzazione $r(\theta) = (3\cos\theta, 3 sen\theta)$ con $\theta \in [0,2\pi]$.