

**Esercizi su campi vettoriali e curve parametriche**

Es. 1. Dato il campo vettoriale  $\mathbf{F}(x,y) = \left( \frac{x-k}{\sqrt{x^2-2x+y^2}} + 2x, \frac{y}{\sqrt{x^2-2x+y^2}} + 3y^2 \right)$

- 1) Determinare l'insieme di definizione I di  $\mathbf{F}$  e specificare se I è semplicemente connesso.
- 2) Determinare per quali valori del parametro reale  $k$   $\mathbf{F}$  è conservativo in I e trovare un potenziale di  $\mathbf{F}$ .
- 3) Per i valori di  $k$  trovati al punto precedente, calcolare  $\int_C \mathbf{F}$  dove C è la curva di

rappresentazione parametrica  $r(t) = (3 \cos t, 3 \sin t)$  con  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Es.2 . Sia  $\mathbf{F}(x,y,z) = \left( \frac{y}{1+x^2y^2} + \frac{xz}{\sqrt{x^2+z^2}}, \frac{x}{1+x^2y^2}, \sqrt{x^2+z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{x^2+z^2}} \right)$

- 1) Determinare l'insieme di definizione I di  $\mathbf{F}$  e specificare se è semplicemente connesso.
- 2) Verificare se il campo vettoriale  $\mathbf{F}$  è conservativo in I
- 3) Se esiste, trovare un potenziale di  $\mathbf{F}$  in I.

Es. 3. Dato il campo vettoriale  $\mathbf{F}(x,y) = \left( \frac{xy}{\sqrt{3+x^2y}} + 1 - y^2 \sin xy, \frac{x^2}{2\sqrt{3+x^2y}} + \cos xy - xy \sin xy \right)$

- 1) Determinare l'insieme di definizione I di  $\mathbf{F}$  e specificare se I è semplicemente connesso.
- 2) Verificare se  $\mathbf{F}$  è conservativo in I.
- 3) Se esiste, trovare un potenziale di  $\mathbf{F}$ .
- 4) Data la curva  $\gamma$  di rappresentazione parametrica  $r(t) = (t \cos t, t \sin t)$  con  $t \in [0, \pi]$ .  
 Disegnare la traccia di tale curva, verificare se  $\gamma$  è una curva regolare e, se esiste, calcolare l'integrale curvilineo  $\int_{\gamma} \mathbf{F}$ .

Es 4. Dato il campo vettoriale  $\mathbf{F}(x,y) = \left( \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{1}{\sqrt{x+2-y}}, \frac{-x}{x^2+y^2} - \frac{1}{\sqrt{x+2-y}} \right)$

- 1) Disegnare l'insieme di definizione I di  $\mathbf{F}$  e specificare se I è semplicemente connesso.
- 2) Verificare se  $\mathbf{F}$  è conservativo in I.
- 3) Se esiste, trovare un potenziale di  $\mathbf{F}$  in  $A = \{(x,y) : x > 0, y < 0\}$
- 4) Data la curva  $\gamma$  di rappresentazione parametrica  $r(t) = (2 + \cos t, -2 + \sin t)$  con  $t \in [0, \pi]$ .  
 Calcolare l'integrale curvilineo  $\int_{\gamma} \mathbf{F}$ .

Es. 5. Dato il campo vettoriale  $\mathbf{F}(x,y) = \left( \frac{2xy}{x^2y-1}, \frac{y}{\sqrt{y^2+2}} + \frac{x^2}{x^2y-1} \right)$

- 1) Disegnare l'insieme di definizione  $\mathbf{I}$  di  $\mathbf{F}$  e specificare se  $\mathbf{I}$  è semplicemente connesso.
- 2) Verificare se  $\mathbf{F}$  è conservativo.
- 3) Se esiste, determinare un potenziale di  $\mathbf{F}$  in  $\mathbf{I}$ .
- 4) Sia  $C$  la curva di rappresentazione parametrica  $r(t) = (2 \cos t, \sin t)$  con  $t \in [\pi, 2\pi]$ , calcolare, se esiste,  $\int_C F$ .