ANALISI MATEMATICA 3 – a.a. 2005/06
Corso di Studio in Ingegneria Navale
Esame scritto dell'8 febbraio2006

Esercizio 1. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{2x^2}{x^2+y^2-k} + \ln\left|x^2+y^2-k\right|,\ \frac{2xy}{x^2+y^2-k} \right)$$

Al variare del parametro reale k determinare l'insieme di definizione **I** di **F** e specificare se **I** è semplicemente connesso.

Sia $k = 3$

i) Verificare se **F** è irrotazionale

ii) Verificare se **F** è conservativo e, se esiste, determinare un potenziale di **F**

iii) Sia C la curva di rappresentazione parametrica r (t) = $\left(e^{-t}\cos t, e^{-t}\,sen\,t\right)$ con t $\in [0, \pi/2]$. Calcolare, se esiste, $\int_C F$.

Cenno della soluzione: **F** è definito se $x^2+y^2 \neq 0$, quindi se $k=0$ si ha **I** $= \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$ insieme non semplicemente connesso; se $k<0$ si ha **I =** R^2 insieme semplicemente connesso ed infine se $k > 0$ si ha **I =** $\{(x,y) \in \mathrm{R}^2 : x^2+y^2 \neq k\}$, cioè **I** = $\mathrm{R}^2 \setminus$ { circonferenza di raggio $\sqrt{k}$ } insieme non semplicemente connesso.

Sia ora $k = 3$.

i) Si verifica facilmente che **F** è irrotazionale in I.

ii) I non è semplicemente connesso. Sia γ è la circonferenza di raggio 2 e centro l'origine con parametrizzazione r(t) = (2 cost t, 2 sen t) con t $\in [0, 2\pi]$, si verifica che $\int_\gamma F = 0$ e quindi per le proprietà dei campi vettoriali ne segue che **F** è conservativo in I.
Un potenziale di **F** in I è la funzione $G(x,y) = x\ln\left| x^2+y^2-3 \right|$.

iii) La curva parametrica C è regolare e la sua traccia è contenuta in I, infatti $x^2(t)+y^2(t) \neq 3$ per t $\in [0, \pi/2]$, quindi si può calcolare l'integrale curvilineo di **F** su C e, poiché **F** è conservativo, si ha $\int_C F = G(P_1) - G(P_0) = -\ln 2$, dove P_1 e P_0 sono rispettivamente il punto finale e il punto iniziale della curva C.