ANALISI MATEMATICA 3 – a.a. 2005/06
Corso di Studio in Ingegneria Navale
Esame scritto dell'8 febbraio2006

Esercizio 2. Sia V = $\left\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 , 0 \leq z \leq 4 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$

1) Parametrizzare la superficie S contorno di V.
2) Applicando il teorema della divergenza calcolare il flusso del campo F = $\left(xz, yz, z^2\right)$ uscente dalla superficie S.
3) Sia Σ = V $\cap$ $\left\{(x, y, z): z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$, determinare la normale esterna N a Σ nel punto P_1= ($\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 3$) e calcolare l'integrale di superficie $\iint_\Sigma (z-1)\,dS$

Cenno della soluzione:

1) S = $S_1 \cup S_2 \cup S_3$

S_1 si può parametrizzare con $\sigma_1 : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho sen\theta \\ z = 4 - \rho \end{cases}$ con $0 \leq \rho \leq 4$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$,

S_2 si può parametrizzare con $\sigma_2 : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho sen\theta \\ z = \sqrt{1-\rho^2} \end{cases}$ con $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$,

oppure con $\hat{\sigma}_2 : \begin{cases} x = \cos\theta\, sen\varphi \\ y = sen\theta\, sen\varphi \\ z = \cos\varphi \end{cases}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$,

infine S_3 si può parametrizzare con $\sigma_3 \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho sen\theta \\ z = 0 \end{cases}$ con $1 \leq \rho \leq 4$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

2) $\phi = \iint_S F n_e dS = \iiint_V divF\; dxdydz =$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\, d\rho \int_{\sqrt{1-\rho^2}}^{4-\rho} 4z\, dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^4 \rho\, d\rho \int_0^{4-\rho} 4z\, dz = \frac{253}{3} .$$

3) La superficie Σ coincide con la superficie S_1, la normale esterna ad S_1 è N = ($\rho\cos\theta, \rho\, sen\theta, \rho$) , quindi nel punto P_1 si ha N = ($\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2$,1).

Infine si ha $\iint_{\Sigma}(z-1)\,dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 (3-\rho)\rho\sqrt{2}\,d\rho = \frac{16}{3}\sqrt{2}\pi$.