Analisi matematica II – Ingegneria edile-architettura ed ingegneria civile

Esame scritto – 10 settembre 2013

Esercizio 1. Sia $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-2y \le 0\,,\ -1 \le z \le 4 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\}$.

1) Calcolare il volume di V.

2) Stabilire se esiste ed, in caso affermativo, calcolare il vettore normale esterno alla frontiera di V nel punto $P_o = (0,\, 1,\, \frac{7}{2})$.

3) Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale $\underline{F}(x,y,z) = (-y,x,2)$ attraverso la superficie S, essendo S la parte della frontiera di V tale che $z = 4 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

Esercizio 1bis. È dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{4}{x}\, y(x) + \sqrt{-y(x)} \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

1) Verificare che ha un'unica soluzione in un intorno del punto $x_o = 1$ e tracciare un grafico locale della soluzione.

2) Calcolare esplicitamente la soluzione del problema, determinandone l'insieme di definizione.

Esercizio 2A. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \Big(\frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2+4y}} - \frac{2y}{1+x^2y^2},\ \frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2+4y}} - \frac{2x}{1+x^2y^2}\Big)$$

1) Rappresentare l'insieme di definizione I di F e specificare se è semplicemente connesso.

2) Verificare se F è conservativo in I e, se esiste, trovarne un potenziale.

3) Data la curva γ di rappresentazione parametrica $r(t) = (4\cos^3 t, 4\sin^3 t)$ con $t \in [0,\pi/2]$, calcolare la lunghezza di tale curva e, se esiste, calcolare $\int_\gamma F$.

Esercizio 2B. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) - 6y_2(x) \\ y_2'(x) = 3y_1(x) - 8y_2(x) \end{cases}$$

Trovare tutte le soluzioni.