CAMPI VETTORIALI ED INTEGRALI MULTIPLI

1) Stabilire se il campo vettoriale:

$$\underline{F}(x,y) = \frac{1-2x}{x^2-y^2-x}\,\underline{i} + \frac{2y}{x^2-y^2-x}\,\underline{j}$$

é conservativo. Calcolare, se possibile, $\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r}$, dove C é il segmento sull'asse x compreso fra $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$, orientato secondo l'asse x.

2) Si consideri il seguente campo vettoriale:

$$F(x,y) = \left(-\frac{4\,x\,y^4}{(x^2+y^2)^3},\ \frac{4\,x^2 y^3}{(x^2+y^2)^3} \right).$$

Stabilire se F é conservativo nel suo dominio.

3) Calcolare

$$\int_\gamma [(y+x)dx-(y-x)dy]$$

dove $\gamma = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 : y = x^2,\ -1 \le x \le 1\}$, orientata in senso antiorario.

4) Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y) = \frac{e^{xy}y}{e^{xy}-e^2}\,\underline{i} + \frac{e^{xy}x}{e^{xy}-e^2}\,\underline{j}$$

Stabilire dove è definito, dove è conservativo e trovarne tutti i potenziali.

5) Sia

$$\omega(x,y) = \left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)\underline{i} + \left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right)\underline{j}.$$

Calcolare $\int_{\gamma_1}\omega$ e $\int_{\gamma_2}\omega$, dove γ_1 e γ_2 hanno equazione rispettivamente: $x^2+y^2=1$ e $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$.

6) Dei seguenti campi vettoriali f di componenti f_1 ed f_2 determinare l'insieme di definizione, illustrandolo graficamente, stabilire se sono conservativi ed, in caso affermativo, calcolarne il potenziale g tale che $g(x_o,y_o)=1$:

$$f_1(x,y) = \frac{1-3x^2-2y^2}{\sqrt{1-x^2-2y^2}}\quad,\quad f_2(x,y) = -\frac{4xy}{\sqrt{1-x^2-2y^2}};\qquad (x_o,y_o)=(0,0)$$

$$f_1(x,y) = x\sqrt{1-x^2-3y^2}\quad,\quad f_2(x,y) = 3\,y\sqrt{1-x^2-3y^2};\qquad (x_o,y_o)=(1/2,0)$$

$$f_1(x,y) = \frac{y-2xy}{\sqrt{x-x^2-y^2}}\quad,\quad f_2(x,y) = \frac{x-x^2-3y^2}{\sqrt{x-x^2-y^2}};\qquad (x_o,y_o)=(1/2,0)$$

$$f_1(x,y) = \frac{2x-1}{\sqrt{x-x^2-y^2}}\quad,\quad f_2(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{x-x^2-y^2}};\qquad (x_o,y_o)=(1/2,0)$$

$$f_1(x,y) = \frac{(2x-1)(y+1)}{(y-x^2+x)^2}\quad,\quad f_2(x,y) = \frac{(x-x^2-1)}{(x^2-x-y)^2};\qquad (x_o,y_o)=(0,-1/2)$$

$$f_1(x,y) = \frac{x}{x^2-y^2-1}\quad,\quad f_2(x,y) = \frac{y}{x^2-y^2-1};\qquad (x_o,y_o)=(0,0)$$

$$f_1(x,y) = x\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})\quad,\quad f_2(x,y) = y\ln(1+\sqrt{x^2+y^2});\qquad (x_o,y_o)=(0,0)$$

$f_1(x,y) = y \tan(x^2+y^2)$, $f_2(x,y) = x \tan(x^2+y^2)$; $(x_o, y_o) = (0,0)$

$f_1(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2-2y}$, $f_2(x,y) = \dfrac{y-1}{x^2+y^2-2y}$; $(x_o, y_o) = (1,0)$

7) Calcolare

$$I = \int_\gamma [(3x^2y - \sin x)\,dx + (x^3 + \ln y)\,dy],$$

dove γ è la spezzata con i lati paralleli agli assi di vertici

$A(1,-1)$, $B(2,-1)$, $C(2,7)$, orientata in senso antiorario.

L'integrale dipende dalla linea scelta?

8) Trovare l'insieme ove è conservativo il campo vettoriale

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - xy^2 - 2x}} [(\frac{3}{2} + xy^2)\,\underline{i} + x\,y\,\underline{j}]$$

e calcolarne tutti i potenziali.

9) Sia T il solido definito dalle diseguaglianze :

$$x^2+y^2 \le \frac{1}{3}(z - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 \quad , \quad 0 \le z \le \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad x^2+y^2+z^2 \ge \frac{3}{16} \quad .$$

Si calcolino le coordinate del baricentro di T, supposto omogeneo.

10) Calcolare le coordinate del baricentro del solido limitato dalle diseguaglianze:

$$x^2+y^2+z^2 \le 1 \quad , \quad z \ge 0 \quad , \quad x^2+y^2 \le z^2 \; ,$$

supponendo che la densitá sia proporzionale al quadrato della distanza dall'origine.

11) Sia T il solido omogeneo limitato dai piani $z = 0, z = 1, x = 0, x = 1$ e compreso fra le superfici

$$x^2+y^2-z^2 = 0,\, 2(x^2+y^2) - z^2 = 0 .$$

Calcolare il baricentro di T.

12) Calcolare le coordinate del baricentro del solido (supposto omogeneo) definito dalle limitazioni:

$$x^2+y^2-(z-1)^2 \ge 0\,,\; x^2+y^2+z^2-2z \le 0\,,\; z \ge 1\,.$$

13) Calcolare l'area della regione $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \ge \frac{1}{4}\,,\; x^2 + (y-1)^2 \le 1\,,\; y \le \frac{3}{2}\}$.

14) Si consideri il solido V ottenuto dalla rotazione di 2π attorno all'asse z del dominio T contenuto nel piano (x,z):

$$T = \{\,(x,z)\;:\; x^2 - 2x + z^2 \ge 0\,,\, x^2+z^2-4 \le 0\,,\, x \ge 0\,,\, z \ge 0\}\,.$$

○ Verificare se V é un insieme misurabile.

○ Determinare una formula di riduzione ad integrali semplici in coordinate cartesiane di $\iiint_V dxdydz$.

○ Determinare una formula di riduzione ad integrali semplici in opportune coordinate cilindriche di $\iiint_V dxdydz$.

○ Determinare, in opportune coordinate sferiche, una formula di riduzione ad integrali semplici di $\iiint_V dxdydz$.