Raccolta esami di Analisi II

(Corsi di laurea in Ing. Edile-Architettura e Civile-Ambientale)

Esame del 18 gennaio 2011

Esercizio 1. Dato il solido

$$V = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 4,\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le x^2+y^2\,\}$$

a) disegnare l'intersezione di V con il piano di equazione $x = 0$.

b) Supposto V omogeneo, determinare il baricentro di V.

c) Applicando il teorema della divergenza, determinare il flusso del campo $F(x,y,z) = (xz,\ z,\ z^2)$ uscente dalla supericie S contorno di V.

Esercizio 2. Dato il sistema differenziale

$$\begin{cases} y_1'(x) = -y_2(x) + 1 \\ y_2'(x) = y_1(x) + 3\,\sin(2x) \end{cases}$$

a) calcolare due soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato;

b) calcolare l'integrale generale del sistema dato.

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y,\ \frac{ky}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\,e^{2y} + x \right)$$

a) determinare l'insieme di definizione I di F e specificare se I è semplicemente connesso.

b) Determinare per quali valori del parametro reale k il campo F è conservativo in I e, per tali valori, trovare un potenziale di F.

c) Data la curva parametrica C con parametrizzazione $r(t) = (\cos t,\ \sin t)$ con $t \in [0, \pi/2]$, calcolare, se esiste, $\int_C F$.

Esame dell' 8 febbraio 2011

Esercizio 1. Calcolare la coordinata z del baricentro del solido (supposto omogeneo) limitato dalle superfici di equazioni: $x^2+y^2 = 1,\ z = 0,\ z = 2 + |xy|$.

Esercizio 2. Data l'equazione differenziale

$$x^2\,y''(x) - x\,y'(x) - 8\,y(x) = x^3$$

a) determinarne tutte le soluzioni in $(0, +\infty)$;

b) determinare le eventuali soluzioni tali che $y(1) = 1,\ y'(1) = 2/5$.

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{1}{x+2},\ \frac{-\,x}{x^2+y^2} + 1 \right)$$

a) determinare l'insieme di definizione I di F e specificare se I è semplicemente connesso.

b) Verificare se il campo F è conservativo in I.

c) Se esiste, trovare un potenziale di F nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$.

d) Data la curva parametrica C con parametrizzazione $r(t) = (3 + \cos t,\, 3\sin t)$ con $t \in [0, \pi/2]$, è vero che $\int_C F = 0$?

Esame del 16 giugno 2011

Esercizio 1. Dato il sistema differenziale

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) - y_2(x) + x\,e^x \\ y_2'(x) = y_2(x) + \cos x \end{cases}$$

a) determinare due soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato;

b) determinare l'integrale generale del sistema dato.

Esercizio 2. Sia data la funzione

$$f(x,y) := x^2 + x\,y + 2\,y^2 + |y|$$

a) Stabilire se la funzione ammette minimi e/o massimi globali nel suo dominio.

b) Determinare, se esistono, i punti di minimo e di massimo globali della funzione in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0,\, -x \leq y \leq 1\}$.

c) Calcolare, se esiste, la derivata direzionale minima della funzione in $(0,0)$.

Esercizio 3. Calcolare il volume del solido

$$T := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0,\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\, x^2 + y^2 \leq 1,\, 4(x^2 + y^2) \leq (2 - z)^2\}.$$

Esame del 12 luglio 2011

Esercizio 1. Dato il solido

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4,\, 1 + \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 4 + x^2 + y^2\},$$

a) calcolare

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$$

b) Parametrizzare la superficie S contorno di V.

c) Calcolare l'area della superficie Ω tale che $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4,\, z = 4 + x^2 + y^2\}$.

d) Applicando il teorema della divergenza, determinare il flusso del campo $F(x,y,z) = \left(y,\, x,\, z\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ uscente dalla superficie S contorno di V.

Esercizio 2. Data l'equazione differenziale

$$x^2\, y''(x) + x\, y'(x) + 4\, y(x) = -\log x$$

a) determinare due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata;

b) determinare l'integrale generale dell'equazione data, precisandone l'insieme di definizione.

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{y}{1 + x^2y^2} + \frac{2\,x\,y}{1 + x^2y},\, \frac{x}{1 + x^2y^2} + \frac{x^2}{1 + x^2y}\right)$$

a) trovare l'insieme di definizione I di F e specificare se I è semplicemente connesso.

b) Verificare se F è conservativo in I e, se esiste, trovare un potenziale di F.

c) Data la curva γ con parametrizzazione $r(t) = (e^{-t} \cos t,\, e^{-t} \sin t)$ con $t \in [0, \pi]$, verificare se tale curva è regolare e, se esiste, calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esame del 13 settembre 2011

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)}{2(x+1)} - \dfrac{x+2}{2\,y(x)} \\ y(0) = k \end{cases}$$

a) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;

b) stabilire per quali valori del parametro reale k (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;

c) determinare la soluzione o le soluzioni del problema (se possibile) per $k = -1$.

Esercizio 2. Sia $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z \le 4 - x^2 - y^2,\, z \le 3\}$.

a) Calcolare il volume di T.

b) Parametrizzare la superficie S contorno di T.

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{2\,x + y}{2\,\sqrt{x^2 + x\,y}} + \frac{y\, e^{\arctan xy}}{1 + x^2y^2},\; \frac{x}{2\,\sqrt{x^2 + x\,y}} + \frac{x\, e^{\arctan xy}}{1 + x^2y^2} \right)$$

a) trovare l'insieme di definizione I di F e specificare se è connesso e se è semplicemente connesso.

b) Verificare se F risulta conservativo in I e, se esiste, trovare un potenziale di F.

c) Data la curva γ con parametrizzazione $r(t) = (2 + \cos t,\, \sin t)$ con $t \in [\pi, 2\pi]$, verificare se tale curva è regolare e, se esiste, calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esame del 12 gennaio 2012

Esercizio 1. Sia T la figura nel piano (x, z) limitata dalle diseguaglianze

$$x^2 + (z-1)^2 - 1 \ge 0,\; x + z - 2 \le 0,\; z \ge 0,\; x \ge 0$$

a) Calcolare le coordinate del baricentro del solido D (supposto omogeneo) ottenuto dalla rotazione completa di T attorno all'asse z.

b) Applicando il teorema della divergenza, calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (y, 2y, 3z)$ uscente dalla superficie S frontiera del solido D.

Esercizio 2. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + 4\,x\,e^{x^2},\; \frac{a\,y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + \frac{2\,y}{1 + y^2} \right)$$

a) determinare i valori del parametro reale a in modo che F risulti conservativo nel suo insieme di definizione I.

b) Se esiste, al variare di $a \in \mathbb{R}$, trovare un potenziale di F in I.

c) Calcolare, se esiste, $\int_C F$, dove C è la curva di rappresentazione parametrica $r(t) = (2\,\cos t,\, 3\,\sin t)$ con $t \in [\pi,\, 3\pi/2]$.

Esercizio 3. Data l'equazione differenziale

$$x^2\, y''(x) + 4\, x\, y'(x) + 2\, y(x) = x^2$$

trovarne tutte le soluzioni tali che $y(1) = 0$.

Esame dell'8 febbraio 2012

Esercizio 1. Dato il solido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 9,\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2},\ z \ge 1\}$$

a) calcolare

$$\iiint_V z\, dx\, dy\, dz$$

b) Parametrizzare la superficie S contorno di V.

Esercizio 2. Dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(2\, x\, \ln(x - y) + \frac{x^2}{x - y},\ \frac{-\,x^2}{x - y} + \cos y - y\, \sin y\right)$$

a) disegnare l'insieme di definizione I di F e specificare se I è semplicemente connesso.

b) Verificare se F risulta conservativo in I e, se esiste, trovare un potenziale di F.

c) Se esistono, calcolare $\int_{\gamma_1} F$ e $\int_{\gamma_2} F$, dove γ_1 è la curva con parametrizzazione $r(t) = (2\,\cos t,\, 2\,\sin t)$ con $t \in [0,\, 2\,\pi]$ e γ_2 è la curva con parametrizzazione $r(t) = (t,\, -1 + t^2/2)$ con $t \in [0,\, 1]$.

Esercizio 3. Dato il sistema differenziale

$$\begin{cases} y_1'(x) = 2\, y_1(x) + 2\, y_2(x) + 5\, \sin x \\ y_2'(x) = y_1(x) + y_2(x) - e^{3x} \end{cases}$$

a) determinare, se esistono, due soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato;

b) determinare una soluzione particolare del sistema completo.

Esame del 13 giugno 2012

Esercizio 1. Sia $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le 4,\ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le x^2 + y^2 + 2\}$.

a) Supposto V omogeneo, determinarne il baricentro.

b) Parametrizzare la superficie S frontiera di V.

c) Determinare la normale esterna alla superficie $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4,\ z = x^2 + y^2 + 2\}$.

Esercizio 2. Dato il sistema differenziale

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + 5\, y_2(x) - 4\, x \\ y_2'(x) = -y_1(x) - y_2(x) \end{cases}$$

a) determinare due soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato;

b) determinare una soluzione particolare del sistema completo.

c) Esistono soluzioni limitate del sistema dato? E soluzioni periodiche?

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(2\,x\,z - \frac{1}{(x-y)^2},\ \frac{1}{(x-y)^2} - e^{\sin x},\ x^2 - y\,\cos z\, e^{\sin z}\right)$$

a) trovare l'insieme di definizione I di F e specificare se I è semplicemente connesso.

b) Verificare se F è xonservativo in I e, se esiste, trovare un potenziale di F in I.

c) Data la curva γ di rappresentazione parametrica $r(t) = (0,\, t,\, t^2 - 1)$ con $t \in [1,\, 2]$, verificare se γ è una curva regolare, se appartiene a I e, se esiste, calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esame del 6 luglio 2012

Esercizio 1. Dato il solido

$$T := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ 3(x^2+y^2) \leq (z+2)^2\}$$

calcolarne il volume.

Esercizio 2. Data l'equazione

$$x^2\, y''(x) + 6\,x\,y'(x) + 6\,y(x) = f(x)$$

a) determinarne tutte le soluzioni in $(-\infty,\, 0)$ se $f(x) = 0$.

b) Determinarne tutte le soluzioni in $(-\infty,\, 0)$ se $f(x) = x + \dfrac{2}{x^2}$.

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(e^x + \frac{y\, e^{\arctan xy}}{1+x^2y^2} - \frac{1}{x+y+1},\ y^2 + \frac{x\, e^{\arctan xy}}{1+x^2y^2} - \frac{1}{x+y+1}\right)$$

a) rappresentare l'insieme di definizione I di F e specificare se I è semplicemente connesso.

b) Verificare se F è xonservativo in I e, se esiste, trovare un potenziale di F in I.

c) Data la curva γ di rappresentazione parametrica $r(t) = (t\,\cos t,\ t\,\sin t)$ con $t \in [0,\, \pi/2]$, verificare se γ è una curva regolare, se la sua traccia è contenuta in I e, se esiste calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esame del 6 settembre 2012

Esercizio 1. Dato il sistema differenziale

$$\begin{cases} y_1'(x) = -y_1(x) - y_2(x) + 5\,\sin x \\ y_2'(x) = y_1(x) - y_2(x) - 2\,x \end{cases}$$

a) determinare due soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato;

b) determinare una soluzione particolare del sistema completo.

c) stabilire se esistono soluzioni del sistema limitate in $\mathbb{R}$ ed in caso affermativo quante.

Esercizio 2. Sia $T := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2\,x \leq z \leq 0,\ \max\{|x|,\, |y|\} \geq k\}$.

a) Per quali valori del parametro reale k (se ce ne sono) l'insieme T è vuoto?

b) Sia ora $k = 1$; calcolare il volume di T.

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2+y^2-4\,x+3}} - \frac{1}{\sqrt{x}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-4\,x+3}} + \frac{1}{1+y^2}\right)$$

a) rappresentare l'insieme di definizione I di F e specificare se I è semplicemente connesso.

b) Verificare se F è xonservativo in I e, se esiste, trovare un potenziale di F in I.

c) Data la curva γ di rappresentazione parametrica $r(t) = (2 + 2\cos t,\, 2\sin t)$ con $t \in [0, \pi/2]$, calcolare, se esiste, $\displaystyle\int_\gamma F$.