

ANALISI MATEMATICA 3 – a.a. 2005/06
Corso di Studio in Ingegneria Navale
Esame scritto del 25 gennaio 2006

Esercizio 2. Data, nel piano yz, la curva γ grafico della funzione $z = (y - 2)^2 + 1$ con $0 \leq y \leq 2$. Sia S la superficie ottenuta facendo ruotare γ di 2π intorno all'asse z.

- 1) Disegnare γ e parametrizzare la superficie S.
- 2) Determinare la normale esterna N ad S nel punto $P_1 = (0, 1, 2)$.
- 3) Calcolare il flusso del campo $F = (-y, x, z)$ uscente dalla superficie S.
- 4) Descrivere in coordinate cilindriche l'insieme V ottenuto ruotando di 2π intorno all'asse z il dominio $A = \{(y, z) : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq (y - 2)^2 + 1, z \geq y - 1\}$
- 5) Applicando il teorema della divergenza calcolare il flusso di F uscente dalla superficie Σ contorno dell'insieme V.

Risposte:

- 1) Una parametrizzazione σ di S, superficie di rotazione, può essere

$$\sigma : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = (\rho - 2)^2 + 1 \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 2.$$

- 2) La normale esterna N ad S nel punto P_1 è $N = (0, 2, 1)$.

- 3) Il flusso ϕ_1 del campo F uscente da S vale: $\phi_1 = \iint_S F n_e dS = \frac{20}{3}\pi$

- 4) Se ruotiamo A di 2π attorno all'asse z otteniamo l'insieme V il cui trasformato V' in coordinate cilindriche può essere scritto nel seguente modo

$$V' = \left\{ (\rho, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq z \leq (\rho - 2)^2 + 1 \right\} \cup \left\{ (\rho, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq \rho \leq 2, \rho \leq z \leq (\rho - 2)^2 + 1 \right\}$$

- 5) Applicando il teorema della divergenza per calcolare il flusso ϕ di $F = (-y, x, z)$ uscente dalla superficie Σ contorno di V si ha $\phi = \iiint_V \text{div} F dx dy dz = 5\pi$.

Nota: Nella seconda versione le risposte sono analoghe, in particolare si ha

- 2) $N = (0, 1, 1)$.

- 3) $\phi_1 = \frac{16}{3}\pi$.

- 5) Il flusso ϕ uscente da Σ vale $\frac{11}{3}\pi$.